

ارائه مدل پیوسته جدید برای تحلیل ارتعاشات عرضی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار با استفاده از اصل Hu-Washizu

موسی رضائی دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز
وحید عرب‌ملکی دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

چکیده

در این پژوهش، مدل پیوسته جدیدی برای بررسی رفتار ارتعاش عرضی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار ارائه شده است. اثر ترک به صورت یک اغتشاش پیوسته مدل شده است که علاوه بر تأثیر در میدان تنش و کرنش، بر میدان جابه‌جایی نیز اثر می‌کند. با استفاده از اصل Hu-Washizu معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت و شرایط مرزی متناظر استخراج گردیده است. به منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی، معادله حرکت برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها با استفاده از روش گالرکین حل شده است. در نهایت، تأثیر پارامترهای ترک بر پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها بررسی شده است. صحت نتایج به دست آمده با استفاده از نتایج تجربی موجود در ادبیات فن به اثبات رسیده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی می‌کند.

کلمات کلیدی: آنالیز ارتعاشی، مدل پیوسته، تیر ترک‌دار، اصل Hu-Washizu، تابع اغتشاش ترک

A New Continuous Model for Transverse Vibration Analysis of a Cracked Beam by Using Hu-Washizu Variational Principle

M. Rezaee Associate Professor, Mechanical Engineering Department, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

V. A. Maleki M.Sc student, Mechanical Engineering Department, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

Abstract

In this research, a new continuous model for vibration analysis of a simply support cracked Euler-Bernouli beam is proposed. The effect of the crack on the stress, strain and displacement field is modeled as a continuous disturbance function. The equation of motion and the corresponding boundary conditions for bending vibration of a cracked beam with an open edge crack, are derived by using Hu-Washizu variational principle. By employing the Galerkin method, the natural frequencies and mode shapes are obtained, and the influence of the crack parameters (crack depth and location) on the vibration behavior of the cracked beam is studied. The results have been validated by the experimental and theoretical data reported in the literature. There is a good agreement between the results obtained through the proposed method and those obtained from the reported experimental data.

Keywords: Vibration Analysis, Cracked Beam, Continous Model, Hu-Washizu Principle

۱- مقدمه

یکی از مسایل اساسی در سازه‌ها، ترک‌های ایجاد شده ناشی از خستگی می‌باشد که در صورت شناخته نشدن می‌تواند سبب بروز خسارت فاجعه‌باری شود. تحقیق در زمینه توانایی تحت نظر قرار دادن یک سازه و تعیین آسیب دیدگی‌های احتمالی آن در زودترین مرحله ممکن، مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. تحقیقات نشان می‌دهد که تحلیل ارتعاشی می‌تواند روش مؤثری در عیب‌یابی سازه‌ها باشد. از آنجایی که وجود ترک در سازه، باعث تغییر در مشخصه‌های ارتعاشی سازه می‌گردد، بدین ترتیب با اندازه‌گیری و تحلیل رفتار ارتعاشی سازه‌ها می‌توان به وجود عیب در آنها پی‌برد و از آسیب دیدگی‌های احتمالی سیستم در طی عملکرد آن جلوگیری کرد.

محققان متعددی اثرات عیب بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را مورد بررسی قرار داده‌اند. Dimarogonas [۱] خلاصه‌ای از اقدامات و تحقیقات انجام شده توسط سایر محققین در زمینه ارتعاش سازه‌های ترک‌دار را ارائه کرده است. بر اساس تحقیق مذکور روش‌های مختلف مدل‌سازی سازه‌های ترک‌دار را می‌توان به سه دسته تقسیم بندی کرد. دسته اول مدل‌های مبتنی بر روش‌های امان محدود هستند که در آنها اثر ترک به صورت کاهش سفتی موضعی در امان و یا امان‌های اطراف محدوده ترک ظاهر می‌شوند [۲-۶]. دسته دوم مدل‌های مبتنی بر انعطاف پذیری موضعی می‌باشد، که در این مدل‌ها دو جزء تقسیم شده تیر در محل ترک توسط فنر به طول بی‌نهایت کوچک و جرم ناچیز به هم متصل می‌شوند [۷-۱۲]. دسته سوم استفاده از مدل‌های پیوسته است که در آنها اثر ترک به صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود [۱۳-۲۳].

یکی از مدل‌های بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار که اخیراً رواج یافته است، استفاده از مدل پیوسته ترک می‌باشد. اولین بار Christides و Barr [۱۴] تئوری پیوسته را برای بررسی ارتعاش تیر اوپلر- برنولی یکنواخت که دارای یک یا چند جفت ترک متقارن بود ارائه کردند. آنها اثر ترک را به صورت یک تابع اغتشاش نمایی که در میدان تنش عمودی اعمال می‌شود مدل کرده و با استفاده از اصل Hu-Washizu [۲۴] معادله دیفرانسیل حرکت را استخراج کردند. در مدل آنها پارامتر مجهول تابع اغتشاش، با استفاده از مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج حاصل از تست‌های تجربی تعیین شده است، همچنین آنها دو فرض متفاوت و ناسازگار برای میدان جابه‌جایی و کرنش را در نظر گرفته‌اند که این عوامل سبب کاهش دقت مدل ارائه شده و محدودیت کاربرد آن در سازه‌های دیگر می‌باشد. Chondros و Dimarogonas [۱۸] از مدل مشابهی برای بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار استفاده کردند. اما آنها تابع اثر ترک را

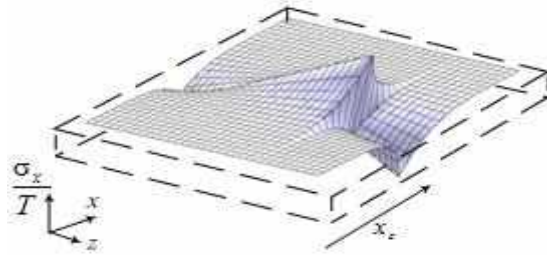
با استفاده از اصول انرژی و نظریه مکانیک شکست به دست آورده‌اند. Behzad و همکاران [۲۰] با مدل پیوسته ترک معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر برای ارتعاشات خمشی تیر اوپلر- برنولی دارای ترک باز را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند. Carneiro و Inman [۲۱] مدل پیوسته برای ارتعاش عرضی تیر تیموشنکو ترک‌دار را که شامل اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی است ارائه کردند. در سال‌های اخیر مدل ارائه شده Barr توسط Shen و Pierre [۱۵] مورد بازنگری قرار گرفته است، اما معادله حرکت استخراج شده توسط مدل آنها خود الحاق^۱ نمی‌باشد که این امر سبب به دست آمدن فرکانس‌های طبیعی موهومی پس از اعمال روش گالرکین به منظور حل معادله می‌شود. از آنجا که مطالعه در غیاب استهلاک صورت پذیرفته است بنابراین، فرکانس‌های طبیعی موهومی توجیه فیزیکی نخواهند داشت. همچنین در مدل آنها میدان جابه‌جایی محوری و مشتق آن به صورت مستقل از یکدیگر فرض شده است که باعث بروز خطا و کاهش دقت مدل می‌گردد.

به منظور رفع برخی از نقایص مدل‌های مشابه، در مقاله حاضر تئوری ارتعاش عرضی تیر اوپلر- برنولی ترک‌دار با مدل پیوسته ترک مورد بررسی قرار می‌گیرد. ترک به صورت لبه باز در نظر گرفته می‌شود و معادلات دیفرانسیل حرکت به همراه شرایط مرزی متناظر با استفاده از اصل Hu-Washizu استخراج می‌شود. میدان‌های جابه‌جایی و کرنش فرض شده در مدل‌های مشابه مورد بازنگری قرار می‌گیرد و تابع جدیدی برای میدان جابه‌جایی پیشنهاد می‌شود که باعث افزایش دقت مدل و همچنین به دست آمدن معادلات دیفرانسیل حرکت خود الحاق جدیدی می‌شود که امکان بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار در شکل مودهای بالاتر را با دقت بالایی فراهم می‌آورد. به منظور بررسی اثر پارامترهای ترک (موقعیت و عمق ترک) بر پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار، معادلات دیفرانسیل استخراج شده با استفاده از روش‌های تقریبی برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها حل می‌شوند در نهایت به منظور صحت‌گذاری بر دقت مدل ارائه شده، از نتایج تست‌های تجربی و نتایج تحلیلی موجود در ادبیات فن استفاده می‌شود. همچنین نتایج حاصل از مدل ارائه شده و مدل Shen و Pierre با نتایج تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده به طور قابل توجهی نسبت به مدل‌های مشابه بهبود یافته است و رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را با دقت مناسبی به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی می‌نماید.

^۱.Self Adjoint

۲- فرضیات سینماتیکی

محاسبه شده است. همان طوری که از فرضیات فوق مشاهده می‌شود، آنها از تأثیر ترک بر روی میدان جابه‌جایی محوری صرف‌نظر کرده‌اند که این عامل از آنجایی که خود میدان جابه‌جایی محوری نیز تحت تأثیر ترک قرار می‌گیرد باعث به وجود آمدن خطا و کاهش دقت مدل شده است.



شکل ۱- تابع اغتشاش ترک برای تنش عمودی $f(x, z)$

معادله دیفرانسیل استخراج شده توسط *Shen* و *Pierre* برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار که جزئیات آن در مرجع [۱۵] بیان شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$(I+L_1-K_1)Q_1 w^{(iv)} + [2(I+L_1-K-K_1)Q_1' + (2L_3-K_2+L_2)Q_1] w''' + [(I+L_1-K_1)Q_1'' + (2L_3-K_2+L_2)Q_1' + (L_3-K'')Q_1] w'' + \frac{\rho A}{E} \ddot{w} = 0. \quad (5)$$

می‌توان اثبات کرد که معادله دیفرانسیل حرکت استخراج شده توسط مدل *Shen* معادله دیفرانسیل خود الحاق نمی‌باشد و در نتیجه ماتریس سفتی به دست آمده حاصل از اعمال روش گالرکین به منظور حل معادله دیفرانسیل یک ماتریس غیر متقارن است که مقادیر ویژه (فرکانس‌های طبیعی) موهومی را در اختیار می‌گذارد. با توجه به این که یک مسأله پایستار در غیاب استهلاک بررسی شده است، بنابراین فرکانس‌های طبیعی موهومی توجیه فیزیکی نخواهند داشت. به منظور رفع نقایص مدل اخیر، فرضیات سینماتیکی جدیدی را مطابق زیر برای میدان‌های تنش، کرنش، جابه‌جایی و مومنوم در نظر می‌گیریم. با توجه به این که وجود ترک بر میدان جابه‌جایی نیز تأثیر می‌گذارد، بنابراین با توجه به تئوری تیر اویلر-برنولی میدان اصلاح شده جدیدی را برای میدان جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_x(x, z, t) = (-z + \varphi(x, z)) w'(x, t) \quad (6)$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به x خواهیم داشت:

$$u_x'(x, z, t) = (-z + \varphi(x, z)) w''(x, t) + \varphi'(x, z) w'(x, t) \quad (7)$$

با مقایسه روابط (۳) و (۷) مشاهده می‌شود که فرض اخیر باعث ظاهر شدن شیب تابع خیز در میدان مشتق جابه‌جایی

در مدل پیوسته ترک، اثر ترک به صورت یک تابع پیوسته بیان می‌شود که توزیع تنش و کرنش ناشی از ترک در سازه را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در مدل Barr [۱۴] میدان تنش و کرنش در حضور ترک به صورت زیر فرض شده است:

$$\sigma_x = (-z + f(x, z)) T(x, t), \quad \varepsilon_x = (-z + f(x, z)) S(x, t) \quad (1)$$

که در آن $T(x, z)$ و $S(x, z)$ به ترتیب توابع تنش و کرنش مجهولی هستند که می‌بایست محاسبه شوند. همچنین تابع $f(x, z)$ تابع اغتشاش ترک می‌باشد که برای تیر با سطح مقطع مستطیلی به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$f(x, z) = \left[z - m \left(z + \frac{a}{2} \right) H(d - a - z) \right] e^{-\beta \frac{|x-x_c|}{d}} \quad (2)$$

که در آن a, x_c و d به ترتیب موقعیت ترک، عمق ترک و نصف ارتفاع تیر می‌باشند. شکل ۱ اثر تابع پیشنهادی برای تابع اثر ترک، بر روی توزیع تنش عمودی در یک تیر ترک‌دار با سطح مقطع مستطیلی را نشان می‌دهد. این تابع به صورت نمایی با دور شدن از محل ترک در جهت طول تیر کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود که توزیع تنش و یا کرنش در سطح مقطع تیر به صورت خطی می‌باشد. همچنین با معرفی تابع پله $H(\cdot)$ شرط صفر شدن تنش در وجوه ترک حاصل می‌شود. ثابت m شیب توزیع تنش خطی در جهت عرضی تیر و در مقطع ترک را نشان می‌دهد. پارامتر α که معرف میزان کاهش توزیع تنش در تیر در جهت دور شدن از موقعیت ترک می‌باشد، برای اولین بار به صورت تجربی توسط *Christids* و *Barr* در مرجع [۱۳] و سپس با استفاده از روش المان محدود توسط *Shen* و *Pierre* در مرجع [۱۷] محاسبه شده است. در مدل Barr فرض بر آن است که وجود ترک تنها توزیع تنش و کرنش را تحت تأثیر قرار می‌دهد که این فرض باعث به وجود آمدن خطا و کاهش دقت مدل آنها شده است. در سال‌های اخیر *Shen* و *Pierre* [۱۵] مدل Barr را مورد بازنگری قرار دادند. آنها علاوه بر در نظر گرفتن اثر ترک بر روی میدان تنش و کرنش، فرض نموده‌اند که مشتق اول جابه‌جایی محوری نیز تحت تأثیر ترک قرار می‌گیرد. آنها اثر ترک بر روی میدان مشتق جابه‌جایی محوری را به صورت زیر مدل نموده‌اند:

$$u_x = u(x, z, t), \quad u_x'(x, z, t) = (-z + \varphi(x, z)) w''(x, t) \quad (3)$$

در رابطه اخیر $\varphi(x, z)$ تابع اثر ترک بر مشتق اول میدان جابه‌جایی است و به صورت زیر تعریف شده است [۱۶]:

$$\varphi(x, z) = \left[z - \left(z + \frac{a}{2} \right) H(d - a - z) \right] e^{-\beta \frac{|x-x_c|}{d}} \quad (4)$$

که در آن β پارامتر ثابتی است و در مرجع [۱۵] مقدار آن

بایستی به نحوی تعیین شوند تا روابط ساختاری^۱ بین این میدان‌ها برقرار باشد. بدین منظور، برای استخراج معادله دیفرانسیل حرکت از اصل Hu-Washizu استفاده می‌کنیم. اصل Hu-Washizu [۲۴] را می‌توان با استفاده از اصل پایایی انرژی Hellinger-Reissner استخراج کرد. اصول مانایی انرژی^۲ که اصل تغییرات ترکیبی^۳ نیز نامیده می‌شود، این امکان را فراهم می‌سازد که به توان کلیه معادلات اساسی حاکم را در یک تابعی^۴ جمع کرده و فرضیات سینماتیکی مستقلی برای میدان‌های جابه‌جایی، سرعت، تنش و کرنش اعمال شود. برای مسایل Hu-Washizu به صورت زیر بیان می‌شود [۲۴]:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \left\{ \sigma_{kj,j} + f_i - \rho \dot{p}_i \right\} \delta u_i dV \right. \\ & + \int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U_0(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \left(\rho \dot{u}_i - \frac{\partial T}{\partial p_i} \right) \delta p_i dV \\ & + \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \right] \delta \sigma_{ij} dV \\ & \left. + \int_{S_\sigma} [t_i - \hat{t}_i] \delta u_i ds + \int_{S_u} (\hat{u}_i - u_i) \delta t_i ds \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن $U_0(\varepsilon_{ij})$ تابع چگالی انرژی کرنشی، $p_i = \dot{u}_i$ معرف مومنتوم خطی، $T = \frac{1}{2} \rho p_i p_i$ چگالی انرژی جنبشی، δ_{ki} تابع دلتای کرونگر و \hat{t}_i و \hat{u}_i به ترتیب معرف بردار تنش معلوم روی سطح S_σ و جابه‌جایی معین سطح S_u می‌باشد. رابطه (۹) نقطه شروع برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت تیر ترک‌دار با مدل پیوسته ترک می‌باشد.

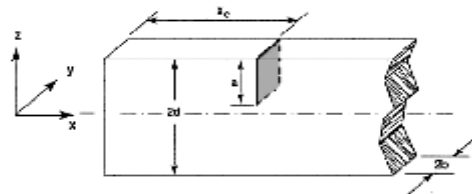
با جایگذاری فرضیات سینماتیکی ذکر شده در رابطه (۸) در معادله (۹) و با اعمال برخی عملیات ریاضی و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، معادلات حرکت به همراه شرایط مرزی متناظر استخراج می‌شوند. مراحل استخراج معادله حرکت به صورت جداگانه برای هر یک از جملات معادله (۹) در ادامه شرح داده می‌شود.

عبارت کرنش - جابه‌جایی: جمله کرنش - جابه‌جایی در معادله (۹) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} dV = \\ = \int_x \{ (I - 2K + L) S \\ - (I - K_1 - K + L_1) w'' - (L_2 - K_2) w' \} \delta T dx. \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن انتگرال‌های روی سطح مقطع تیر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

طولی می‌شود که در مدل *Shen* و *Pierre* موجود نیست. در ادامه نشان داده می‌شود که این تصحیح باعث به دست آمدن معادله دیفرانسیل جدیدی برای ارتعاش عرضی تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار می‌شود که با دقت مناسب‌تری رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را نسبت به مدل *Shen* و *Pierre* پیش‌بینی می‌نماید. شکل ۲ نمونه‌ای از یک تیر ترک‌دار با سطح مقطع مستطیلی



شکل ۲- هندسه تیر ترک‌دار

را نشان می‌دهد. در غیاب نیروهای حجمی و با در نظر گرفتن میدان جابه‌جایی اصلاح شده، فرضیات سینماتیکی را با توجه به تئوری تیر اوپلر-برنولی می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} u_x &= (-z + \varphi(x, z)) w'(x, t), \quad u_y = 0, \quad u_z = w(x, t), \\ p_x &= 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = P(x, t), \\ \varepsilon_x &= (-z + f(x, z)) S(x, t), \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -v \varepsilon_x, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0, \\ \sigma_x &= (-z + f(x, z)) T(x, t), \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx}(x, z, t), \\ \sigma_y &= \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن $S(x, t)$ و $T(x, t)$ به ترتیب میدان‌های کرنش و تنش مجهولی هستند که می‌بایست محاسبه شوند. v نسبت پواسون می‌باشد. توجه می‌کنیم که در فرضیات فوق از اثر تنش برشی صرف‌نظر شده و مؤلفه تنش σ_{xz} به منظور در نظر گرفتن اثرات بارگذاری عرضی اعمالی بر تیر در نظر گرفته شده است. توابع $\varphi(x, z)$ و $f(x, z)$ توابع اغتشاش ترک مشابه با تابع پیشنهادی *Shen* در مرجع [۱۶] هستند که میدان جابه‌جایی، تنش و کرنش را در اطراف ترک تحت تأثیر قرار می‌دهند.

۳- معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار

با توجه به این که در فرضیات سینماتیکی میدان‌های جابه‌جایی، تنش و کرنش به صورت مستقل از هم اختیار شده‌اند، بنابراین توابع تنش و کرنش مجهول $S(x, t)$ و $T(x, t)$

¹. Constitutive Relation

². Stationary Energy Principle

³. Mixed Variational Principle

⁴. Functiona

$$\int_A \left\{ \left[(-z + f) T \right]' + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right\} \phi \delta w \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_{xy} \frac{\partial (\phi \sigma_{xz})}{\partial x} \delta w \, dA \Big|_{z=-d}^{z=d} \quad (18)$$

$$- \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(-z + f) T \right]' \right\} \phi \delta w \, dV$$

و با اعمال انتگرال گیری جزء به جزء نسبت به متغیر x از دومین انتگرال رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$- \int_A \left\{ \left[(-z + f) T \right]' + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right\} z \delta w \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_{xy} \frac{\partial (z \sigma_{xz})}{\partial x} \delta w \, dA \Big|_{z=-d}^{z=d} \quad (19)$$

$$- \int_{xy} \frac{\partial (\sigma_{xz})}{\partial x} \delta w \, dV + \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(-z + f) T \right]' z \right\} \delta w \, dV$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۱۸) و (۱۹) در معادله (۱۷) و انتگرال گیری روی سطح مقطع تیر، عبارت تعادل دینامیکی به صورت زیر بدست می آید:

$$\int_x \left\{ [(K - I - L_1 + K_1) T'' + (2K' - 2L_3 - L_2 + K_2) T' + (K'' - L_4 - L_5) T - \rho A \dot{P}] \delta W \right\} dx + \int_A \left\{ \left[(-z + \phi) \left[(-z + f) T \right]' + (-z + \phi) \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right] \delta w \right\} dA \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \left[(-z + \phi) \sigma_{xz} \right] \delta w \, dA \Big|_{z=-d}^{z=d} \quad (20)$$

که در آن انتگرال های روی سطح مقطع تیر به صورت زیر تعریف می شوند:

$$K_2 = \int_A z \phi' \, dA, \quad L_2 = \int_A f \phi' \, dA, \quad L_3 = \int_A f \phi \, dA \quad (21)$$

۳-۱ معادلات دیفرانسیل حرکت

با جایگذاری روابط استخراج شده در فوق در معادله (۹) می توان معادلات دیفرانسیل حرکت را به همراه شرایط مرزی متناظر استخراج کرد. با توجه به اینکه متغیرهای δT ، δS ، δP و δw مستقل از یکدیگر بوده و اختیاری می باشند، در نتیجه، برای برقراری معادله (۹) باید ضرایب هر یک از این متغیرها به صورت مجزا برابر صفر باشند. به ازای δT اختیاری از رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$S = Q_1 w'' + Q_2 w' \quad (22)$$

که در آن:

$$Q_1 = \frac{I - K_1 - K + L_1}{I - 2K + L}, \quad Q_2 = \frac{L_2 - K_2}{I - 2K + L} \quad (23)$$

و همچنین به ازای δS اختیاری با استفاده از رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$I = \int_A z^2 \, dA, \quad K = \int_A z f \, dA, \quad K_1 = \int_A z \phi \, dA \quad (11)$$

$$L = \int_A f^2 \, dA, \quad L_1 = \int_A \phi f \, dA$$

عبارت تنش - چگالی انرژی کرنشی: جمله تنش - چگالی انرژی کرنشی در معادله (۹) را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \delta \epsilon_{ij} \, dV = \int_V \left\{ \left(\sigma_x - \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_x} \right) \delta \epsilon_x + \left(\sigma_y - \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_y} \right) \delta \epsilon_y + \left(\sigma_z - \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_z} \right) \delta \epsilon_z \right\} dV \quad (12)$$

برای تیر الاستیک ایزوتروپیک می توان نوشت:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_x} = E \sigma_x, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_y} = 0, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_z} = 0. \quad (13)$$

و در نتیجه با جایگذاری رابطه (۱۳) و با استفاده از فرضیات سینماتیکی ذکر شده، معادله (۱۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \delta \epsilon_{ij} \, dV = \int_x \left\{ (T - ES)(I - 2K + L) \delta S \right\} dx. \quad (14)$$

عبارت سرعت - مومنتوم: با توجه به فرضیات سینماتیکی جمله سرعت - مومنتوم خطی عبارت خواهد بود از:

$$\int_V \left(\rho \dot{u}_i - \frac{\partial T}{\partial p_i} \right) \delta p_i \, dV = \int_V (\rho \dot{u}_z - \rho p_z) \delta p_z \, dV \quad (15)$$

$$= \int_x \rho A (\dot{w} - P) \delta P \, dx.$$

عبارت تعادل دینامیکی: اولین جمله در معادله (۹) معرف کار مجازی انجام شده توسط نیروهای دینامیکی می باشد. در غیاب نیروهای حجمی می توان نوشت:

$$\int_V \left\{ \sigma_{ij,j} + f_i - \rho \dot{p}_i \right\} \delta u_i \, dV = \int_V \left\{ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \rho \dot{p}_z \right) \delta w \right\} dV \quad (16)$$

با اعمال فرضیات سینماتیکی، رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_V \left\{ \left[(-z + f) T \right]' + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right\} \phi \delta w' - \left[\left[(-z + f) T \right]' + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right] z \delta w' + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \rho \dot{P} \right) \delta w \Big|_V \, dV \quad (17)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از اولین انتگرال رابطه فوق نسبت به متغیر x ، می توان نوشت:

که با اولین عبارت معادله (۲۷) ساده می‌شود. بنابراین انتگرال‌های مرزی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\int_A \left((-z + \varphi) [(-z + f)T]' + \sigma_{xz} \right) \delta w \, dA \Big|_{x=0}^{x=l} \quad (28)$$

سطوح انتهایی: در سطوح انتهایی $x=0$ و $x=l$ مؤلفه‌های بردار یکه عمود بر سطح عبارتند از: $n_x = \mp 1$ و $n_y = n_z = 0$. اگر مؤلفه‌های بردار تنش خارجی بر روی این سطوح را با \hat{t}_i نشان دهیم در این صورت شرایط مرزی نیرویی بر روی سطوح مزبور به صورت زیر بیان خواهند شد:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{yz} (-z + \varphi) \hat{t}_x \, dA - (I + L_1 - K - K_1)T \right\} \delta W' \Big|_{x=l} \\ & + \left\{ \int_{yz} \hat{t}_z \, dA + (I + L_1 - K - K_1)T' + (L_3 - K')T \right\} \delta W \Big|_{x=l} \\ & + \left\{ \int_{yz} (-z + \varphi) \hat{t}_x \, dA + (I + L_1 - K - K_1)T \right\} \delta W' \Big|_{x=0} \\ & + \left\{ \int_{yz} \hat{t}_z \, dA - (I + L_1 - K - K_1)T' - (L_3 - K')T \right\} \delta W \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (29)$$

شرایط مرزی جابه‌جایی: اگر \hat{u} و \hat{w} به ترتیب معرف جابه‌جایی طولی و عرضی معلوم تیر در دو انتهای $x=0$ و $x=l$ باشند، در این صورت انتگرال مرزی جابه‌جایی معادله (۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \int_{yz} (\hat{u} - u) \delta \sigma_x + (\hat{w} - w) \delta \sigma_{xz} \, dA \Big|_{x=l} + \\ & \int_{yz} (\hat{u} - u) \delta (-\sigma_x) + (\hat{w} - w) \delta (-\sigma_{xz}) \, dA \Big|_{x=0} = \\ & = \int_{yz} \left\{ [(-z + \varphi)w' - \hat{u}] (-z + f) \delta T + (w - \hat{w}) \delta \sigma_{xz} \right\} \Big|_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (30)$$

این جملات به همراه جملات مرزی استخراج شده در رابطه شرایط مرزی کل حاکم بر تیر را در اختیار می‌گذارند. با توجه به اینکه متغیرهای δw ، $\delta w'$ ، $\delta \sigma_{xz}$ و δT مستقل از یکدیگر بوده و اختیاری می‌باشند، بنابراین می‌بایستی ضرایب این جملات برابر صفر باشند. در نتیجه، شرایط مرزی حاکم بر تیر در دو انتهای $x=0$ و $x=l$ را با صفر در نظر گرفتن نیروها و جابه‌جایی‌های اعمالی، یعنی $\hat{t}_i = 0$ و $\hat{u}_i = 0$ ، می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} & E(I + L_1 - K - K_1) \left[Q_1 w'' + (Q_1' + Q_2) w'' + Q_2' w' \right] \\ & + (L_3 - K')(Q_1 w'' + Q_2 w') = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$w = 0 \quad (32)$$

$$(I + L_1 - K - K_1)(Q_1 w'' + Q_2 w') = 0 \quad (33)$$

$$T = ES \quad (24)$$

و به ازای δP اختیاری از معادله (۱۵) بدست می‌آید:

$$P = w' \quad (25)$$

با جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۴) و (۲۵) در معادله (۲۰) و با توجه به اینکه مقدار δw اختیاری است، می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & (I + L_1 - K - K_1) Q_1 w^{(iv)} \\ & + [(I + L_1 - K - K_1)(2Q_1' + Q_2) \\ & + (2L_3 - 2K' - K_2 + L_2) Q_1] w''' \\ & + [(I + L_1 - K - K_1)(Q_1'' + 2Q_2') \\ & + (2L_3 - 2K' - K_2 + L_2)(Q_1' + Q_2) + (L_3 - K'') Q] w'' \\ & + [(I + L_1 - K - K_1) Q_2'' + (2L_3 - 2K' - K_2 + L_2) Q_2' \\ & + (L_3 - K'') Q_2] w' + \frac{\rho A}{E} \ddot{w} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

با توجه به روابط (۲) و (۴) واضح است که برای تیر سالم $f(x, z) = \varphi(x, z) = 0$ بوده و بنابراین، مقدار Q_1 برابر یک و مقدار $Q_2, K, K_1, K_2, L_1, L_2, L_3$ برابر صفر شده و در نتیجه معادله حرکت فوق به معادله ارتعاش عرضی تیر اوپلر-برنولی استاندارد $EI w^{(iv)} + \rho A \ddot{w} = 0$ تبدیل می‌شود.

۳-۲- شرایط مرزی

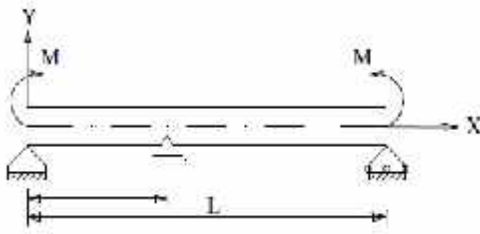
دو جمله آخر معادله (۹) شرایط مرزی را برای انتها و سطوح جانبی تیر، معرفی می‌کنند. این جملات به همراه جملات مرزی استخراج شده در رابطه (۲۰) شرایط مرزی کل حاکم بر تیر را در اختیار می‌گذارند. انتگرال‌های مرزی معادله (۹) را می‌توان به صورت زیر بررسی نمود:

سطوح جانبی تیر: فرض می‌کنیم که بر سطوح جانبی تیر هیچ نیروی خارجی اعمال نمی‌شود، یعنی بر روی این سطوح $\hat{t}_i = 0$ می‌باشد. بردار تنش^۱ را می‌توان با استفاده از رابطه تنش کوشی $t_i = n_j \sigma_{ij}$ بدست آورد که در آن n_j مؤلفه‌های بردار یکه عمود بر سطح می‌باشند. شرایط مرزی نیرویی در معادله (۹) بر روی سطوح جانبی $z = \pm d$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \int_y \left(-z + \varphi \right) (-\sigma_{xz}) \delta w \, dy \Big|_{z=-d}^{z=d} \Big|_{x=0}^{x=l} \\ & - \int_{xy} \frac{\partial}{\partial x} [(-z + \varphi) (-\sigma_{xz})] \delta w \, dA \Big|_{z=-d}^{z=d} \end{aligned} \quad (27)$$

دومین جمله از رابطه فوق توسط آخرین انتگرال معادله حذف می‌شود. با انتگرال‌گیری جزء به جزء از دومین عبارت اولین انتگرال مرزی معادله نسبت به متغیر z جمله‌ای حاصل می‌شود

¹ Traction



شکل ۳- هندسه تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

برای تیر با سطح مقطع مستطیلی توابع داده شده در معادلات (۱۱) و (۲۱) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$I = \frac{4bd^3}{3}, \quad I_r = \frac{2b[(d-a)^3 + d^3]}{3}, \quad I_c = ab(a-2d)$$

$$K = 0, \quad K' = 0, \quad K'' = 0,$$

$$L = (m-1)I e^{-2\alpha \frac{|x-x_c|}{d}} \quad (39)$$

$$K_1 = \left(1 - \frac{1}{m}\right) I e^{-\alpha \frac{|x-x_c|}{d}} e^{-2\beta \frac{|x-x_c|}{d}}$$

$$L_1 = \left(1 - \frac{1}{m}\right) I e^{-2\beta \frac{|x-x_c|}{d}}$$

رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را می‌توان با فرض حرکت هارمونیک و با فرکانس ω بررسی کرد. با در نظر گرفتن پاسخ سیستم به صورت $w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}$ معادله دیفرانسیل (۲۶) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$(I+L_1-K-K_1) Q_1 W^{(4)} + [(I+L_1-K-K_1)(2Q'_1+Q_2) + (2L_3-2K'-K_2+L_2)Q_1] W''' + [(I+L_1-K-K_1)(Q''_1+2Q'_2) + (2L_3-2K'-K_2+L_2)(Q'_1+Q_2) + (L'_3-K'')Q] W'' + [(I+L_1-K-K_1)Q''_2 + (2L_3-2K'-K_2+L_2)Q'_2 + (L'_3-K'')Q_2] W' - \frac{\rho A}{E} \omega^2 W = 0 \quad (40)$$

با توجه به این که معادله دیفرانسیل فوق به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشد، بنابراین در مقاله حاضر برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی مسأله مقدار ویژه پیوسته از روش گالرکین استفاده شده است. بدین منظور، حل فرضی معادله اخیر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$W(x) = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x) \quad (41)$$

که در آن $\psi_i(x)$ ، توابع مقایسه‌ای هستند که شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا می‌کنند. برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها این توابع مقایسه‌ای را می‌توان به صورت

و یا

$$w' = 0 \quad (34)$$

می‌توان ثابت کرد که به ازای شرایط مرزی

$$w'' = 0 \quad \text{و} \quad w = 0 \quad (35)$$

در ابتدا و انتهای تیر، مطابق رابطه (۲۶) معادله حرکت استخراج شده برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها یک معادله دیفرانسیل خود الحاق می‌باشد و در این مقاله به بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها می‌پردازیم.

۳-۳- محاسبه ثابت m

همان طوری که اشاره شد در مدل پیوسته ترک، توزیع تنش و کرنش تحت اثر تابع اغتشاش $f(x, z)$ قرار می‌گیرند که دارای پارامتر ثابت و مجهول m می‌باشد. برای محاسبه ثابت m ، توزیع تنش را در سطح مقطع تیر به صورت خطی در نظر می‌گیریم که این فرض با تئوری تیر اویلر-برنولی نیز سازگار است. با در نظر گرفتن گشتاور خمشی یکسان در موقعیت مشخصی از تیر در حالت وجود ترک و عدم وجود ترک، پارامتر m به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{A_c} (-zT(x_c, t)) z dA = \int_{A_c} (-z + f(x_c, t)) T(x_c, t) \left(z + \frac{a}{2}\right) dA \quad (36)$$

که در آن A_c مساحت مقطع تیر در موقعیت ترک ($x = x_c$) می‌باشد. با توجه به رابطه (۲) در سطح مقطع ترک‌دار تیر می‌توان نوشت:

$$f(x, z) = z - m \left(z + \frac{a}{2}\right) \quad (37)$$

با جایگذاری معادله (۳۷) در رابطه (۳۶) و با انتگرال‌گیری در این موقعیت از تیر خواهیم داشت:

$$m = \frac{I}{\left(I_r + \frac{a}{2} I_c\right)} \quad (38)$$

$$I_c = \int_{A_c} z dA, \quad I_r = \int_{A_c} z^2 dA$$

که در آن I_c معرف ممان اول و I_r معرف ممان دوم سطح مقطع ترک‌دار تیر نسبت به محور z (که مرکز آن بر روی مرکز سطح تیر سالم قرار دارد) می‌باشد.

۴- استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای

ارتعاشی تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

نظریه تیر با مدل پیوسته ترک ارائه شده، برای یک تیر با سطح مقطع مستطیلی و با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۳ هندسه یک تیر نمونه ترک‌دار با ترک لبه باز به عمق a و واقع در موقعیت x_c و با تکیه‌گاه ساده در دو انتها نشان داده شده است.

$$\psi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi}{L}x\right) \text{ در نظر گرفت.}$$

ترک (نسبت عمق ترک به ضخامت تیر) و $\xi_c = \frac{x_c}{L}$ نشان دهنده موقعیت نسبی ترک (نسبت فاصله ترک از ابتدای تیر به طول تیر) می‌باشد. قبل از بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار، ابتدا صحت مدل ارائه شده را با استفاده از نتایج حاصل از تست‌های تجربی را که در مرجع [۲۸] برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با ترک باز و تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها ارائه شده است بررسی می‌کنیم. در جدول ۱ و ۲ فرکانس‌های طبیعی در شکل مودهای اول و دوم ارتعاشی برای تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به منظور مقایسه آورده شده است. در این جدول‌ها، مقایسه بین نتایج حاصل از نظریه ارائه شده و نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در مرجع [۲۸] انجام شده است.

جدول ۱ نشان می‌دهد که حداکثر خطای مدل در تعیین فرکانس طبیعی اول 2.91% است. که این بیان می‌دارد نتایج تئوری ارائه شده سازگاری قابل قبولی با نتایج تست‌های تجربی دارند.

در جدول ۲ که مقایسه بین فرکانس طبیعی دوم آورده شده است، نیز تطابق بسیار خوبی بین نتایج دیده می‌شود. حداکثر خطای مدل در تعیین فرکانس طبیعی دوم 3.02% می‌باشد که مربوط به ترک با عمق نسبی 0.5 می‌باشد.

جدول ۱- فرکانس‌های طبیعی اول تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه ساده در دو انتها

موقعیت نسبی	عمق نسبی	فرکانس‌های طبیعی اول (Hz)	درصد خطا
$\xi_c = \frac{x_c}{L}$	$\beta = \frac{a}{2d}$	E: تجربی [۲۸] T: نظری	$\frac{ E-T }{E} \times 100$
تیر بدون ترک		150.59	0.6
0.2	0.1	150.85	0.23
	0.3	149.61	0.91
0.3	0.5	148.47	0.45
	0.1	150.42	0.05
0.5	0.3	149.71	0.06
	0.5	147.20	2.91
0.5	0.1	149.97	0.51
	0.3	147.80	0.68
	0.5	140.84	2.05

یکی از مدل‌های رایج مدل ترک در تیرها، مدل انعطاف‌پذیری موضعی می‌باشد که در آن مقطع معیوب به صورت یک جزء انعطاف‌پذیر در نظر گرفته می‌شود که تیر را به دو قسمت تقسیم می‌کند. Yoon و همکاران در مرجع [۲۸] با استفاده از این مدل به بررسی رفتار ارتعاشی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها پرداخته‌اند. آنها ترک را با استفاده از یک فنر پیچشی که مدل نموده‌اند.

با توجه به این که شکل مودهای تیر ترک‌دار دارای مشتقات ناپیوسته است بنابراین، برای همگرا شدن پاسخ روش گالرکین نیاز به تعداد جملات بیشتری خواهد بود. با جایگذاری معادله (۴۱) در معادله دیفرانسیل حرکت (۴۰) و با اعمال روش گالرکین، مسأله مقدار ویژه جداسازی شده برای N ثابت $a_i, i=1,2,\dots,N$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K_c] \mathbf{a} - \omega_c^2 [M_c] \mathbf{a} = 0 \quad (۴۳)$$

که در آن بردار \mathbf{a} عبارت است از: $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$ و ماتریس‌های $[M_c]$ و $[K_c]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[M_c] = \frac{\rho A}{E} [I]$$

$$[K_c] = \int_0^L \left[\frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} q_2(x) \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} - \frac{d \psi_i(x)}{dx} q_1(x) \frac{d \psi_j(x)}{dx} \right] dx \quad (۴۴)$$

$[I]$ معرف ماتریس واحد می‌باشد. توابع $q_1(x)$ و $q_2(x)$ عبارتند از:

$$q_1(x) = (I + L_1 - K_1 - K) Q_2'(x) + (L_3 - K') Q_2(x)$$

$$q_2(x) = (I + L_1 - K_1 - K) Q_1(x) \quad (۴۵)$$

در روابط فوق، علامت پریم نشان دهنده مشتق نسبت به مکان می‌باشد. مشاهده می‌شود که ماتریس سفتی به دست آمده یک ماتریس متقارن است که این ویژگی یکی از مزیت‌های نظریه ارائه شده است که در مدل‌های مشابه دیده نمی‌شود. در نتیجه مسأله مقدار ویژه متناظر، رابطه (۴۳) دارای مقادیر ویژه حقیقی خواهد بود و همچنین شکل مودهای ارتعاشی بدست آمده به طور حتم دارای خاصیت تعامد خواهند بود و در نتیجه می‌توان از قضیه بسط^۱ برای بدست آوردن پاسخ کلی سیستم استفاده نمود.

۵- نتایج تحلیلی

به منظور مقایسه نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در ادبیات فن، نمونه تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۲۸]. ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی تیر ترک‌دار مورد بررسی به این صورت است: طول تیر $L = 400 \text{ mm}$ ، سطح مقطع تیر $A = 10 \times 10 \text{ mm}^2$ ، چگالی $\rho = 7650 \text{ Kg/m}^3$ و مدول ینگ $E = 2.16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. علاوه بر این، پارامترهای بی‌بعد ترک عبارتند از: $\beta = \frac{a}{2d}$ که نشان دهنده عمق نسبی

^۱. Expansion Theorem

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی دوم تیر ترک‌دار با

تکیه‌گاه ساده در دو انتها

موقعیت نسبی	عمق نسبی	فرکانس‌های طبیعی دوم (Hz)	درصد خطا
$\xi_c = \frac{x_c}{L}$	$\beta = \frac{a}{2d}$	T: نظری	$\frac{ E-T }{E} \times 100$
تیر بدون ترک		602.37	0.02
0.2	0.1	600.10	0.05
	0.3	593.94	0.97
	0.5	582.37	2.41
0.3	0.1	600.12	0.67
	0.3	594.00	0.03
	0.5	582.63	3.02
0.5	0.1	601.01	0.20
	0.3	600.32	0.42
	0.5	598.24	0.87

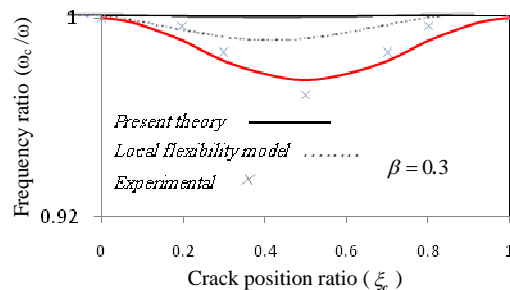
شکل ۵- الف نشان می‌دهد که به ازای موقعیت نسبی ثابت ترک، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با عمق نسبی ترک رابطه معکوس دارد، یعنی با افزایش عمق ترک فرکانس‌های طبیعی تیر کاهش می‌یابند همچنین، در شکل مود اول ارتعاشی با توجه به این که مقدار گشتاور خمشی در وسط تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها دارای بیشترین مقدار است، بنابراین ترک واقع در مرکز تیر بیشترین اثر را بر روی نسبت کاهش فرکانسی خواهد داشت.

با توجه به شکل ۵ - ب مشاهده می‌شود که به ازای ترک واقع در موقعیت نسبی ترک $\xi_c = 0.5$ ، نسبت فرکانس طبیعی دوم تقریباً برابر یک می‌باشد، یعنی اثر ترک بر فرکانس طبیعی ناچیز می‌باشد. علت این امر را به طور اختصار می‌توان بدین صورت بیان کرد که در مود دوم ارتعاشی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، موقعیت $\xi_c = 0.5$ نقطه گرهی بوده و مشتق دوم تابع شکل مود ارتعاشی در این نقطه برابر صفر است، به عبارت دیگر گشتاور خمشی ایجاد شده در اثر ارتعاش تیر در مود دوم در این نقطه برابر صفر است. با توجه به این که عمده‌ترین عامل کاهش فرکانس‌های طبیعی ناشی از ترک، در اثر گشتاور خمشی می‌باشد، بنابراین در مود ارتعاشی دوم اثر ترک واقع در وسط تیر (نقطه گرهی) بر نسبت کاهش فرکانسی کمتر خواهد بود.

نتیجه مشابهی با توجه به شکل ۶ که منحنی تغییرات نسبت فرکانسی اول تا سوم را بر حسب موقعیت نسبی ترک نشان می‌دهد، می‌توان مشاهده نمود. با این تفاوت که برای مود سوم، کمترین کاهش فرکانس طبیعی مربوط به ترک واقع در $\xi_c = 0.333$ و $\xi_c = 0.666$ می‌باشد، چون این موقعیت‌ها نقاط گرهی برای شکل مود ارتعاشی سوم می‌باشند. همچنین مشاهده می‌شود که منحنی کاهش فرکانسی تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها نسبت به وسط تیر متقارن می‌باشد.

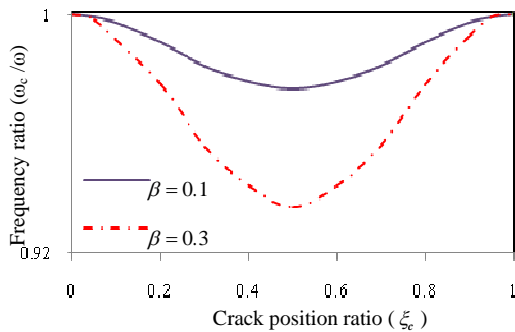
به منظور تأیید دقت مدل ارائه شده، نتایج حاصل از مدل ارائه شده و نتایج مدل Pierre و Shen [۱۵] (معادله ۵) را با نتایج تجربی موجود در مرجع [۲۸] مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

در شکل ۴ منحنی تغییرات نسبت فرکانس طبیعی اول بر حسب موقعیت نسبی ترک برای ترک با عمق نسبی $\beta = 0.3$ به دست آمده با استفاده از نظریه ارائه شده و نظریه انعطاف پذیری موضعی به همراه نتایج حاصل از تست‌های تجربی ارائه شده در مرجع [۲۸] ارائه شده است. همان طوری که ملاحظه می‌شود نظریه مدل پیوسته ترک ارائه شده، با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را پیش‌بینی می‌نماید.

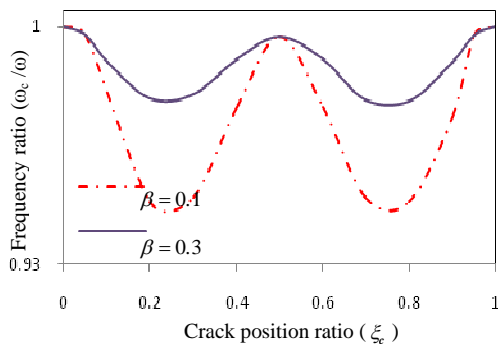


شکل ۴- نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول بر حسب عمق نسبی ترک برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، (x) نتایج تجربی [۲۸]، (—) مدل ارائه شده، (.....) مدل انعطاف‌پذیری موضعی [۲۸]

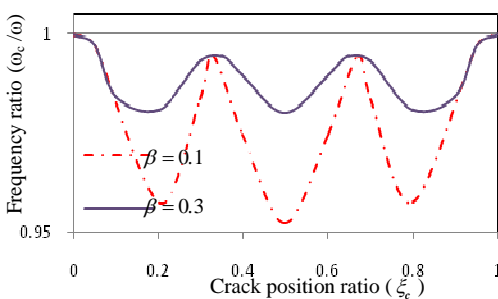
شکل ۵ منحنی تغییرات نسبت فرکانسی به ازای عمق نسبی ترک را برای تیر اویلر- برنولی ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و در شکل مودهای اول تا چهارم ارتعاشی نشان می‌دهد. در این شکل‌ها، محور عمودی معرف نسبت فرکانسی می‌باشد که در آن ω و ω_c به ترتیب نشان دهنده فرکانس‌های طبیعی تیر سالم و تیر ترک‌دار می‌باشند. محور افقی نشان دهنده عمق نسبی ترک می‌باشد. این منحنی‌ها به ازای موقعیت نسبی ترک $\xi_c = 0.1$ ، $\xi_c = 0.3$ و $\xi_c = 0.5$ رسم شده‌اند.



شکل الف - مود اول ارتعاشی



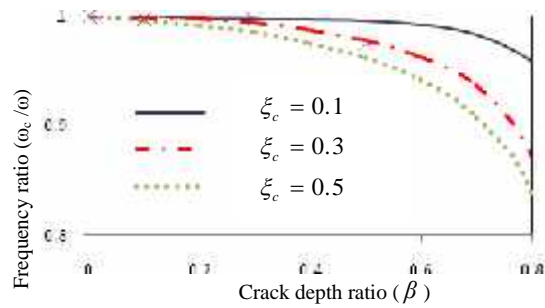
شکل ب - مود دوم ارتعاشی



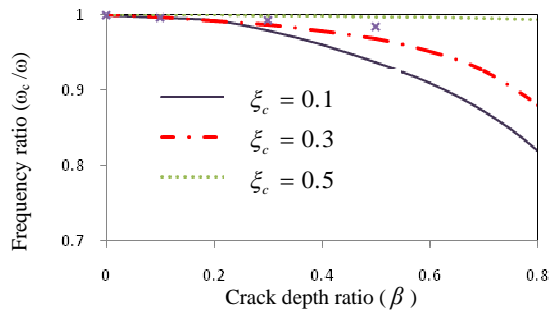
شکل ج - مود سوم ارتعاشی

شکل ۶- نسبت کاهش فرکانس طبیعی بر حسب موقعیت نسبی ترک، (—) عمق نسبی 0.1، (---) عمق نسبی 0.3 برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

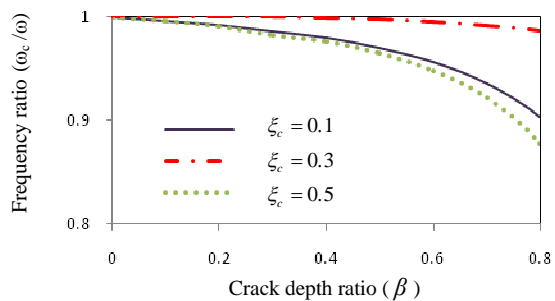
در شکل ۷ منحنی تغییرات نسبت فرکانسی اول بر حسب موقعیت نسبی ترک برای ترک با عمق نسبی $\beta = 0.3$ محاسبه شده با استفاده از نظریه ارائه شده و مدل Pierre و Shen [۱۵] به همراه نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در مرجع [۲۸] ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که در شکل مود اول ارتعاشی هر چه موقعیت ترک به تکیه‌گاه‌ها نزدیکتر باشد، نتایج تقریباً یکسانی از هر دو نظریه حاصل می‌شود اما با دور شدن از تکیه‌گاه‌ها به علت تأثیر بیشتر بر فرکانس‌های طبیعی نتایج دو تئوری از هم دور می‌شوند و نتایج نظریه جدید ارائه شده به نتایج تجربی نزدیکتر می‌شود. باز و بسته شدن ترک در حین ارتعاش تیر، باعث تغییر سفتی معادل تیر ترک‌دار نسبت به مدل



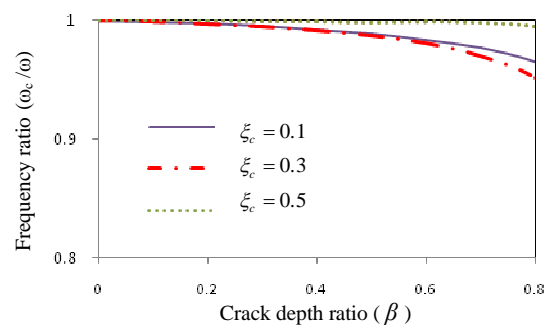
شکل الف - مود ارتعاشی اول



شکل ب - مود ارتعاشی دوم



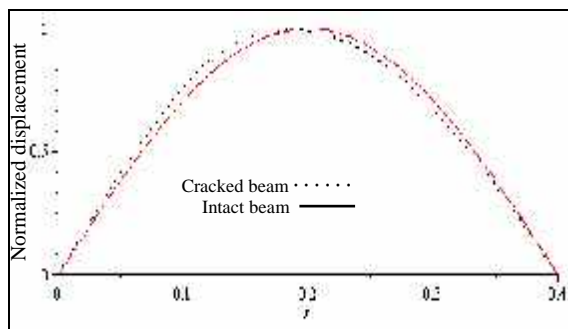
شکل ج - مود ارتعاشی سوم



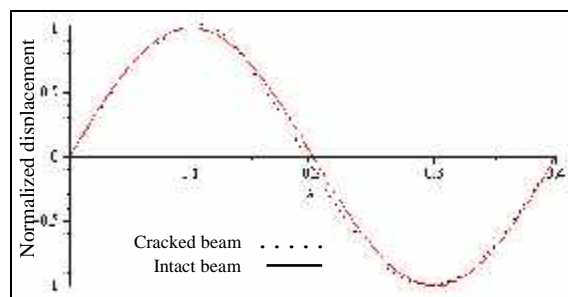
شکل د - مود ارتعاشی چهارم

شکل ۵- نسبت کاهش فرکانس‌های طبیعی بر حسب عمق نسبی ترک برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، (x) نتایج تجربی [۲۸] به ازای موقعیت نسبی ترک $\xi_c = 0.3$

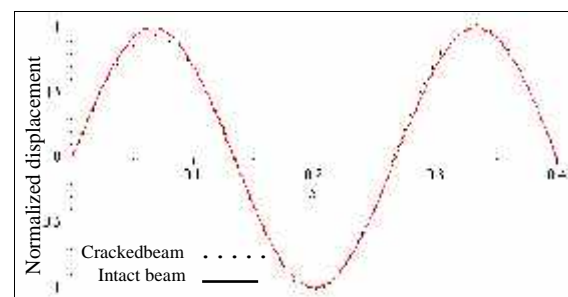
و Shen [۱۵] را با نتایج تجربی موجود در مرجع [۲۸] مورد مقایسه قرار دادیم. این مقایسه نشان می‌دهد که هر چه موقعیت ترک از نقاط گرهی شکل مودهای ارتعاشی که در آن ترک بیشترین تأثیر را بر رفتار ارتعاشی می‌گذارد، دورتر شود نتایج دو نظریه به مقادیری نزدیک هم همگرا می‌شوند ولی با نزدیک شدن به نقاط گرهی نتایج دو مدل از یکدیگر دورتر می‌شوند طوری که نتایج مدل جدید ارائه شده به نتایج تجربی نزدیکتر می‌شود. بنابراین فرضیات سینماتیکی جدید پیشنهاد شده علاوه بر در اختیار گذاشتن معادلات دیفرانسیل جدیدی برای ارتعاش عرضی تیر اوپلر- برنولی ترک‌دار، باعث افزایش دقت مدل نیز شده است.



شکل الف - شکل مود اول ارتعاشی



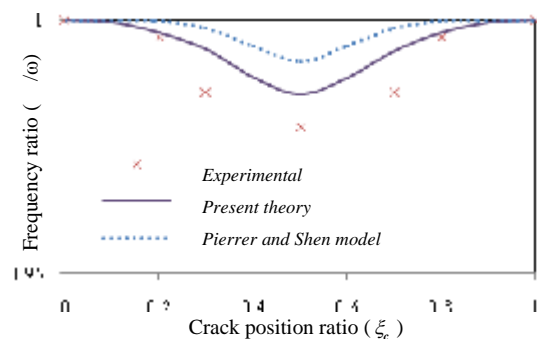
شکل ب - شکل مود دوم ارتعاشی



شکل ج - شکل مود سوم ارتعاشی

شکل ۸- شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای $\xi_c = 0.3$ و $\beta = 0.7$ در سه مود ارتعاشی اول (—) تیر سالم، (.....) تیر ترک‌دار

ترک باز می‌شود.



شکل ۷- نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول بر حسب عمق نسبی ترک برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، (x) نتایج تجربی [۲۸]، (—) مدل ارائه شده، (.....) مدل *Pierre* و [۱۵] *Shen*

در شکل ۸ سه شکل مود ارتعاشی اول نرمالیزه شده تیر سالم و تیر ترک‌دار به ازای ترک واقع در موقعیت نسبی $\xi_c = 0.3$ و عمق نسبی $\beta = 0.7$ به منظور مقایسه نشان داده شده است. با توجه به شکل ۸- الف مشاهده می‌شود که شیب تابع شکل مود در موقعیت ترک ($\xi_c = 0.3$) به طور ناگهانی تغییر می‌کند، بنابراین برای همگرا شدن جواب به دست آمده از روش گالرکین از جملات بیشتری ($N = 80$) استفاده شده است.

۶- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، رفتار ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار با مدل پیوسته ترک مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، اثر ترک لبه باز به صورت یک اغتشاش پیوسته مدل شد و فرضیات سینماتیکی جدیدی برای میدان جابه‌جایی و کرنش پیشنهاد شد. معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی متناظر با استفاده از اصل *Hu-Washizu* استخراج شد. سپس معادله حرکت با استفاده از روش گالرکین برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها حل شده است.

مقایسه صورت پذیرفته بین نتایج نظریه و نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود ارائه شده در مرجع [۲۸]، نشان می‌دهد که مدل جدید پیشنهاد شده فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار را با دقت مطلوبی پیش‌بینی می‌کند. مقایسه نتایج مدل با نتایج حاصل از تست‌های تجربی، نشان می‌دهد که حداکثر خطای مدل در تعیین فرکانس طبیعی اول ۲.۹۱٪ و فرکانس طبیعی دوم برابر ۳.۰۲٪ می‌باشد.

همچنین، به منظور تأیید دقت مدل ارائه شده، نتایج حاصل از مدل ارائه شده و نتایج مدل مشابه یعنی مدل *Pierre*

[7] Kirmser, P. G., "The effect of discontinuities on the Natural Frequency of Beams", In Proceeding of the American Society of Testing and Materials, Vol. 44, pp. 897-904, 1944.

[8] Tasi, T. C., Y. Z. Wang, "Vibration Analysis and Diagnosis of a Cracked shaft." Journal of Applied Mechanics, Vol. 192, Issue 3, pp. 607-620, 1996.

[9] Hai-Ping Lin, "Direct and Inverse Methods on Free Vibration Analysis of Simply Supported Beams with a Crack", Engineering Structures, Vol. 26, pp. 427-436, 2004.

[10] Viola, E., Ricci, P., Aliabadi, M.H., "Free Vibration Analysis of Axially Loaded Cracked Timoshenko Beam Structures Using the Dynamic stiffness Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 304, pp. 124-153, 2007.

[11] Khaji, N., Shafiei, M., Jalalpour, M., "Closed-form Solutions for Crack Detection Problem of Timoshenko Beams with Various Boundary Conditions", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 51, pp. 667-681, 2009.

[12] Abdul Salam Y., Alsabbagh, Osama M. Abuzeid, Mohammad H. Dado, "Simplified Stress Correction Factor to Study the Dynamic Behavior of a Cracked Beam", Applied Mathematical Modelling, Vol. 33, pp. 127-139, 2009.

[13] Christides S., Barr, A. D. S., "One Dimensional Theory of Cracked Bernoulli-Euler Beams", Int. J. Mech. Sci, Vol. 26, Issue 11, pp. 639-648, 1984.

[14] Christides, S., A. D. S. Barr, "Torsional Vibration of Cracked Beams of Non-Circular Cross-Section", Int. J. Mech. Sci, Vol. 28, pp. 473-490, 1986.

[15] Shen, M.H. H., Pierre, C., "Free Vibrations of Beams with a Single-Edge Crack", Journal of Sound and Vibration, 170(2), PP 237-259, 1994.

[16] Shen, M.H. H., and Pierre, C., "Natural Modes of Bernoulli-Euler Beams with Symmetric Cracks", Journal of Sound and Vib. , Vol. 138, Issue1, pp. 115-134, 1990.

[17] Shen, M. H. H., Pierre, C., "On-line Structural Damage Detection", Structural Systems: Smart Structures, Devices and Systems, part 14, pp. 271-332, 1998.

[18] Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., "Vibration of a Beam with a Breathing Crack", Journal of Sound and Vibration, Vol. 239, Issue 1, pp. 57-67, 2001.

[19] Chondros, T.G., Labeas, G.N., "Torsional Vibration of a Cracked Rod by Variational Formulation and Numerical Analysis", Journal of Sound and Vibration, Vol. 301, pp. 994-1006, 2007.

[20] Behzad, M., Meghdari, A., Ebrahimi, A., "A New Continuous Model for Flexural Vibration Analysis of a Cracked Beam", POLISH Maritime

نتایج نشان می‌دهند که به ازای عمق مشخص ترک، موقعیت ترک بر کاهش فرکانس‌های طبیعی اثر می‌گذارد. از آنجایی که عمده‌ترین عامل کاهش فرکانس‌های طبیعی ناشی از ترک، در اثر گشتاور خمشی می‌باشد، بنابراین در موقعیت‌هایی که مقدار گشتاور خمشی به صفر میل می‌کند اثر ترک بر فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها کمترین کاهش فرکانس طبیعی در مود دوم مربوط به ترک واقع در وسط تیر و در مود سوم ارتعاشی مربوط به ترک واقع در موقعیت‌های $\xi_c = 0.333$ و $\xi_c = 0.666$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که موقعیت‌های مزبور نقاط گرهی متناظر با شکل مود ارتعاشی مربوطه می‌باشند و نقاط عطف تابع شکل مود بوده که مقدار گشتاور خمشی در این نقاط برابر صفر می‌باشد. همچنین، وجود ترک باعث کاهش سفتی موضعی تیر می‌شود و در یک موقعیت مشخص، ترک با عمق بیشتر تأثیر بیشتری بر مشخصه‌های ارتعاشی نسبت به ترک با عمق کمتر دارد.

مقایسه رفتار حاصل از حل تحلیلی ارائه شده با نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود تطابق بسیار خوب دو پاسخ را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک نشان می‌دهد.

مراجع

- [1] Andrew, D., Dimarogonas, "Vibration of Cracked Structures: A State of The Art reviews." Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, Issue 5, pp. 831-857, 1996.
- [2] Loutridis, S., Doukab, E., Hadjileontiadis, L., J., "Forced Vibration Behaviour and Crack Detection of Cracked Beams Using Instantaneous Frequency", NDT&E International, Vol. 38, pp. 411-419, 2005.
- [3] Haisty, B. S. and Spiringer, W. T., "A General Beam Element for Use in Damage Assessment of Complex Structure", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 110, pp. 389-394, 1988.
- [4] Friswell, M. I., Penny, J. E. T., and Garvey, S. D., "A Combine genetic and Eigensensitivity Algorithm for the Location of Damage in Structures", Computers and Structures, Vol. 69, pp. 547-556, 1988.
- [5] Zheng, D.Y., Kessissoglou, N. J. "Free Vibration Analysis of a Cracked Beam by Finite Element method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 273, pp. 457-475, 2004.
- [6] Sadettin Orhan, "Analysis of Free and Forced Vibration of a Cracked Cantilever Beam", NDT & E International, Vol. 40, pp. 443-450, 2007.

Research, Vol. 2, pp. 32-39, 2008.

[21] Behzad, M., Meghdari, A., Ebrahimi, A., "A New Approach for Vibration Analysis of a Cracked Beam", International Journal of Engineering, Vol. 18, Issue 4, pp. 319-330, 2005.

[22] Sergio, H. S. Carneiro, Daniel J. Inman, "Continuous Model for the Transverse Vibration of Cracked Timoshenko Beams", Transactions of the ASME, Vol. 124, pp. 310-320, 2002.

[23] Caddemi, S., Paola, M. Di., "The Hu-Washizu Variational Principle for the Identification of Imperfections in Beams", Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 75, pp. 1259-1281, 2008.

[24] Barr, A. D. S., "An Extension of the Hu-Washizu Variational Principle in linear Elasticity for Dynamic Problem", Trans. ASME J. Appl. Mechs, Vol. 33, Issue 2, pp. 480-493, 1996.

[25] Hu, H., "Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications", Gordon and Breach, 1984.

[26] Washizu, K., "Variational Method in Elasticity and Plasticity", Second ed. Pergamon Press, 1975

[27] Reddy, J. N., "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics", John Wiley & Sons, 1984.

[28] Han-Ik Yoon, In-Soo Son, Sung-Jin Ahn, "Free Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beam with Double Cracks", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 21, pp. 476-485, 2007.