

جریان لغزشی حول ذرات کروی میکرونی در اعداد رینولدز متوسط

حمید نیازمند

دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه مهندسی مکانیک

مرتضی عنبرسوز

دانشجوی دکترا، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه مهندسی مکانیک

چکیده

رفتار سیال رقیق که برای اجسام در ابعاد ماکرو معمولاً در فشارهای به نسبت پائین ظاهر می‌شود، در کاربردهای باطول مشخصه میکرونی می‌تواند در فشار محیط و حتی در فشارهای بالاتر نیز روی دهد. ذرات کروی مثل قطرات مایع در سیستمهای پاششی به علت قطر میکرونی آنها می‌توانند تا درجاتی رفتار رقیق سیال را تجربه نمایند. این رفتار سیال رقیق می‌تواند بر دینامیک ذرات و آهنگ انتقال حرارت آنها تاثیر قابل ملاحظه‌ای داشته باشد. به همین علت در این مقاله جریان حول یک کره تک دما در حوزه لغزش $10^{-3} \leq Kn \leq 10^{-1}$ با شبیه سازی عددی، شرایط مرزی لغزش سرعت و پرش دما روی سطح کره، مطالعه شده است. با افزایش عدد نودسن، ضریب پسا و عدد نوسلبه دلیل کاهش گرادیانهای سرعت و دما روی سطح کره کاهش قابل ملاحظه‌ای می‌یابند. میزان این کاهش متناسب با اعداد رینولدز، نودسن و پرنتل است. اثرات میزان رقت سیال که با عدد نودسن بیان می‌شود بر دینامیک جریان روی کره شامل ناحیه جدایش، طول دنباله، توزیع چرخش اطراف کره به تفصیل در حوزه $1 \leq Re \leq 100$ بررسی شده است. همچنین روابطی برای کاربردهای عملی محاسبه ضریب پسا و عدد نوسل در حوزه لغزش (اعداد نودسن کوچکتر از 1) بر حسب اعداد رینولدز و نودسن ارائه شده است.

کلمات کلیدی: لغزش، کره، انتقال گرما، ضریب پسا، عدد نوسل، عدد نودسن

Slip flow over micron sized particles at intermediate Reynolds numbers

H. Niazmand Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

M. Anbarsooz Ph.D. Student, Mechanical Engineering, Heat and Fluids, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract

Rarefied flow behavior which is often appears in relatively low pressures for macro sized devices, might also occur at atmospheric or even higher pressures for the applications with micron-sized characteristic lengths. Spherical particles such as fuel droplets injected in combustion systems can experience rarefied flow to some degrees due to their micron-size diameters. This rarefied flow behavior can have dramatic influences on particle dynamics and heat transfer rate. Therefore, in this paper flow over an isothermal sphere in the slip flow regime $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$ is investigated numerically using slip/temperature jump boundary conditions. Increasing Knudsen number decreases the drag coefficient and the Nusselt number due to the reduction in velocity and temperature gradients over the sphere surface. This reduction is directly related to the Reynolds, Prandtl and Knudsen numbers. Rarefaction effects introduced by Knudsen number are studied in detail for the flow over sphere to examine the flow dynamics including separation zone, wake length and the vorticity distribution around the sphere for $1 \leq Re \leq 100$. Moreover, two correlations for practical applications are developed to estimate drag coefficient and the Nusselt number in the slip flow regime (for Knudsen numbers less than 0.1).

Keywords: slip, sphere, heat transfer, drag coefficient, Nusselt number

۱- مقدمه

$$Kn = \frac{\lambda}{D} \quad (1)$$

که در آن λ طول مسیر آزاد مولکول‌های گاز احاطه کننده و D قطر کره مورد نظر می‌باشد. قطر ذرات کروی در کاربردهای مختلف می‌تواند از چند نانومتر همچون ذرات ریز پراکنده در هوا تا چند ده میکرومتر همچون قطرات تزریق شده در محفظه های احتراق باشد. هنگامیکه اندازه ذره در مقایسه با طول مسیر آزاد مولکولهای گاز احاطه کننده آن قابل مقایسه باشد، ذرات رفتار یک گاز رقیق را تجربه خواهند کرد و فرض محیط پیوسته بسته به میزان رقیق بودن سیال به مرور اعتبار خود را از دست می‌دهد.

برای $Kn \leq 10^{-3}$ فرض محیط پیوسته صادق بوده و جریان سیال را می‌توان با معادلات ناویر-استوکس همراه با شرط مرزی معمول عدم لغزش بر روی دیوار تحلیل کرد [۱۶]. در حوزه $Kn > 10$ فرض محیط پیوسته و در نتیجه معادلات ناویراستوکس کاملاً اعتبار خود را از دست داده و جریان آزاد مولکولی^۴ وجود خواهد داشت. بازه $10^{-1} \leq Kn \leq 10$ به جریان گذار معروف است و به تدریج معادلات ناویراستوکس همراه با شرط مرزی لغزش مرتبه اول اعتبار خود را از دست می‌دهند. برای حوزه اعداد نودسن $10^{-1} \leq Kn \leq 10^{-3}$ ، که به حوزه لغزش معروف است، نتایج تجربی نشان می‌دهد که معادلات ناویراستوکس با استفاده از شرط مرزی لغزش در سرعت و پرش دما در دیواره‌ها می‌توانند به خوبی رفتار سیال را پیش‌بینی کنند [۱۶]. در بسیاری از کاربردهای صنعتی که با ذراتی با قطر در حدود ۵۰ میکرون در فشار اتمسفری سروکار داریم، در واقع جریان در اطراف ذره از نوع جریان لغزشی خواهد بود که موضوع مورد بررسی مقاله حاضر است. به علت بررسی گسترده جریان روی ذرات در رژیم پیوسته، در اینجا به مروری اجمالی از آنها اکتفا کرده و به بررسی کارهای انجام شده در مورد لغزش می‌پردازیم.

تاکنون مطالعات زیادی به منظور بررسی میزان کاهش نیروی پسای ذرات کروی در یک گاز رقیق در اعداد رینولدز کوچکتر از یک (رژیم جریان استوکس) با استفاده از ضرائب تصحیح انجام شده است. کانینگهام [۱۷] رابطه ای به فرم $(1 + AKn)$ برای در نظر گرفتن اثرات لغزش بر نیروی پسای یک ذره کروی در رژیم جریان استوکس ارائه کرد که در آن A یک ضریب ثابت است. در همان سال مطالعه ای تجربی توسط میلیکان [۱۸] برای $Kn < 0.3$ صورت گرفت که ارتباطی خطی بین ضریب تصحیح کانینگهام با طول مسیر آزاد را نشان می‌داد. مطالعات بیشتری در رژیم های مختلف لغزش توسط

کاربردهای بسیار متنوع جریان حول کره در صنایع مختلف آن را به حوزه تحقیق برای بسیاری از پژوهشگران و محققان تبدیل کرده است. دینامیک ذرات، قطرات و حباب ها در محیط های مختلف از جمله مسیر ذرات در سیکلون ها و جمع کننده های ذرات صنعتی، حرکت قطرات سوخت تزریق شده در محفظه های احتراق و حرکت ذرات ریز پراکنده در هوا^۱، مثال های از کاربردهای مختلف این حوزه از علم مکانیک می باشند. به دلیل کاربردهای فراوان، ادبیات فن بسیار گسترده ای در این حوزه موجود می باشد.

جواب تحلیلی در مورد جریان لزج حول ذرات کروی در اعداد رینولدز کوچکتر از یک (حوزه جریان خزشی) برای کره های صلب [۱،۲] و همچنین قطرات مایع کروی [۳،۴] موجود می باشد. معادلات ناویر-استوکس در اعداد رینولدز بیشتر از یک در شکل تابع جریان با استفاده از روش اختلاف محدود در مورد جریان حول کره صلب توسط محققان مختلفی حل شده اند [۹-۵]. بدیهی است که اعتبار حل های عددی فوق در حوزه اعداد رینولدز بالاتر از 212 که جریان حول کره تقارن محوری خود را از دست می‌دهد، به علت استفاده از شرط تقارن محوری محدود می‌شود. دنباله جریان حول کره در حوزه $212 \leq Re \leq 275$ در عین عدم تقارن محوری، متصل به کره و پایدار می‌باشد، در حالیکه در رینولدزهای بالاتر، گردابه ایجاد شده از کره جدا شده و یک ناحیه دنباله ناپایا ایجاد می‌کند [۱۰-۱۳]. علاوه بر بررسی جریان در حوزه های مختلف عدد رینولدز، اثراتی همچون حرکت شتاب دار ذره، گردایان های میدانی، ذرات غیر کروی، ذرات سیال تغییر شکل یافته^۲ و پارامترهای تاثیر گذار بسیار متنوعی مورد بررسی قرار گرفته اند [۱۴]. این مطالعات علاوه بر ذرات کروی صلب در مورد قطرات مایع نیز انجام شده است که بطور جامع در کتاب "انتقال و دینامیک سیال قطرات و اسپری ها" گردآوری شده است [۱۵].

علیرغم ادبیات فن بسیار گسترده ای که در زمینه دینامیک حرکت و جریان حول ذرات کروی به صورت مقالات بیشمار و کتب متعدد [۱۴،۱۵] موجود است، تاکنون آثار رفتار گازهای رقیق^۳ مورد توجه کافی قرار نگرفته است. یک گاز مثلاً هوا در فشار محیط در برابر یک ذره میکرونی تا حدودی رفتار یک گاز رقیق را خواهد داشت. معیاری که برای ارزیابی رفتار سیال رقیق بکار می‌رود عدد نودسن می‌باشد که در مورد جریان حول کره بصورت زیر تعریف می‌شود:

¹Aerosol²Deformed fluid particles³Rarefied gases⁴Free molecular flow

بگیرید که با سرعت اولیه 50 متر بر ثانیه به هوای اتمسفری با دمای 300 درجه کلوین تزریق شده باشد. با توجه به طول مسیر آزاد مولکول‌های هوا - که در شرایط استاندارد حدود 70 نانومتر می‌باشد - عدد نودسن برابر با 0.01 خواهد بود که در حوزه لغزش می‌باشد. در این حالت، عدد رینولدز (Re_D) بیشتر از 20 می‌باشد که بسیار فراتر از حوزه جریان لغزشی است. علاوه بر این، در حوزه لغزش، همزمان با لغزش در سرعت^۵، پرش دما^۶ نیز اتفاق می‌افتد که بر نرخ انتقال حرارت از ذره بسیار موثر می‌باشد و تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. در این مقاله، حل عددی معادلات ناویراستوکس برای جریان تراکم ناپذیر حول یک کره جامد تک دما، در اعداد رینولدز متوسط $10 \leq Re \leq 100$ و در حوزه سیال پیوسته و جریان لغزشی $0 \leq Kn \leq 0.1$ انجام شده است. اثر لغزش سرعت و پرش دما بر پارامترهای مختلف دینامیک سیال و انتقال حرارت بررسی شده است. به علاوه روابط مهندسی برای تغییرات ضریب پسا و عدد نوسل بر حسب عدد رینولدز و نودسن ارائه شده است.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

طرحواره مسئله مورد بررسی، شبکه و شرایط مرزی در شکل ۱ ارائه شده است. جریان یکنواخت در جهت مثبت X از روی یک کره جامد صلب تک دما عبور می‌کند. به دلیل پائین بودن اعداد رینولدز مورد بررسی ($10 \leq Re \leq 100$) مسئله دو بعدی با تقارن محوری در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم شامل معادله پیوستگی، مومنتوم و انرژی برای جریان آرام تراکم ناپذیر سیال نیوتنی با خواص ثابت هستند. شبکه در مجاورت سطح کره با ضریب انبساط در جهت r به دلیل تغییرات شدید در این ناحیه ریز شده است. مرز خارجی حوزه حل به دو قسمت جریان ورودی (از نقطه سکون جلویی تا θ_{out}) و جریان خروجی از θ_{out} تا نقطه سکون پشت کره تقسیم شده است. زاویه خروج (θ_{out}) در محدوده اعداد رینولدز مورد بررسی با توجه به تجربه دیگر محققان [۲۸] و همچنین نویسندگان این مقاله [۲۹] 120 درجه در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در قسمت ورودی مرز خارجی بصورت سرعت یکنواخت ورودی و در قسمت خروجی مرز خارجی بصورت گرادیان صفر متغیرهای مسئله در جهت شعاعی در نظر گرفته شده است. روی محور افقی شرط مرزی تقارن در نظر گرفته شده است. همچنین روی سطح کره، در حالت عدم لغزش شرط مرزی سرعت صفر و تساوی دمای کره و دمای سیال می‌باشد. شرط مرزی سطح کره در حالت

نودسن و وبر^۱ [۱۹] انجام شد و پارامتر A بصورت تابعی از عدد نودسن به شکل زیر ارائه گردید:

$$A = \alpha + \beta \exp\left(\frac{-\gamma}{Kn}\right) \quad (۲)$$

که ضرایب α ، β و γ بصورت تجربی تعیین می‌شوند. از آن زمان محققان مختلفی برای ارائه ضرایب تصحیح بر مبنای فرم ارائه شده توسط کانینگهام اما با ضریب A بصورت تابعی از عدد نودسن، تلاش کرده‌اند. میلیکان [۲۰] با استفاده از آزمایش معروف سقوط قطرات روغن خود در هوا با طول مسیر آزاد 0.094 میکرومتر و با استفاده از ذرات با اندازه‌های مختلف، حوزه $0.5 < Kn < 134$ را مورد بررسی قرار داد. آلن و راب [۲۱] از ذرات کروی میکرونی پلی استیرن به منظور محاسبه ضریب تصحیح برای اعداد نودسن از 0.03 تا 7.2 استفاده کردند. پنج سال بعد ریدر [۲۲] به تعیین دقیق ضرایب α ، β و γ در محیط‌های مختلف گازی در حوزه $0.2 < Kn < 0.95$ پرداخت. کیم و همکارانش [۲۳] اخیراً با استفاده از ذرات پلاستیکی پلی استیرن (PSL^۲) به محاسبه ضریب تصحیح در فشارهای کم و اعداد نودسن زیاد پرداختند. آنها با استفاده از دستگاه تحلیلگر موبیلیتی نانو دیفرانسیل^۳ ضریب تصحیح را در حوزه $0.5 < Kn < 83$ تعیین کردند.

تمامی ضرایب تصحیحی که محققان نامبرده در بالا از آن برای ارائه نتایج خود استفاده کردند، بر پایه شکل کانینگهام می‌باشد که در آنها فرض بر این است که ضریب تصحیح تنها تابعی از عدد نودسن می‌باشد، تا اینکه اخیراً مشفق و همکارانش [۲۴] تاثیر عدد رینولدز را بر ضریب تصحیح به حساب آوردند. آنها برای اعداد نودسن در بازه $0.01 \leq Kn \leq 0.1$ و در حوزه جریان استوکس $0 < Re < 1$ ضریب تصحیحی بر حسب اعداد نودسن و رینولدز ارائه کردند. البته باید یادآوری کرد که برای جریان تراکم ناپذیر لغزشی استوکس (عدد رینولدز بسیار کوچک تر از یک) حول یک کره جامد، حل تحلیلی توسط امرسون و باربر ارائه شده است [۲۵].

اما در بسیاری از کاربردها عدد رینولدز ذره فراتر از حوزه جریان استوکس می‌باشد. سرعت ذرات در کاربردهائی همچون تزریق قطرات سوخت در سیستم‌های احتراقی [۲۶] و یا خشک کردن توسط اسپری^۴ [۲۷] به بیش از ۵۰ متر بر ثانیه می‌رسد. در این صورت، ذره علاوه بر اینکه در رژیم لغزش می‌باشد، عدد رینولدز آن در حوزه اعداد رینولدز متوسط ($1 \leq Re \leq 100$) قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، ذره ای با قطر 7 میکرون را در نظر

^۱Knudsen and Weber

^۲Polystyrene latex

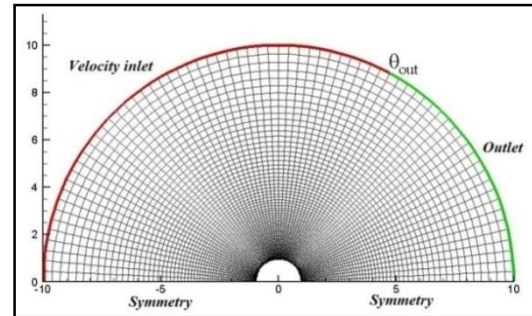
^۳Nano-differential mobility analyzer (NDMA)

^۴Spray drying

^۵Velocity slip

^۶Temperature jump

وجود لغزش بعد از بیان الگوریتم حل عددی توضیح داده خواهد شد.



شکل ۱- شبکه بندی حوزه حل و شرایط مرزی

۳- الگوریتم حل عددی

یکی از مشکلاتی که در حل معادلات ناویر-استوکس در جریان‌های تراکم ناپذیر با اعداد ماخ کوچک وجود دارد، محاسبه میدان فشار است، زیرا یک معادله مستقل زمانی برای محاسبه فشار وجود ندارد. معادلات حاکم شامل معادله پیوستگی، دو معادله مومنتوم و معادله انرژی جهت تعیین چهار مجهول u ، v ، T و P می‌باشند. برای محاسبه توزیع زمانی فشار، معادله‌ای صریح که شامل عبارت فشار باشد، وجود ندارد. بنابراین باید از روشی دیگر برای تعیین فشار استفاده کرد. در اینجا از یک روش مشابه Projection استفاده شده است که اولین بار توسط چورین^۱ از دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۸ ارائه شد [۳۰]. این روش یک روش حل دو مرحله ایست. در مرحله اول معادلات مومنتوم با استفاده از میدان فشار مرحله قبل (در اولین گام زمانی با استفاده از حدس اولیه) حل می‌شوند. در مرحله دوم تصحیح کننده‌های فشار و سرعت با یک معادله پواسون محاسبه و حوزه فشار و سرعت تصحیح می‌شوند [۳۰]. همچنین گسسته-سازی جملات جابجائی بصورت تفاضل مرکزی انجام شده است.

۴- شرط مرزی لغزش / پرش دما

ماکسول [۳۱] سرعت لغزش مرتبه اول برای یک گاز ایده آل تک اتمی را به گرادیان سرعت روی جدار مرتبط کرده و آن را به شکل زیر ارائه کرد:

$$u_s = u_w + \left(\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) (\lambda) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (3)$$

که در این رابطه، u مولفه سرعت موازی با دیوار، λ طول مسیر آزاد مولکول‌های سیال، n جهت عمود بر سطح، σ_v ضریب انطباق مومنتوم مماسی^۲ و زیرنویس s نشان‌دهنده سرعت لغزش و زیرنویس w مربوط به دیواره می‌باشد.

به طور مشابه با سرعت، در فصل مشترک، دمای گاز با دمای جامد برابر نبوده و این اختلاف متناسب با گرادیان دمای موضعی در جهت عمود بر سطح می‌باشد. مقدار پرش دما توسط اسمولوچفسکی^۳ [۳۲] محاسبه و به شکل زیر ارائه شده است:

$$T_s = T_{wall} + \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\lambda}{Pr} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \quad (4)$$

که در آن Pr عدد پرنتل و γ نسبت گرمای ویژه در فشار ثابت به گرمای ویژه در حجم ثابت سیال در فاز گاز و σ_T ، ضریب انطباق حرارتی^۴ می‌باشد. در مرجع [۱۶] برای برخی از جامدات و سیالات کاربردی مقدار σ_T و σ_v آورده شده است که برای اکثر آنها ضرائب انطباق مومنتوم و انطباق حرارتی عددی بسیار نزدیک به یک می‌باشند. در بررسی حاضر نیز مقدار یک برای این ضرائب در نظر گرفته شده است.

۵- استقلال نتایج از شبکه و اعتبارسنجی حل عددی

به منظور بررسی استقلال نتایج از شبکه و اعتبارسنجی حل، نتایج بدست آمده برای ضریب پسا و عدد نوسل در جدول ۱ به اداء چند شبکه با تعداد گره مختلف و در عدد رینولدز 50 آورده شده است. مقادیر ضریب درگ کل و عدد نوسل متوسط در مرجع [۱۴] به ترتیب برابر با 1.57 و 6.01 ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد گره از 61×61 به 91×91 میزان تغییرات ضریب پسا و عدد نوسل کمتر از ۲ درصد می‌باشد. با توجه به این مطلب، شبکه با 71×71 گره از لحاظ دقت قابل قبول نتایج و در عین حال هزینه محاسباتی کم به عنوان کارآمدترین شبکه انتخاب گردید. همچنین اثر شعاع خارجی محیط حل که در اینجا ده برابر شعاع کره در نظر گرفته شده است، مورد بررسی قرار گرفته و استقلال نتایج از آن مشاهده شد.

جدول ۱- بررسی اثر تعداد گره های شبکه بر نتایج حل عددی

در رینولدز ۵۰

Grid	C_{Df}	C_{Dp}	C_D	Nu
41×41	۰.۸۱	۰.۶۵	۱.۴۶	۵.۵۳
۵۱×۵۱	۰.۸۵	۰.۶۷	۱.۵۲	۵.۷۳
۶۱×۶۱	۰.۸۸	۰.۶۸	۱.۵۶	۵.۸۵
۷۱×۷۱	۰.۹۰	۰.۶۸	۱.۵۸	۵.۹۱
۸۱×۸۱	۰.۹۱	۰.۶۸	۱.۵۹	۵.۹۵
۹۱×۹۱	۰.۹۱	۰.۶۸	۱.۵۹	۵.۹۶

³Smoluchowski

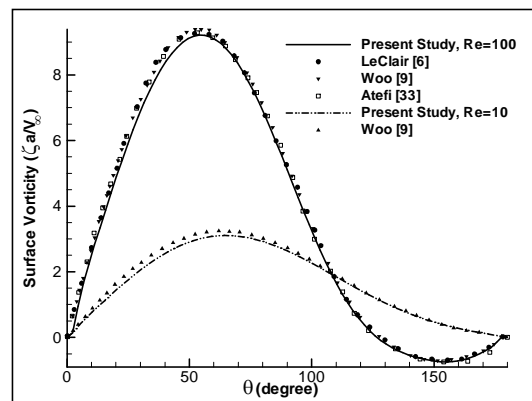
⁴Thermal accommodation coefficient

¹Chorin

²Momentum accommodation coefficient

بین ببرد. در شکل ۴ طول دنباله بدون بعد شده (طول ناحیه دنباله تقسیم بر قطر) بر حسب عدد رینولدز در اعداد نودسن مختلف رسم شده است. در حالت عدم لغزش ($Kn=0$)، آغاز پیدایش ناحیه دنباله عدد رینولدز 20 می‌باشد، اما همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد نودسن، ظهور دنباله در اعداد رینولدز بالاتری اتفاق می‌افتد. به بیان دیگر، لغزش باعث از بین رفتن دنباله در اعداد رینولدز بسیار بزرگتری نسبت به حالت عدم لغزش شده است، تا جایی که در عدد نودسن 0.1 حتی در رینولدز ۵۰ هیچ ناحیه دنباله‌ای وجود ندارد. به علت این که لغزش گرادیان‌های سرعت روی سطح کره را کاهش می‌دهد، می‌تواند تاثیر مستقیمی بر تولید ورتیسیتته در سطح کره داشته باشد. در شکل ۵ توزیع ورتیسیتته روی سطح کره در اعداد نودسن مختلف در دو عدد رینولدز 10، 100 رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد نودسن به علت کاهش بیشتر گرادیان‌های سرعت، میزان کاهش ورتیسیتته افزایش می‌یابد. نقطه تغییر علامت ورتیسیتته نشان دهنده نقطه جدایش جریان از سطح کره است، که در رینولدز 100 در تمامی نودسن‌های مورد بررسی اتفاق افتاده است. به علاوه با افزایش عدد نودسن، نقطه تغییر علامت ورتیسیتته در عدد رینولدز 100 به سمت نقطه سکون پشتی منتقل می‌شود. انتقال نقطه جدایش به عقب، کوچکتر شدن ناحیه دنباله را نیز بیان می‌کند که شکل ۳ نیز این مطلب را نشان می‌دهد. به علاوه در شکل ۵ مشاهده می‌شود که نقطه حداکثر ورتیسیتته با افزایش عدد نودسن به سمت نقطه سکون پشتی متمایل می‌شود. علت این امر را با توجه به توزیع سرعت لغزش روی سطح کره بهتر می‌توان توضیح داد که در شکل ۶ رسم شده است. شکل ۶ توزیع سرعت لغزش روی سطح کره، که با استفاده از سرعت جریان در دوردست بدون بعد شده است، را در دو عدد رینولدز نشان می‌دهد. همانطور که در ارتباط با شکل ۵ بیان شد، با افزایش عدد نودسن نقطه جدایش که نشان دهنده وجود یک ناحیه پرفشار در مقابل جریان است، به سمت نقطه سکون پشتی متمایل می‌شود. در نتیجه سیال مسیر بیشتری روی سطح کره برای بازیابی انرژی جنبشی خود دارد و باعث می‌شود که نقطه حداکثر سرعت نیز به سمت نقطه سکون پشتی متمایل شود. انتظار می‌رود نقطه حداکثر سرعت لغزشی روی سطح، متناظر با نقطه حداکثر گرادیان سرعت باشد و در نتیجه دارای حداکثر ورتیسیتته باشد که مقایسه نقاط حداکثر سرعت لغزشی در شکل ۵ با نقاط حداکثر ورتیسیتته در شکل ۶ نیز این مطلب را تأیید می‌کند. به علاوه سرعت لغزش با افزایش عدد رینولدز به علت افزایش گرادیان سرعت روی سطح افزایش می‌یابد (شکل ۶).

تغییرات ورتیسیتته بدون بعد روی سطح کره در دو عدد رینولدز 10، 100 در شکل ۲ رسم شده و با نتایج دیگر محققان مقایسه شده است. این شکل نیز نشان دهنده تطابق بسیار خوب نتایج حل عددی حاضر با نتایج دیگر محققان می‌باشد. نقطه جدایش متناظر با نقطه تغییر علامت ورتیسیتته سطحی است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، در رینولدز 10 که جدایش لایه مرزی وجود ندارد، تغییر علامت ورتیسیتته نیز نداریم، اما در رینولدز 100 نقطه تغییر علامت ورتیسیتته در زاویه 127 درجه از نقطه سکون جلوئی می‌باشد.

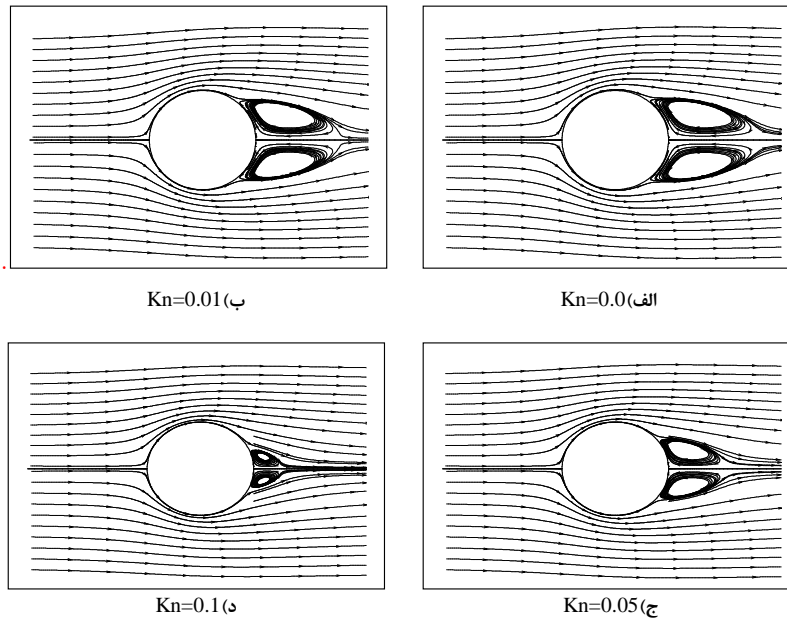


شکل ۲- توزیع ورتیسیتته بر روی سطح کره در مقایسه با نتایج دیگر محققان در رینولدز 10، 100

نتایج

پس از اعتبار سنجی حل عددی صورت گرفته، به بررسی جریان حول کره با وجود شرط مرزی لغزش سرعت و پرش دما می‌پردازیم. طول ناحیه دنباله، توزیع ورتیسیتته سطحی، ضریب پسا، توزیع سرعت لغزش، عدد نوسل و پرش دما روی سطح کره از جمله پارامترهایی هستند که مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در شکل ۳ خطوط جریان اطراف کره در حالت عدم لغزش (عدد نودسن صفر) و در سه وضعیت لغزش مختلف (اعداد نودسن 0.1, 0.05, 0.01) رسم شده است.

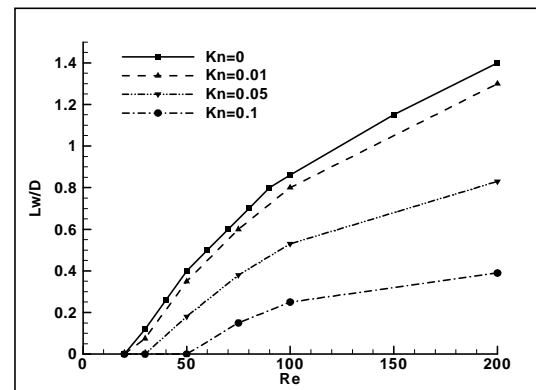
به منظور نمایش بهتر تأثیر لغزش بر طول ناحیه دنباله، عدد رینولدز 100 انتخاب شده است که دارای طول ناحیه دنباله‌ی بزرگتری می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد نودسن، به علت وجود سرعت لغزش و افزایش مومنوم سیال روی سطح کره، سیال دیرتر از سطح جدا شده و در نتیجه طول ناحیه دنباله کاهش می‌یابد. شدت این کاهش به عدد نودسن وابسته است و با افزایش عدد نودسن میزان کاهش طول ناحیه دنباله بیشتر می‌شود. این کاهش طول دنباله در رینولدزهای کوچک‌تر می‌تواند به اندازه‌ای باشد که کاملاً ناحیه دنباله را از



شکل ۳- خطوط جریان حول کره در عدد رینولدز 100 به ازاء اعداد نودسن مختلف

$$CD_r = \frac{\iint \tau_r dA_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A_p} \quad (6)$$

لازم به ذکر است که در حالت عدم وجود لغزش، ضریب پسای شعاعی صفر می‌باشد. در شکل ۷ مقدار مولفه‌های مختلف نیروی پسا، یعنی ضرائب پسای اصطکاکی (CD_f)، فشاری (CD_p) و شعاعی (CD_r) بر حسب عدد رینولدز در سه عدد نودسن مختلف رسم شده‌اند. پسای اصطکاکی و فشاری همواره با افزایش عدد نودسن و رینولدز کاهش پیدا می‌کنند، درحالی‌که با افزایش عدد نودسن ضریب پسای شعاعی افزایش پیدا می‌کند. ضریب پسای کلی بر حسب عدد رینولدز در شکل ۸ در چند عدد نودسن مختلف رسم شده است. روند کاهشی ضریب پسا با افزایش عدد رینولدز در تمامی اعداد نودسن یکسان می‌باشد، اما مقدار کاهش آن به عدد رینولدز و نودسن وابسته می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز درصد کاهش ضریب پسا به ازاء یک عدد نودسن یکسان بیشتر می‌باشد بطوریکه در رینولدز 10، میزان کاهش ضریب پسای کلی در عدد نودسن 0.1 نسبت به حالت عدم لغزش 20 درصد و در رینولدز 100 این کاهش به 31 درصد می‌رسد. علاوه بر معادله مومنتوم، در کار حاضر معادله انرژی نیز بطور همزمان با مومنتوم حل شده است. به منظور اعتبارسنجی حل عددی انجام شده در حوزه دما، مقادیر نوسل موضعی روی سطح کره در سه عدد رینولدز 10، 30، 100 در عدد پرنتل 0.71 با نتایج وو [۹] در شکل ۹ مقایسه شده است. حداکثر مقدار عدد نوسل در نقطه سکون جلوئی اتفاق می‌افتد، پس از آن روند کاهشی داشته تا اینکه در ناحیه جدایش به دلیل وجود



شکل ۴- تغییرات طول ناحیه دنباله بدون بعد بر حسب عدد رینولدز در مقادیر مختلف عدد نودسن

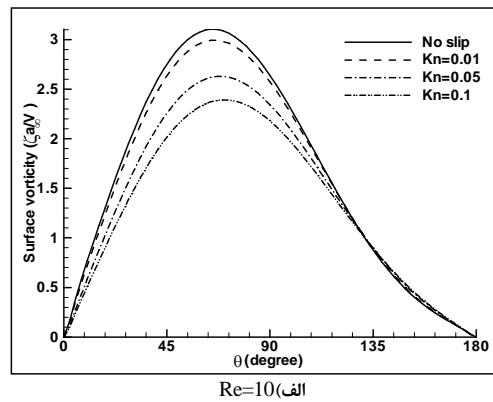
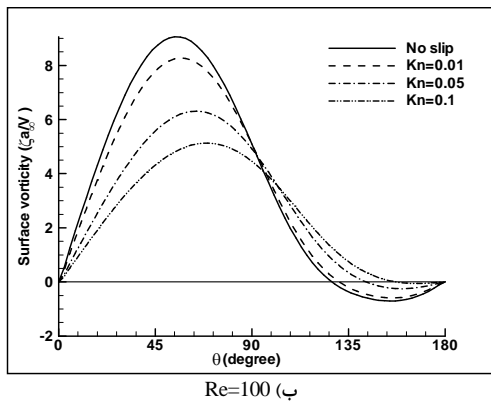
در حالت عدم لغزش، نیروی پسای کره ناشی از دو مولفه پسا می‌باشد، پسای اصطکاکی که ناشی از وجود تنش برشی روی سطح کره است و پسای فشاری که ناشی از متفاوت بودن فشار نقطه سکون جلوئی و پشتی کره می‌باشد. لغزش سرعت به علت کاهش گرادیان سرعت روی سطح کره، نیروی پسای اصطکاکی را کاهش می‌دهد. همچنین لغزش سرعت با کوچک کردن ناحیه دنباله، باعث کاهش نیروی پسای فشاری نیز می‌شود.

اما در حالت وجود لغزش، مولفه‌ای دیگر از تنش روی سطح کره ظاهر می‌شود که منجر به نیروی پسائی معروف به پسای شعاعی می‌گردد و از مولفه تنش عمودی روی سطح کره ناشی می‌شود و برابر است با [۲۵]:

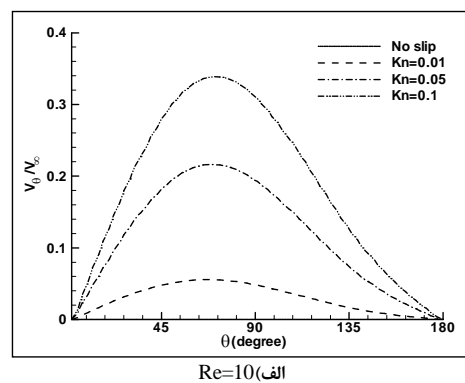
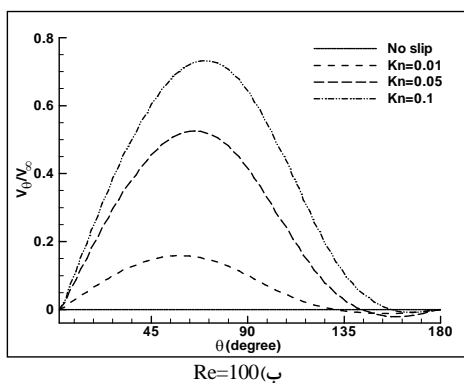
$$\tau_r = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (5)$$

پرش دما بصورت بدون بعد $(\theta_s = \theta_w - \theta_{g_w})$ روی سطح کره در اعداد رینولدز 10 و 100 رسم شده است. در این رابطه θ دمای بدون بعد است که بصورت $\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ تعریف شده است. T_w دمای دیواره و T_∞ دمای جریان سیال دور دست می باشد. θ_w دمای بدون بعد روی سطح کره است که با توجه به تعریف برابر با یک است و θ_{g_w} دمای بدون بعد اولین لایه سیال روی سطح کره است. واضح است که در حالت عدم لغزش مقدار پرش دما صفر است، زیرا دمای اولین لایه سیال با دمای دیواره برابر است. اما با توجه به شکل ۱۱ همانطور که انتظار می رود، حداکثر مقدار پرش دما به دلیل وجود حداکثر گرادیان دما در نقطه سکون جلوئی اتفاق افتاده است.

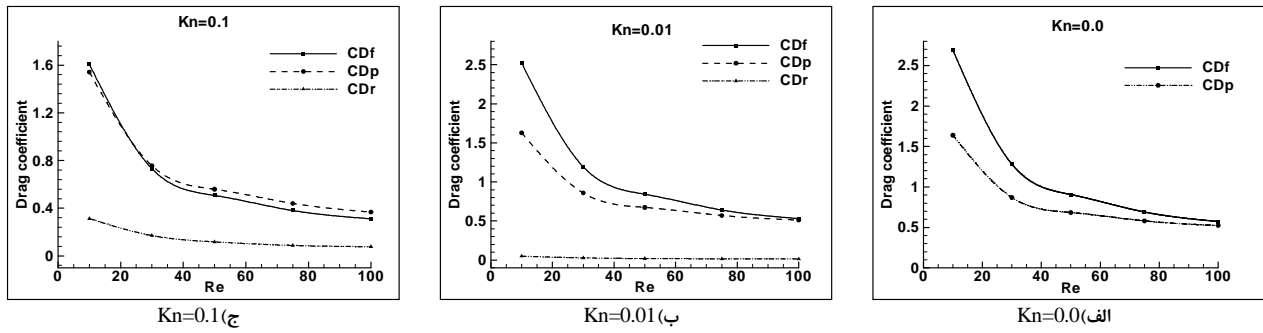
گردابه در این ناحیه، مجدداً مقداری افزایش پیدا می کند. بطور مشابه با کاهشی که لغزش سرعت در ضریب پسا ایجاد می کند، پرش دما نیز با کاهش گرادیان دما روی سطح کره، باعث کاهش نرخ انتقال حرارت می شود. در شکل ۱۰ توزیع نوسل محلی روی سطح کره در سه عدد رینولدز به ازاء مقادیر مختلف عدد نودسن در پرنتل ۱ رسم شده است. با افزایش عدد رینولدز در یک نودسن مشخص، میزان کاهش عدد نوسل افزایش پیدا می کند. مقدار کاهش متناسب با مقدار موضعی گرادیان دما می باشد، به همین علت در نقطه سکون جلوئی مقدار کاهش عدد نوسل حداکثر می باشد. عدد نوسل متوسط در حالت وجود پرش دما، تابعی از عدد رینولدز، پرنتل و نودسن می باشد (در حالت عدم لغزش تنها تابع رینولدز و پرنتل است). در شکل ۱۱ توزیع مقدار



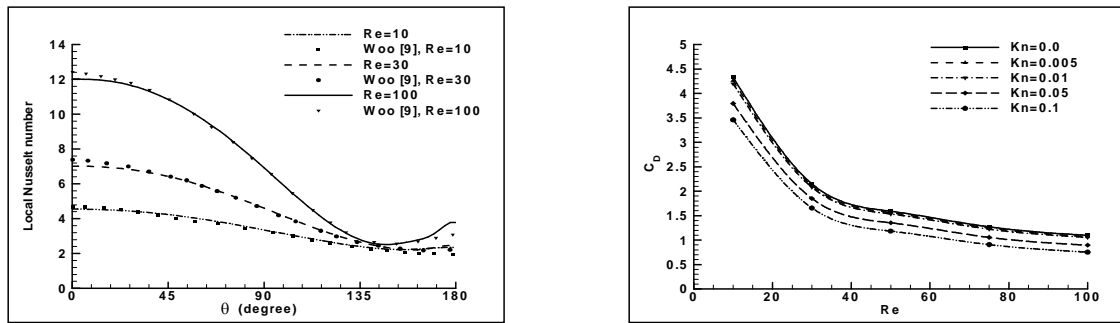
شکل ۵- تغییرات ورتیسیتی بر روی سطح کره در اعداد رینولدز 10, 100 به ازاء مقادیر مختلف عدد نودسن



شکل ۶- توزیع سرعت لغزش بر روی سطح کره در دو عدد رینولدز 10, 100 به ازاء اعداد نودسن مختلف

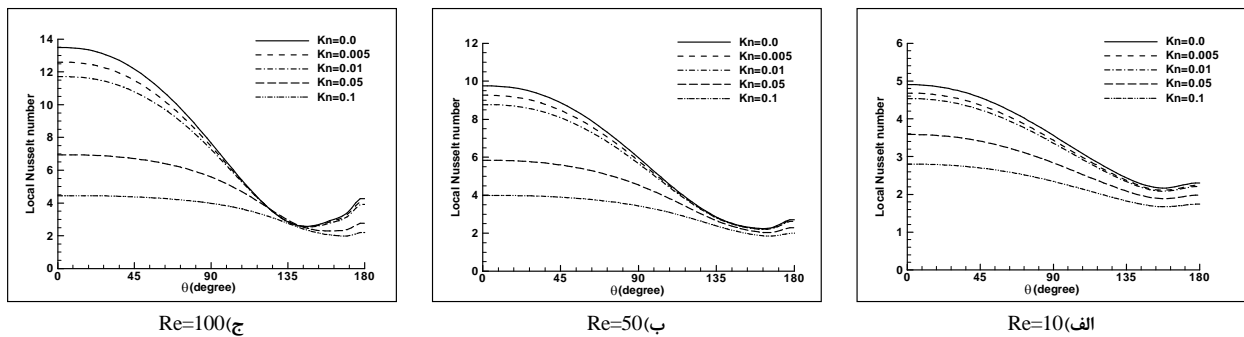


شکل ۷- تغییرات مولفه های پسا بر حسب عدد رینولدز در اعداد نودسن مختلف

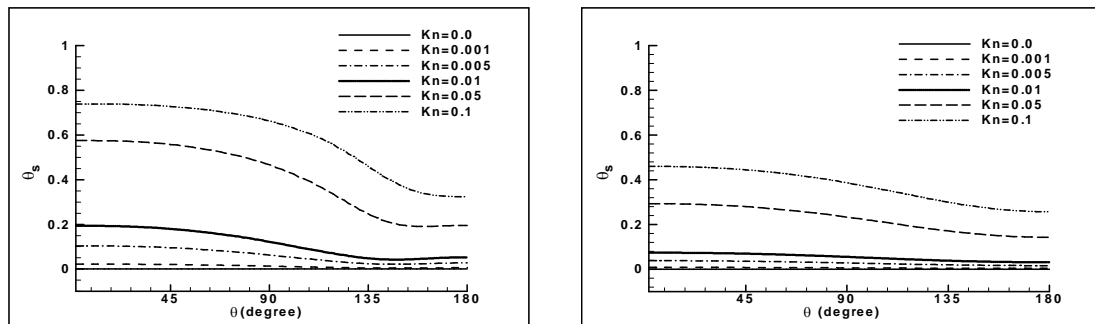


شکل ۹- مقایسه عدد نوسل محلی روی سطح کره با نتایج عددی وو [۹] در $Pr=0.71$

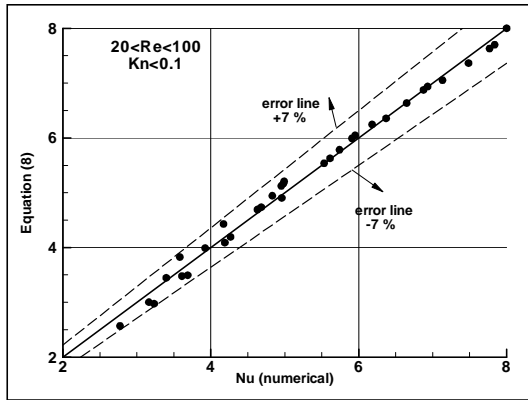
شکل ۸- تغییرات ضریب پسای کلی بر حسب عدد رینولدز در اعداد نودسن مختلف



شکل ۱۰- توزیع نوسل محلی بر روی سطح کره در اعداد رینولدز 10, 50, 100 به ازاء مقادیر مختلف عدد نودسن در $Pr=1.0$



شکل ۱۱- توزیع پرش دمای بدون بعد در اعداد رینولدز 10, 100 به ازاء مقادیر مختلف عدد نودسن در $Pr=1.0$



شکل ۱۳- مقایسه اعداد نوسل بدست آمده از حل عددی با مقادیر حاصل از رابطه برازش شده (رابطه ۸)

۶- جمع بندی

در مقاله حاضر جریان تراکم ناپذیر حول یک کره تک دما در حوزه لغزش با شبیه سازی عددی بررسی شد. مهمترین نتایج در جریان سیال و انتقال حرارت از کره در حوزه لغزش عبارتند از:

- با افزایش عدد نودسن طول ناحیه دنباله کوچک می-شود، بطوریکه در عدد نودسن 0.1 حتی در رینولدز 50 هیچ ناحیه دنباله ای وجود ندارد.
- سرعت لغزش با افزایش عدد نودسن و رینولدز افزایش می یابد، که با افزایش عدد نودسن نقطه حداکثر سرعت لغزشی به سمت نقطه سکون پشتی متمایل می گردد.
- تولید ورتیسیتیته روی سطح کره به دلیل کاهش گرادیان های سرعت با افزایش عدد نودسن کاهش پیدا می کند.
- از آنجا که پرش دما مشابه با یک مقاومت تماسی در سطح کره عمل می کند، عدد نوسل با افزایش عدد نودسن کاهش پیدا می کند. حداکثر پرش دما در نقطه سکون جلویی اتفاق می افتد که به دلیل وجود حداکثر گرادیان در این نقطه می باشد.
- روابطی به منظور استفاده در کاربردهای عملی برای محاسبه ضریب پسا و عدد نوسل در حوزه لغزش (اعداد نودسن کوچکتر از 0.1) بر حسب اعداد رینولدز و نودسن ارائه شده است.

مراجع

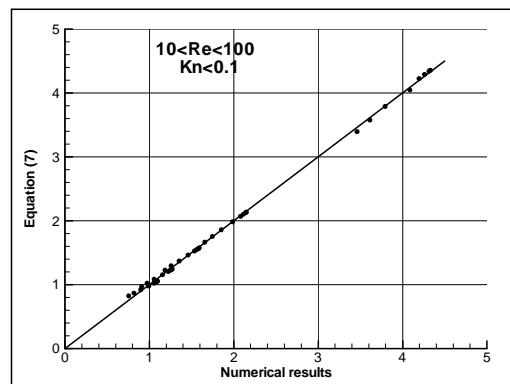
- [1] Stokes, G. G., "On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums", Trans. Cambridge Philos. Soc., 9, pp. 8-106, 1851.

با توجه به آنچه تا اینجا مشاهده شد، ضریب پسا در حوزه لغزش تابعی از عدد رینولدز و نودسن و مقدار عدد نوسل متوسط تابعی از اعداد رینولدز، پرنتل و نودسن می باشد. استخراج رابطه ای برای ضریب پسا بر حسب اعداد رینولدز و نودسن می تواند در بسیاری از کاربردها بسیار مفید باشد. در مورد عدد نوسل با توجه به اینکه این عدد تابعی از سه عدد بدون بعد رینولدز، پرنتل و نودسن می باشد و برازش رابطه ای بر حسب این سه عدد پیچیده می باشد، در این مقاله در یک عدد پرنتل ثابت اقدام به استخراج رابطه ای برای عدد نوسل متوسط شده است. ضریب پسا بر حسب اعداد رینولدز و نودسن بصورت زیر می باشد:

$$C_D = \left(-0.018 + \frac{4.95}{-0.898 + \sqrt{Re}} \right) \left(\frac{1.632Kn + 1.491}{3.142Kn + 0.742} \right) \quad (7)$$

$$10 \leq Re \leq 100, \quad Kn \leq 0.1$$

مشابه با ضریب پسا، رابطه ای نیز برای عدد نوسل به ازاء عدد پرنتل ۱ ارائه شده است. تغییرات شدید عدد نوسل در بازه اعداد رینولدز 10 تا 100 مانع از برازش رابطه ای با دقت قابل قبول شد. به همین علت سعی بر آن شد تا با کوچک کردن بازه ی عدد رینولدز، به رابطه ای با دقت قابل قبولی دست پیدا کرد.



شکل ۱۴- مقایسه مقادیر ضریب پسا از حل عددی با مقادیر حاصل از رابطه برازش شده (رابطه ۷)

با محدود کردن حوزه اعداد رینولدز به اعداد بین 20 و 100 این امکان فراهم شد تا رابطه ای با حداکثر خطای 6.8 درصد را برازش کنیم (رابطه ۸). این رابطه به ازاء اعداد نودسن کوچکتر از 0.1 دارای اعتبار است. در شکل ۱۳ مقایسه نتایج بدست آمده از حل عددی و مقادیر حاصل از رابطه ای ارائه شده نشان داده شده است.

$$Nu = \left(2.215 + 0.391Re^{0.544} \right) \left(\frac{40.190Kn - 38.558}{-281.652Kn - 35.064} \right) \quad (8)$$

$$20 \leq Re \leq 100, \quad Kn \leq 0.1$$

- [20] Millikan, R.A., "The general law of fall of a small spherical body through a gas and its bearing upon the nature of molecular reflection from surfaces", *Phys. Rev.* 22, pp. 1–23, 1923.
- [21] Allen, M.D. and Raabe, O.G., "Slip correction measurements of spherical solid aerosol particles in an improved Millikan apparatus", *Aerosol Sci. Technol.* 4, pp. 269, 1985.
- [22] Rader, D.J., "Momentum slip correction factor for small particles in nine common gases", *J. Aerosol Sci.* 21, pp. 161–168, 1990.
- [23] Kim, J.H., Mulholland, G.W., Kukuck, S.R. and Pui, D.Y.H., "Slip correction measurements of certified PSL nanoparticles using a nanometer differential mobility analyser (Nano-DMA) for Knudsen number from 0.5 to 83", *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* 110, pp. 31-54, 2005.
- [24] Moshfegh, A., Shams, M., Ahmadi, G. and Ebrahimi, R., "A novel surface-slip correction for micro particles motion", *J Colloids and Surfaces A: Physicochem. and Eng. Aspects* 345, pp. 112-120, 2009.
- [25] Barber, R.W. and Emerson, D.R., "Analytic Solution of Low Reynolds Number Slip Flow Past a Sphere, Centre for Microfluidics", Department of Computational Science and Engineering, CLRC Daresbury Laboratory, Daresbury, Warrington, 2001.
- [26] Pitcher G., Wigley G. and Saffman M., "Velocity and drop size measurements in fuel sprays in a direct injection diesel engine, Particle and Particle Systems Characterization", vol. 7, pp. 160-168, 1990.
- [27] Fletcher, D.F., Guo, B., Harvie, D.J.E., Langrish, T.A.G., Nijdam, J.J. and Williams, J., "What is important in the simulation of spray dryer performance and how do current CFD models perform?", *Applied Mathematical Modeling*, 30, pp. 1281–1292, 2006.
- [28] Dwyer, H. A., "Calculations of droplet dynamics in high temperature environments", *Progress in Energy & Combustion Science*, vol. 15, pp. 131-158, 1989.
- [29] Niazmand, H., "Numerical study of thermocapillary effects on transient droplet heating and vaporization", Ph.D. Thesis, University of California, Davis, 1993.
- [30] Chorin, A. J., "Numerical solution of Navier-Stokes equations", *Math. Computation*, vol. 22, pp. 745-762, 1968.
- [31] Maxwell, J.C., "On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature", *Philos. Trans. Roy. Soc. Part1*, 170, pp. 231-256, 1879.
- [32] Von Smoluchowski, M., "Über warmeleitung in verdunnten gasen", *Ann. Phys. Chem.* 64, pp. 101-130, 1898.
- [33] Atefi, G.H., Niazmand, H. and Meigounpoory, M.R., "Numerical analysis of 3-D flow past a stationary sphere with slip conditions at low and moderate Reynolds numbers", *J. Dispersion Science and Technology*, Vol. 28, pp. 591-6902, 2007.
- [2] Tommotica, S. and Aoi, T., "The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers", *Quart. J. Mech. And Applied Math.*, vol. 3, 1950.
- [3] Hadamard, J. S., "Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux", *C R. Acad. Sci.* 152, pp. 1735-1738, 1911.
- [4] Rybczynski, W., "Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium", *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett., Cl. Sci. Math. Nat.*, pp. 40-46, 1911.
- [5] LeClair, B. P., "Viscous flow in multi particle systems at intermediate Reynolds numbers", Ph.D. Thesis, McMaster Univ., Hamilton, Ontario, 1970.
- [6] LeClair, B. P., Hamielec, A. E., and Pruppacher, H. R., "A numerical study of the drag of a sphere at low and intermediate Reynolds numbers" *J. Atmos. Sci.* 27, pp. 308-315, 1970.
- [7] Masliyah, J. H., "Symmetric flow past orthotropic bodies: single and clusters", Ph.D. Thesis, Univ. of British Columbia, Vancouver, 1970.
- [8] Ihme, F., Schmidt-Traub, H. and Brauer, H., "Theoretical studies on mass transfer at and flow past spheres", *Chem.-Ing.-Tech.* 44, pp. 306-313, 1972.
- [9] Woo, S.W., "Simultaneous free and forced convection around submerged cylinders and spheres", Ph.D. Thesis, McMaster Univ., Hamilton, Ontario, 1971.
- [10] Taneda, S., "Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers", *J. Phys. Soc. Jpn.* 11, pp. 1104-1108, 1956.
- [11] Seeley, L. E., "An experimental investigation of laminar and turbulent flow around a sphere at intermediate Reynolds numbers", Ph.D. Thesis, Univ. of Toronto, 1972.
- [12] Roshko, A., "Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number", *J. Fluid Mech.* 10, pp. 345-356, 1961.
- [13] Roshko, A., "Transition in Incompressible Near-Wakes", *Phys. Fluids* 10, 5181-5183, 1967.
- [14] Clift, R., Grace, J.R. and Weber, M.E., "Bubbles, drops, and particles", Academic Press, New York, 1978.
- [15] Sirignano, W. A., "Fluid dynamics and transport of droplets and sprays", Cambridge University Press, UK, 1999.
- [16] Karniadakis, G., Beskok, A. and Aluru, N., "Microflows and Nanoflows, Fundamentals and Simulation", Springer, 2005.
- [17] Cunningham, E., "On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium", *Proc. R. Soc. Lond., A*, 83, pp. 436-448, 1910.
- [18] Millikan, R.A., "The isolation of an ion, a precision measurement of its charge, and the correction of Stokes's law", *Science* 32, pp. 436–448, 1910.
- [19] Knudsen, M. and S. Weber, "Atmospheric resistance to the slow motion of small spherical balls", *Ann. D. Phys.* 36, pp. 981, 1911.