

## استفاده از مدل جت بازگشتی در انتهای حفره در شبیه‌سازی جریان همراه با کاویتاسیون حول هندسه‌های متقارن محوری به روش المان مرزی

محمود پسندیده‌فرد

دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

مهدی نوروزی

دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

### چکیده

موضوع اصلی این مقاله، شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون جزئی و گسترده حول هندسه‌های متقارن محوری با استفاده از روش المان مرزی بر پایه پتانسیل و به‌کارگیری مدل «جت بازگشتی» برای منطقه انتهای کاویتی است. مدل جت بازگشتی از جمله مدل‌های بستن انتهای حفره است که تطابق نسبتاً مناسبی با فیزیک جریان ناپایای کاویتاسیون دارد. به منظور شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون، سطوح جسم و حفره توسط المان‌هایی تقریب زده می‌شوند. سپس با استفاده از بیان انتگرالی تئوری گرین، حلقه‌های چشمه روی سطح حفره و حلقه‌های دوگان روی سطوح حفره و جسم توزیع می‌شوند. طول حفره و جت بازگشتی، مقداری ثابت و به‌عنوان ورودی مسئله است و هندسه حفره و عدد کاویتاسیون از جمله نتایج این شبیه‌سازی می‌باشد. در این تحلیل، توزیع ضریب فشار در کاویتاسیون جزئی و ضریب پسا در کاویتاسیون گسترده نیز پیش‌بینی می‌شود. مقایسه نتایج حاصل با نتایج تجربی و عددی دیگر، بیانگر این است که استفاده از مدل جت بازگشتی، پرش نامتعارف ضریب فشار در انتهای حفره جزئی - حاصل از شبیه‌سازی کاویتاسیون بدون استفاده از مدل جت بازگشتی - را اصلاح می‌نماید. همچنین استفاده از مدل جت بازگشتی در روش المان مرزی در کاویتاسیون گسترده، منجر به پیش‌بینی مناسب هندسه حفره و نیز ضریب پسا می‌شود. از مهم‌ترین مزیت‌های این روش، سرعت بالای همگرایی و دقت نسبتاً مطلوب می‌باشد.

کلمات کلیدی: کاویتاسیون گسترده، کاویتاسیون جزئی، المان مرزی، جت بازگشتی، متقارن محوری

## Simulation of Cavitation Flows Around Axisymmetric Bodies by the Boundary Element Method Using Re-Entrant Jet Model at the Closure of the Cavity

M. Pasandidehfar Associate Professor, Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad

M. Nouroozi Ph.D. Student, Mechanical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad

### Abstract

The main subject of this article is the simulation of the cavitation including partial and super cavitation over the axisymmetric bodies using a boundary element method (BEM) based on potential by re-entrant jet model in closure zone of cavity. Re-entrant jet model is one of the closure models of cavity which is in agreement with physics of unsteady cavitating flows. To simulate the cavitation region, cavity and body surfaces are modeled with plane panels. Then, by applying the integral expression of Green theory, cavitation can be modeled by distributing the source rings on cavity surfaces and dipole rings on cavity/body surfaces. The length of the cavity and re-entrant jet are assumed to be fixed as initial predictions. The cavitation number and shape of cavity are the main results of this simulation. Furthermore, the pressure coefficient in partial cavitation and drag coefficient in super cavitation are predicted. The comparison between these results with experimental and analytical ones show that simulation of partial cavitation using BEM with re-entrant jet model modified the overshoot -that exists in results of BEM simulation without using re-entrant jet model- at the end of the cavity pressure coefficient. The implemented BEM method with re-entrant jet in super cavitation led to very good results in prediction of cavity shape and drag coefficient. The main advantage of this method is shortening the time of the desirable convergence.

**Keywords:** Super Cavitation, Partial Cavitation, Boundary Element, Re-Entrant Jet, Axisymmetric

## ۱- مقدمه

طی صد سال اخیر، «کاویتاسیون» از جمله پدیده‌های فیزیکی بوده که توجه بسیاری از دانشمندان را به خود معطوف داشته است. در شرایط دما ثابت، هرگاه فشار مایع به مقداری مساوی و یا کمتر از فشار بخار اشباع آن مایع برسد، تعادل نیروهای بین مولکولی در سیال به هم خورده و در اثر آن یک تنش کششی به وجود می‌آید. تنش کششی ایجاد شده باعث رشد محدوده‌ای با سطوح معین در سیال می‌شود که فاز درون آن به صورت بخار است و در سراسر ناحیه داخل حباب، فشار ثابتی - که از فشار سیال کمتر و برابر فشار بخار اشباع مایع است - به وجود می‌آید. در صورتی که طول حفره کمتر از طول جسم باشد و یا اصطلاحاً حفره بر روی جسم بسته شود، «کاویتاسیون جزئی» و در صورتی که طول حفره از طول جسم جلوتر برود و در منطقه‌ای خارج از جسم بسته شود، «کاویتاسیون گسترده» رخ داده است. از آنجا که به وجود آمدن کاویتاسیون به افت فشار وابسته است، امکان وقوع آن در بسیاری از سیستم‌های سیالاتی مانند پمپ‌ها، نازل‌ها، پره‌های توربین، هیدروفویل‌ها وجود دارد. در این سیستم‌ها، پدیده کاویتاسیون را معمولاً با اثرات مخرب آن چون ایجاد سر و صدا، خوردگی، تخریب و کاهش کارایی سیستم‌ها می‌شناسند و تلاش محققان و مهندسان بر این بوده که به نحوی این اثرات مخرب را به حداقل برسانند. اما برخلاف سیستم‌های ذکر شده، به وجود آمدن شرایط کاویتاسیون بر روی اجسام غوطه‌ور در آب مانند پرتابه‌ها و اژدرهای زیر آبی، مزایای قابل توجهی می‌تواند داشته باشد؛ با به وجود آمدن (آوردن) کاویتاسیون در اطراف یک جسم غوطه‌ور، جسم به جای این که با فاز مایع در تماس باشد، با فاز بخار در تماس قرار می‌گیرد. با توجه به این که لزجت گازها به مراتب کمتر از لزجت مایعات است، این پدیده منجر به کاهش اساسی نیروی پسای وارد بر جسم می‌شود. از این مزیت پدیده کاویتاسیون، در پرتابه‌های زیرسطحی متقارن محوری، به عنوان عاملی جهت افزایش سرعت و کارایی استفاده می‌شود [۱].

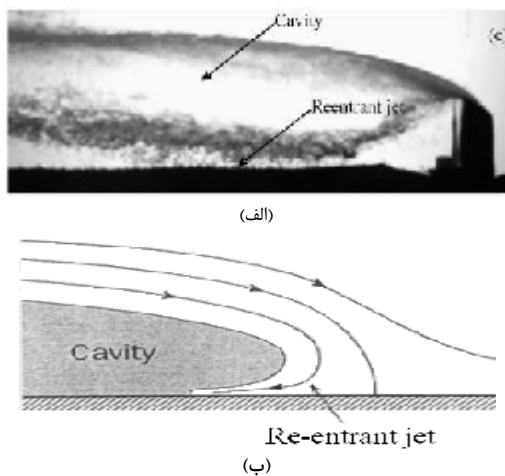
در شرایط معینی، مشاهده می‌شود که جریان سیال اصلی گذرنده از روی سطح حفره، تمایل دارد از انتهای حفره به درون آن برگردد که این جریان، «جت بازگشتی» نامیده می‌شود. علت به وجود آمدن جت بازگشتی، تمایل سیال برای حرکت از محیط با فشار بیشتر (روی سطح حفره) به محیط با فشار کمتر (داخل حفره) است. در شکل ۱ نمای از جت بازگشتی در ناحیه انتهای حفره نشان داده شده است. جت بازگشتی در شرایط خاصی ایجاد می‌شود. شرایط ایجاد جت بازگشتی عبارت است از: الف) گرادیان فشار معکوس زیاد در انتهای حفره و ب) حفره با ضخامت قابل توجه. حفره‌های با طول بلند (یعنی حفره‌هایی که

بیشتر سطح جسم را بپوشانند و تا نزدیکی لبه فرار پیشروی کنند)، شرط الف) و حفره‌های با طول کم (یعنی حفره‌هایی که در فاصله کمی از لبه حمله بسته می‌شوند)، شرط ب) را کمتر دارا هستند؛ لذا حفره‌های بلند و کوتاه، جت بازگشتی قابل ملاحظه‌ای ندارند و تنها حفره‌های با طول متوسط هستند که جریان را به صورت جت بازگشتی به درون خود منحرف می‌کنند [۲]. به علت وجود جهت‌ها و فازهای مختلف جریان سیال در انتهای کاویتا، شبیه‌سازی این منطقه بسیار پیچیده است. برخلاف حل کامل معادله ناویر-استوکس که در آن نیازی به شبیه‌سازی انتهای حفره نیست، در روش‌های عددی بر پایه پتانسیل (مانند روش المان مرزی)، می‌بایست انتهای کاویتا مدل شود. البته نباید این مسأله را به عنوان نقص روش‌های بر پایه پتانسیل انگاشت. چرا که در حل کامل معادلات ناویر-استوکس، عدد کاویتاسیون به عنوان معلوم مسأله و طول کاویتا به عنوان مجهول مسأله است، در حالی که در روش‌های عددی بر پایه پتانسیل، صرفاً جای معلوم و مجهول مسأله نسبت به حل کامل ناویر-استوکس عوض می‌شود.

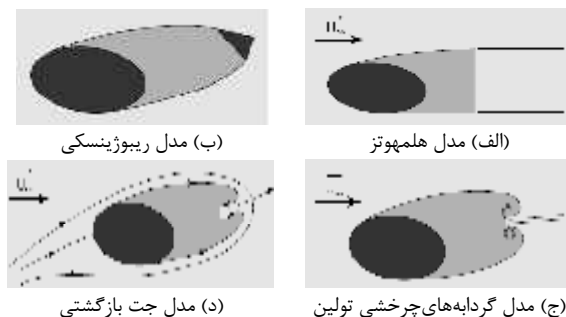
تاکنون مدل‌های مختلفی برای انتهای حفره پیشنهاد شده است که در مقاله حاضر، برای شبیه‌سازی انتهای حفره از «مدل جت بازگشتی» استفاده شده است. در مدل‌های اولیه ریاضی که برای جریان سوپرکاویتاسیون ارائه شد، فرض می‌شد حفره در پایین دست بسته نمی‌شود و تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند. این مدل توسط هلمهولتز (۱۸۶۸)، برای جریان سوپرکاویتاسیون مورد استفاده قرار گرفت و به مدل «گردابه باز» مشهور شد. بعدها وودز (۱۹۵۶ و ۱۹۶۲) نیز این مدل را جهت مطالعه جریان انتهای حفره حول هیدروفویل صفحه تخت با زاویه حمله دلخواه استفاده کرد. پس از آن، مدل «ریبوینسکی» (۱۹۶۴) مطرح گردید که در آن، انتهای حفره در کاویتاسیون جزئی، بر روی جسم بسته می‌شود و در کاویتاسیون گسترده، خطوط کاویتا در انتهای کاویتا به هم می‌رسند. مدل «گردابه‌های چرخشی تولین» (۱۹۶۴) نیز از مدل‌های دیگر ارائه شده برای انتهای کاویتا بود. در این مدل ناحیه انتهای حفره با دو گردابه چرخشی که ناشی از اختلاف سرعت روی حفره و ناحیه دنباله بود، بسته می‌شود. در شکل ۲ طرحواره ای از مدل‌های مختلف انتهای حفره نشان داده شده است [۳].

پس از آنکه برای اولین بار، بیرهوف [۴] و گیلبرگ [۵] در یک جریان متقارن پشت صفحه تخت عمودی، جت بازگشتی را مشاهده نمودند، افراد زیادی سعی در شبیه‌سازی این پدیده داشته‌اند. فرنس و هاتون [۶]، پلون و راثو [۷]، فاین و کیناس [۸] و کریشناسوامی [۹] از جمله این افرادند. اهلمن و همکاران

حفره بر روی جسم بسته می‌شود و در مدل بستن ساده کاویتاسیون گسترده، انتهای حفره بر روی خط محور تقارن کاویتاتور بسته می‌شود. هنگامی که از مدل بستن ساده برای شبیه‌سازی انتهای حفره استفاده شود در این منطقه، نقطه سکونی به وجود می‌آید که واقعیت فیزیکی ندارد. لذا ضریب فشار به دست آمده از این مدل در انتهای حفره، دارای پرش غیرمتعارفی است که با به‌کارگیری مدل جت بازگشتی (مقاله حاضر)، پرش غیرمتعارف ضریب فشار اصلاح و به مقدار تجربی نزدیک خواهد شد. در مرجع [۹]، از این روش برای تعیین شکل اولیه حفره روی هیدروفویل‌ها استفاده گردیده که در مقاله حاضر، این روش برای جریان حفره حول اجسام متقارن محوری استفاده شده است. با تعبیه یک جت بازگشتی با طول و ارتفاع مشخص در شکل حفره همگرا شده که در آن از مدل بستن ساده در انتهای حفره استفاده گردیده، شکل اولیه مدل جت بازگشتی حاصل خواهد شد.



شکل ۱- الف) کاویتاسیون گسترده و جت بازگشتی ایجاد شده در پشت یک پله. ب) طرحواره کاویتاسیون جزئی و جت بازگشتی در ناحیه انتهای آن



شکل ۲- مدل‌های مختلف بستن حفره

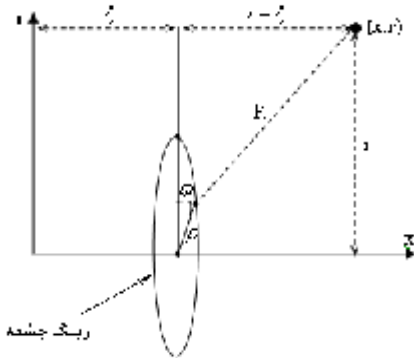
[۱۰] نیز از مدل جت بازگشتی برای تحلیل کاویتاسیون گسترده پشت کاویتاتورهای متقارن محوری مانند دیسک استفاده نموده‌اند. در این مدل، با برخورد دو خط جریان حفره، یک جت بازگشتی در ناحیه بسته شدن حفره شکل می‌گیرد و در واقع یک جریان جت سیال از منطقه انتهای حفره به درون حفره جریان می‌یابد. بنابراین نقطه سکون مقداری به عقب منتقل می‌شود. این نقطه سکون به شدت ناپایدار است. یکی از مزیت‌های مدل جت بازگشتی این است که فشار سکون واقعی تری را در مقایسه با فشار سکون نتیجه شده از مدل‌های دیگر (مانند مدل ریپوژینسکی) ارائه می‌دهد. در مقاله حاضر، کار اهلمن و همکاران در مرجع [۱۰] برای شبیه‌سازی کاویتاسیون گسترده حول دیسک انجام و برای شبیه‌سازی کاویتاسیون جزئی بر روی سه هندسه استوانه سرتخت، سرکروی و سرمخروطی توسعه داده شده است.

با توجه به این‌که پایه اصلی روش المان مرزی، جریان پتانسیل می‌باشد، در صورتی می‌توان از این روش برای تحلیل جریان کاویتاسیون استفاده نمود که ثابت شود جریان کاویتاسیون پتانسیلی است. آزمایشات تجربی لابر تاکس و همکاران نشان می‌دهد که جریان در اطراف حفره با تقریب خوبی پتانسیلی است [۱۱]. لذا می‌توان از نظریه‌های پتانسیل برای شبیه‌سازی کاویتاسیون حول اجسام استفاده نمود. اگرچه پدیده کاویتاسیون ذاتاً غیردائم است اما غالباً به صورت دائم تحلیل شده است [۱۰-۸، ۱۲]. با وجود ماهیت ناپایای حفره در طول زمان و نوسانی بودن طول حفره، مشاهدات تجربی و عددی نشان می‌دهد که در هر عدد کاویتاسیون خاص، طول حفره حول مقدار ثابتی نوسان می‌کند و در هندسه‌هایی مانند اژدرها (هندسه‌هایی با طول زیاد و سرعت جریان بالا)، مقدار نوسان‌های حفره درصد کمی از طول متوسط حفره است؛ لذا در مورد اژدرها می‌توان گفت یک تناظر یک‌به‌یک بین طول متوسط حفره و عدد کاویتاسیون وجود دارد. نتایج تجربی جریان کاویتاسیون موجود حول هندسه‌های متقارن محوری نیز بر اساس همین طول متوسط زمانی گزارش شده‌اند [۲].

روش المان مرزی حاضر، براساس «تئوری گرین» می‌باشد. تئوری گرین بیان می‌کند که «هر جریان غیرچرخشی تراکم‌ناپذیر را می‌توان با یک توزیع چشمه، گردابه یا دوگان روی سطوح مقید آن شبیه‌سازی نمود». در پژوهش حاضر، بر اساس این نظریه، حلقه‌های چشمه و دوگان روی مرز حفره و جسم توزیع گردیده و با در نظر گرفتن یک طول اختیاری برای حفره و جت بازگشتی، شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون انجام گرفته است. طول استوانه، حفره و جت بازگشتی نسبت به قطر استوانه بی‌بعد گردیده است. در مدل بستن ساده کاویتاسیون جزئی، انتهای

$$\phi = x + \varphi \quad (5)$$

در شکل ۳، مولفه‌های مختصات استوانه‌ای استفاده شده در روابط (۲) و (۳) معرفی شده است.



شکل ۳- مختصات استوانه‌ای برای به دست آوردن حلقه چشمه

با اعمال شرایط مرزی بر انتگرال گرین مشخص می‌شود که بر روی سطح جسم صرفاً حلقه‌های دوگان و بر روی سطح حفره مجموع حلقه‌های دوگان و چشمه اعمال می‌شود.

### ۳- شرایط مرزی

الف) شرط مرزی سینماتیکی بر روی سطح جسم و حفره: بر اساس شرط نفوذ ناپذیری سطح می‌دانیم که جریان هیچ مولفه عمودی بر سطح جسم ندارد. همچنین فرض می‌شود که جریان هیچ مولفه عمودی بر سطح حفره نیز نداشته باشد. این بدان معناست که جهت جریان بر روی سطح جسم و حفره، صرفاً در راستای موازی این سطوح می‌باشد. بنابراین روی سطح جسم ( $S_b$ ) و سطح حفره ( $S_c$ ) داریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_b \cup S_c \quad (6)$$

که فرم پتانسیل اختلالی آن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -x_n \quad \text{on } S_b \cup S_c \quad (7)$$

که در رابطه فوق،  $x_n$  مولفه عمودی سطح است. برای ارضای شرط سینماتیکی روی سطح حفره، می‌بایست سرعت عمود بر المان‌های حفره صفر باشد. لذا می‌بایست شیب بردار سرعت و شیب مرز حفره در هر نقطه روی آن، با هم برابر باشند. این شرط از نظر فیزیکی به معنای آن است که هیچ جریانی به مرز حفره وارد و یا از آن خارج نمی‌شود. شرط سینماتیکی روی سطح حفره بر معادلات انتگرالی جهت حل دستگاه معادلات خطی اعمال نمی‌شود و صرفاً جهت اصلاح موقعیت المان‌های حفره در تکرارهای متوالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع،

### ۲- استخراج روابط ریاضی حاکم

مناسب‌ترین دستگاه مختصات برای جریان‌های متقارن محوری، مختصات استوانه‌ای است. بیان انتگرالی تئوری گرین در این دستگاه مختصات به صورت زیر است:

$$2\pi\phi(r, x) = \iint_S \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} G(x, r; \xi, \rho) - \varphi(r, x) \frac{\partial G(x, r; \xi, \rho)}{\partial n} \right\} \rho d\varphi ds \quad (1)$$

که در آن  $n$  بردار عمود بر سطح  $s$  طول کمان طی شده روی سطح  $x, r$  مولفه‌های دستگاه مختصات متقارن محوری و توابع  $G$  و  $\partial G / \partial n$  به ترتیب تابع گرین و مشتق نرمال آن است که به ترتیب معرف یک حلقه چشمه و یک حلقه دوگان می‌باشند و  $\varphi$  پتانسیل اختلالی توزیع شده روی سطح حل هستند [۳]. تابع پتانسیل اختلالی  $\varphi$  در یک نقطه، تابع پتانسیلی است که اثر همه اجزای پتانسیل به جز اثر پتانسیل جریان آزاد (سرعت یکنواخت روی حفره) را در خود دارد [۱۲]. با توجه به متقارن محوری بودن هندسه‌های مورد بررسی، عناصر پتانسیل توزیع شده روی سطوح جسم و حفره می‌بایست به صورت حلقه باشند تا برای استفاده در دستگاه مختصات استوانه‌ای مناسب باشند. حلقه‌های چشمه و دوگان مورد استفاده در تئوری گرین را می‌توان با انتگرال‌گیری از این عناصر پتانسیل حول محور تقارن به دست آورد. بدین ترتیب، تابع پتانسیل یک حلقه چشمه ( $G$ ) با شعاع  $\rho$  که در موقعیت  $\xi$  قرار گرفته در نقطه  $(x, r)$  به ازای واحد سطح  $s$  به صورت زیر است:

$$G(x, r; \xi, \rho) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\rho d\varphi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi)}} = \rho J_1^0(A, B) \quad (2)$$

همچنین تابع پتانسیل یک حلقه دوگان ( $\partial G / \partial n$ ) که حاصل انتگرال‌گیری از حلقه چشمه در راستای عمود بر المان مرزی است عبارت است از:

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, r; \xi, \rho) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi)}} \right\} \rho d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \xi_n \frac{\partial G}{\partial \xi} + \rho_n \frac{\partial G}{\partial \rho} \right\} \rho d\varphi \quad (3)$$

در روابط (۲) و (۳)، از توزیع پتانسیل اختلالی استفاده شده است که رابطه آن با توزیع پتانسیل کلی  $\phi$  به صورت زیر است:

$$\phi = \vec{U}_\infty \cdot \vec{X} + \varphi \quad (4)$$

که در آن  $U_\infty$ ، سرعت جریان آزاد گذرنده از روی سطح هندسه است. با در نظر گرفتن  $U_\infty$  برابر واحد، رابطه (۴) به این صورت درمی‌آید:

که در آن  $s_j$  و  $x_j$  به ترتیب برابر طول کمان و مولفه  $x$  لبه سطح مقطع جت می‌باشد.

#### ۴- استخراج معادلات انتگرالی

در رابطه (۱)، قدرت دوگانها ( $\phi$ ) روی سطح جسم و قدرت چشمهها ( $\partial\phi/\partial n$ ) روی سطح حفره مجهول است. با توجه به شرایط مرزی ارائه شده، در صورت معلوم شدن عدد کاپیتاسیون،  $\phi$  بر روی حفره و جت بازگشتی مطابق روابط (۱۱) و (۱۴) و  $\partial\phi/\partial n$  بر روی جسم و جت بازگشتی مطابق روابط (۷) و (۱۳) معلوم خواهد بود. با انتقال معلومها به سمت راست و مجهولها به سمت چپ تساوی، رابطه (۱) روی مرز جسم به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$2\pi\phi + \iint_{S_b} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_b+S_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS - \iint_{S_c+S_j} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad \text{on } S_b \quad (15)$$

و نیز رابطه (۱) برای مرز کاپیتی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\iint_{S_b} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_b} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS - 2\pi\phi - \iint_{S_c} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad \text{on } S_c \quad (16)$$

با اعمال شرایط مرزی سینماتیکی و دینامیکی روی مرزها مطابق روابط (۷)، (۱۱) و (۱۳)، رابطه انتگرالی (۱۵) که برای جریان روی سطح جسم به دست آمده، به صورت ذیل بازنویسی می‌شود:

$$2\pi\phi + \iint_{S_b} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS + \phi_0 \iint_{S_c+S_j} \frac{\partial G}{\partial n} dS + A\sqrt{1+\sigma} \left[ \iint_{S_c+S_j} (s-s_0) \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_j} G dS \right] - \iint_{S_b} x_n G dS + \iint_{S_c+S_j} (x-x_0) \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_j} x_n G dS \quad \text{on } S_b \quad (17)$$

و رابطه (۱۶) نیز که برای جریان روی حفره به دست آمده، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\iint_{S_b} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS + \phi_0 \left[ 2\pi + \iint_{S_c+S_j} \frac{\partial G}{\partial n} dS \right] + A\sqrt{1+\sigma} \left[ 2\pi(s-s_0) + \iint_{S_c+S_j} (s-s_0) \frac{\partial G}{\partial n} dS - \iint_{S_j} G dS \right] - \iint_{S_b} x_n G dS - \iint_{S_j} x_n G dS + \left[ 2\pi(x-x_0) + \iint_{S_c+S_j} (x-x_0) \frac{\partial G}{\partial n} dS \right] \quad \text{on } S_c \quad (18)$$

حل زمانی همگرا می‌شود که شرط مرزی سینماتیکی روی حفره ارضا شده باشد.

ب) شرط مرزی دینامیکی روی سطح حفره: چون جریان حول حفره تا حد زیادی غیرچرخشی است، می‌توان با استفاده از معادله برنولی، سرعت ثابتی برابر  $U_\infty \sqrt{1+\sigma}$  برای جریان روی سطح حفره به دست آورد که  $\sigma$  عدد بی‌بعد کاپیتاسیون است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \frac{P_\infty - P_c}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (8)$$

در رابطه (۸)،  $P_\infty$  و  $U_\infty$  به ترتیب سرعت و فشار جریان آزاد و  $P_c$  فشار بخار مایع می‌باشد. با بی‌بعد سازی سرعت با  $U_\infty$ ، مولفه مماسی سرعت روی سطح حفره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \sqrt{1+\sigma} \quad \text{on } S_c \quad (9)$$

که به فرم پتانسیل اختلالی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \sqrt{1+\sigma} - x_s \quad \text{on } S_c \quad (10)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$\phi = \phi_0 + \sqrt{1+\sigma}(s-s_0) - (x-x_0) \quad \text{on } S_c \quad (11)$$

ج) شرط مرزی دینامیکی روی سطح جت بازگشتی: آزمایشات تأیید می‌کنند که سرعت جت بازگشتی از مرتبه سرعت جریان آزاد است [۱۳]. البته ضخامت حفره می‌تواند سرعت جت بازگشتی را دستخوش تغییراتی کند. بر اساس تحلیل‌های جریان پتانسیل، فرض می‌شود که جت بازگشتی با ضخامت ثابتی به درون حفره برمی‌گردد و همچنین سرعت جریان عمود بر مقطع ورودی جت بازگشتی، برابر سرعت جریان در مرز حفره یعنی  $U_\infty \sqrt{1+\sigma}$  است که با بی‌بعد سازی این سرعت با سرعت جریان آزاد، برابر  $\sqrt{1+\sigma}$  خواهد شد [۲]. لذا داریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sqrt{1+\sigma} \quad \text{on } S_j \quad (12)$$

با بازنویسی رابطه (۱۲) به فرم پتانسیل اختلالی رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sqrt{1+\sigma} - x_n \quad \text{on } S_j \quad (13)$$

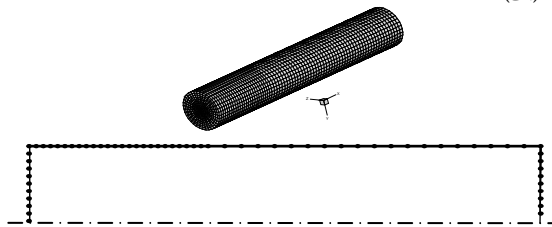
از طرفی، پتانسیل جریان بر روی سطح جت بازگشتی ثابت فرض می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۱)، پتانسیل روی سطح جت برابر است با:

$$\phi_{jet} = \phi_0 + \sqrt{1+\sigma}(s_{jet} - s_0) - (x_{jet} - x_0) \quad (14)$$

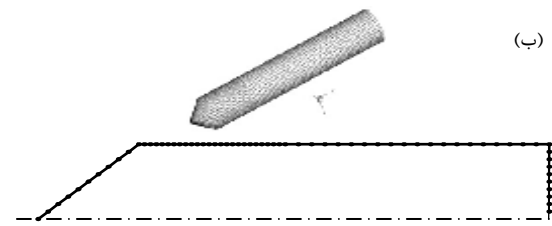
ب) حفره: در مدل‌های پتانسیلی، طول حفره و نقطه شروع و انتهای آن ورودی مسأله است. در هندسه‌های با شکستگی، کاویتاسیون از نقطه شکستگی شروع می‌شود و در هندسه‌های هموار، مطابق آزمایشات واشیو و همکاران، نقطه شروع کاویتاسیون از نقطه جدایش جریان آغاز می‌گردد [۱۴]. بنابراین در هندسه سرتخت و سرمخروطی و نیز کاویتاتور دایروی تخت، شروع حفره از نقطه شکستگی آنها (لبه پیشانی) در نظر گرفته می‌شود. اما در استوانه سرکروی که بدون شکستگی است، نقطه شروع حفره منطبق بر نقطه جدایش جریان است.

تعیین نقطه جدایش جریان کار مشکلی می‌باشد زیرا نقطه جدایش جریان، به شدت متأثر از سرعت جریان سیال و لزجت سیال می‌باشد. در این پژوهش، نقطه شروع حفره استوانه سرکروی، یک المان قبل از محل اتصال پیشانی با بدنه (زاویه‌ای کمتر از ۹۰ درجه نسبت به نقطه سکون) در نظر گرفته شده است. نقطه انتهای حفره که طول حفره را نیز مشخص می‌کند کاملاً اختیاری است و به صورت کسری از طول جسم در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه شکل حفره در هر تکرار تغییر می‌کند، المان‌های روی سطح حفره نسبت به المان‌های روی سطح استوانه ریزتر در نظر گرفته شده‌اند. در شکل ۴ المان‌های ریزتر حفره مشخص می‌باشد.

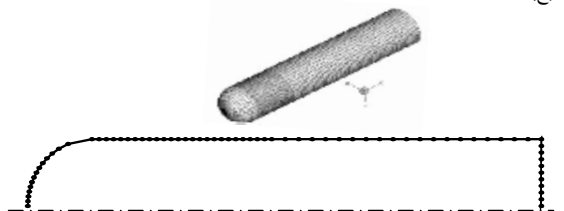
(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۴- نمای سه بعدی هندسه استوانه‌ای شکل الف) سرتخت، ب) سرمخروطی و ج) سرکروی به همراه توزیع المان‌های روی

سطح آن

برای کامل شدن تعداد معادلات در دستگاه معادلات خطی، از این مفهوم استفاده می‌شود که مجموع قدرت خالص چشمه‌های توزیع شده روی سطح حفره با شار عبوری از مقطع عمودی جت بازگشتی برابر است [۵]. می‌توان این مفهوم را به صورت زیر بیان نمود:

$$\iint_{S_c+S_j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \sqrt{1+\sigma} \iint_{S_j} dS \quad (19)$$

به منظور استفاده از روش‌های حل عددی معادلات انتگرالی، می‌بایست این معادلات را با گسسته‌سازی، به صورت گروهی از معادلات جبری درآورد. با حل این دستگاه معادلات، قدرت چشمه‌ها و دوگان‌ها به دست می‌آید. برای این منظور، ابتدا باید برای حفره و جت بازگشتی، یک شکل اولیه به عنوان حدس اولیه تعریف شود. سپس سطح جسم، حفره و جت بازگشتی به المان‌های مستقیم‌الخطی تقرب زده شود.

با نوشتن معادله (۱۷) برای المان‌های سطح جسم و معادله (۱۸) برای المان‌های سطح حفره، تعداد  $N = N_b + N_c$  معادله جبری به دست می‌آید. مجهولات مسأله شامل  $N_b$  قدرت دوگان روی سطح جسم،  $N_c$  قدرت چشمه روی سطح حفره و یک عدد کاویتاسیون (سرعت روی سطح حفره)، یعنی  $\sqrt{1+\sigma}$  می‌باشد. بنابراین تعداد مجهولات  $N+1$  است که یکی از تعداد معادلات بیشتر است. برای کامل شدن دستگاه معادلات خطی نیاز به یک معادله کمکی داریم که در بخش قبل، در قالب معادله (۱۹) معرفی گردید. با حل دستگاه معادلات خطی، قدرت چشمه‌های المان‌های روی حفره، قدرت دوگان‌های روی المان‌های توزیع شده روی سطح جسم و نیز عدد کاویتاسیون به دست خواهد آمد.

## ۵- هندسه مسأله

الف) جسم: در این مقاله، برای تحلیل کاویتاسیون جزئی، سه هندسه متقارن محوری یعنی استوانه سرتخت، استوانه سرکروی و استوانه سرمخروطی (با زاویه نیم مخروط ۴۰ درجه) مورد بررسی قرار گرفته است و برای تحلیل کاویتاسیون گسترده، یک کاویتاتور دایروی تخت در نظر گرفته شده است. طول حفره نسبت به قطر پیشانی استوانه‌ها و کاویتاتور بی بعد گردیده است. در شکل ۴ نمای سه بعدی هندسه‌های متقارن محوری سرتخت، سرکروی و سرمخروطی و نحوه المان‌بندی روی آن نشان داده شده است. نمای کاویتاتور دایروی تخت جهت تحلیل کاویتاسیون گسترده نیز مانند پیشانی استوانه سر تخت (استوانه-ای به طول صفر) می‌باشد.

دستگاه معادلات گرین بر روی سطح حفره، المان‌های مذکور نیز حل می‌شوند. مقطع عمودی جت بازگشتی - که از آخرین نقطه پیشروی جت بازگشتی به درون حفره شروع و به سطح (در کاویتاسیون جزئی) و محور تقارن کاویتاتور (در کاویتاسیون گسترده) ختم می‌شود- نیز می‌بایست المان‌بندی گردد و در معادلات گرین مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به اینکه قدرت چشمه‌های قرار داده شده بر روی مقطع عمودی جت، مجهول مستقلی نمی‌باشد و با به دست آمدن عدد کاویتاسیون و در نتیجه سرعت جریان جت بازگشتی  $(\sqrt{1+\sigma})$  از حل دستگاه معادلات، بر اساس رابطه (۱۴)، محاسبه خواهد شد، نیازی به حل المان‌های روی مقطع عمودی جت نیست و صرفاً به‌عنوان شرط مرزی دستگاه در معادلات گرین مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدین صورت شکل اولیه آماده می‌شود. در بخش نتایج این مقاله، نشان داده خواهد شد که تا حدود زیادی، حل از طول در نظر گرفته برای جت بازگشتی مستقل است.

همان‌گونه که قبلاً عنوان گردید، شرط سینماتیکی روی سطح حفره یعنی رابطه (۶)، بر معادلات (۱۷) و (۱۸) اعمال نگردید. در این مقاله، از شرط سینماتیکی روی سطح حفره برای تصحیح شکل اولیه حفره و شرط همگرایی حل استفاده شده است. به عبارت دیگر حل زمانی همگرا خواهد شد که سرعت عمود بر المان‌های حفره به صفر میل کند یعنی شیب بردار سرعت و شیب مرز حفره در هر نقطه روی آن، باید با هم برابر باشند و هیچ جریانی به مرز وارد و یا از آن خارج نشود. در صورتی که طول و عرض اولیه یک المان از حفره با زاویه  $\theta$  نسبت به محور تقارن، برابر  $(\Delta x, \Delta y)$  باشد و در تکرار بعد مختصات المان به  $(\Delta x + \delta x, \Delta y + \delta y)$  تغییر پیدا کند و المان به اندازه  $\delta\theta$  در جهت پادساعتگرد بچرخد، با توجه به شرط سینماتیکی روی مرز حفره، مقدار این تغییر به‌صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\delta x = -\Delta y \delta\theta \quad (21)$$

$$\delta y = \Delta x \delta\theta$$

که در آن،  $\delta\theta$  میزان زاویه چرخش المان در دو تکرار متوالی است. با استفاده از روابط هندسی، مقدار  $\delta\theta$  به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta\theta = \frac{v\Delta x - u\Delta y}{u\Delta x + v\Delta y} \quad (22)$$

که  $u$  و  $v$  به ترتیب سرعت‌های افقی و عمودی روی المان هستند. بدین ترتیب مقدار  $(\delta x, \delta y)$  برای نقطه انتهایی هر المان حفره به‌دست می‌آید و به‌منظور تصحیح هندسه حفره به نقاط انتهایی المان‌ها اضافه می‌شود. این کار در حالی صورت می‌گیرد که نقطه شروع حفره بر روی جسم ثابت باقی می‌ماند و بقیه

جت بازگشتی: در این پژوهش، ضخامت جت بازگشتی ثابت در نظر گرفته می‌شود. به‌منظور تعیین ضخامت جت بازگشتی، از رابطه تحلیلی زیر که توسط کالتر [۱۳] ارائه گردیده استفاده می‌شود:

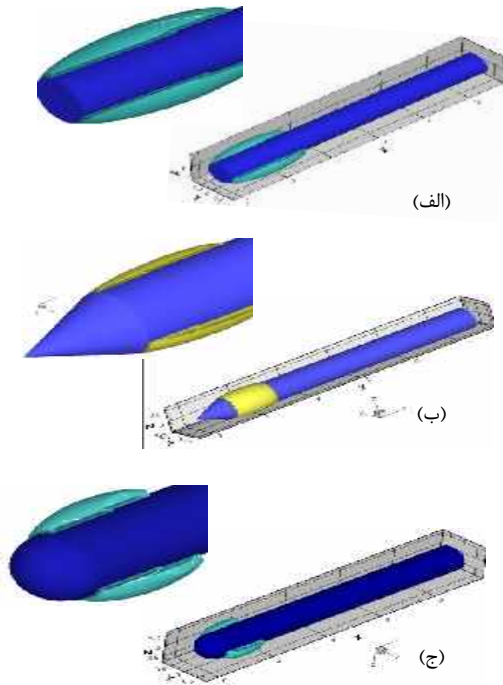
$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} \right] + \frac{1}{4} \frac{dC_p}{d(x/l)} d \quad (20)$$

که رابطه‌ای بر حسب عدد کاویتاسیون  $(\sigma)$ ، گرادیان ضریب فشار  $(C_p)$ ، در انتهای حفره، بیشینه ضخامت حفره  $(d)$  و طول حفره  $(l)$  است. در واقع، قسمت اول رابطه (۲۰) اثر کاویتاسیون بر ضخامت جت بازگشتی و قسمت دوم رابطه (۲۰) اثر گرادیان فشار انتهای حفره را نشان می‌دهد. عبارت  $dC_p/d(x/l)$  بر اساس شیب نمودار توزیع ضریب فشار در منطقه انتهای حفره محاسبه و در رابطه (۲۰) لحاظ می‌گردد. ضخامت جت بازگشتی به دست آمده از رابطه (۲۰) کمتر از ۳۰ درصد بیشینه ضخامت حفره می‌باشد که با نتایج گزارش شده مطابقت دارد [۱۳].

اگر چه در واقعیت، طول جت بازگشتی تابع شرایط ناپایای حفره است اما در این پژوهش، مقدار طول جت بازگشتی، برابر درصدی اختیاری از طول حفره در نظر گرفته می‌شود. طول جت بازگشتی در همه شرایط، برابر نصف طول حفره در نظر گرفته شده است. نشان داده خواهد شد که نتایج در محدوده وسیعی، از طول اختیار شده برای جت بازگشتی مستقل است.

## ۶- شکل اولیه و همگرایی حل

در روش المان مرزی با جت بازگشتی، شکل اولیه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است به نحوی که حل برای برخی از شکل‌های اولیه همگرا نمی‌شود. این مسأله یکی از نقاط ضعف مدل جت بازگشتی است [۲]. لذا به منظور سرعت همگرایی مسأله، از نتایج شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون با استفاده از مدل بستن ساده، به عنوان شکل اولیه استفاده شده است. مراحل انجام این کار بدین صورت است که پس از محاسبه ارتفاع جت بازگشتی از رابطه (۲۰)، نقطه انتهایی حفره که در مدل بستن ساده بر روی جسم بسته می‌شود، در راستای عمود بر محور تقارن جسم و به اندازه ارتفاع جت، از سطح جسم جدا می‌شود و بدین ترتیب نقطه شروع برگشت جت به درون حفره مشخص شده و به اندازه طول در نظر گرفته شده برای جت بازگشتی، به درون حفره پیشروی می‌کند. در روش المان مرزی، میزان پیشروی جت بازگشتی به درون حفره ورودی مسأله است. با توجه به اینکه این طول، در فصل مشترک حفره و جریان جت قرار دارد، لذا آن را باید به‌عنوان قسمتی از حفره در نظر گرفت و متناسب با اندازه المان‌های دیگر مسأله، المان‌بندی نمود. بدین ترتیب در حل



شکل ۵- نمای سه بعدی کاویتاسیون جزئی روی استوانه الف) سرتخت، ب) سرمخروطی و ج) سرکروی در عدد کاویتاسیون ۰/۳

در شکل ۶، توزیع ضریب فشار روی بدنه استوانه سرتخت، سرمخروطی و سرکروی حاصل از مدل جت بازگشتی، با نتایج حاصل از روش المان مرزی با استفاده از مدل بستن ساده و داده‌های تجربی مقایسه گردیده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود نتایج این پژوهش، ضمن اصلاح نسبی نتایج روش المان مرزی با مدل بستن ساده و از بین بردن پرش غیرمعمول ضریب فشار در منطقه انتهای حفره (که ناشی از ایجاد یک نقطه سکون غیرواقعی در این نقطه به علت استفاده از مدل بستن ساده در انتهای حفره است)، تطابق خوبی را با نتایج عددی و تجربی نشان می‌دهد. در هر سه هندسه ارائه شده در شکل ۶، یک تغییر ناگهانی در ضریب فشار انتهای حفره مشاهده می‌شود که علت آن عدم تطابق فرض سرعت ثابت روی مرز حفره با واقعیت مسئله است. در شکل ۷ اثر تغییر درصد پیشروی جت بازگشتی به درون حفره (طول جت بازگشتی)،  $L_{jet}/L_{cavity}$ ، بر حسب عدد کاویتاسیون،  $\sigma$ ، نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تا حدود  $L_{jet}/L_{cavity} < 75\%$ ، حل، از طول جت بازگشتی مستقل است. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که با پیشروی جت بازگشتی و نزدیک شدن جت بازگشتی به لبه حمله، از طرف جت به سطح داخلی حفره (در نزدیکی نقطه شروع حفره) ضربه وارد می‌شود و قسمت عقبی حفره جدا شده و به یک حباب ابری شکل تغییر شکل می‌دهد. در حل کاویتاسیون به روش المان مرزی، با پیشروی زیاد جت به درون حفره و رسیدن

نقاط نسبت به آن تغییر می‌کنند. این تصحیح تا جایی صورت می‌گیرد که شرط مرزی سینماتیکی مرز حفره ارضا شود. بر این اساس، در تکرارهای مختلف حل، شکل اولیه حفره تصحیح خواهد شد و در نهایت حل همگرا شده و شکل نهایی جریان کاویتاسیون (گسترده و جزئی) حاصل خواهد شد.

در این پژوهش، استقلال جواب از تعداد المان‌های توزیع شده روی سطح جسم، حفره و جت بازگشتی نیز بررسی شده است. مشخص گردید که با افزایش تعداد المان‌ها، عدد کاویتاسیون به سمت مقدار خاصی میل می‌کند. در مجموع نتایج حل در هندسه‌های مختلف، از تعداد المان‌های بیش از ۱۴۵ روی مرزهای مسئله مستقل شده است (تعداد المان‌های بیش از ۸۰ روی سطح جسم، تعداد المان‌های بیش از ۴۵ روی سطح حفره، تعداد المان‌های ۱۰ روی میزان پیشروی جت به داخل حفره و تعداد المان‌های ۱۰ برای مقطع عمودی انتهای جت) و برای ترکیب‌های مختلف از تعداد المان‌های بیش از این مقدار نیز حل مستقل از تعداد المان‌ها گردیده است. عدم نیاز به شبکه‌بندی ریز و استقلال حل در تعداد المان‌های کم و در نتیجه سرعت همگرایی بالا از مزیت‌های قابل توجه این شبیه‌سازی می‌باشد.

## ۷- نتیجه‌گیری

الف) کاویتاسیون جزئی: در شکل ۵، نمای سه بعدی از کاویتاسیون جزئی روی استوانه‌های سرتخت، سرمخروطی و سرکروی حاصل از این تحلیل برای عدد کاویتاسیون ۰/۳ نشان داده شده است. در جدول ۱ نیز طول حفره به دست آمده برای این سه هندسه در عدد کاویتاسیون ۰/۳ با هم مقایسه گردیده است.

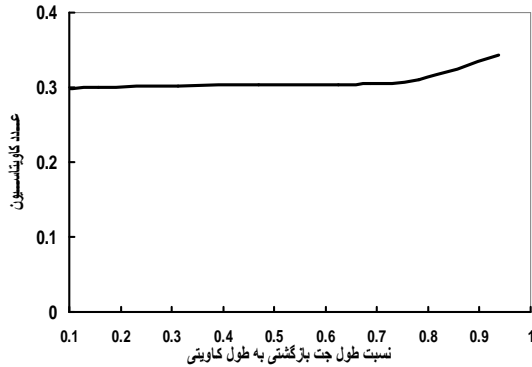
جدول ۱- مقایسه طول حفره جزئی در هندسه‌های مختلف در عدد کاویتاسیون ۰/۳

هندسه	سرتخت	سرمخروطی	سرکروی
$L_{cavity} / d_{cylinder}$	۳,۲۱۵	۱,۷۲	۱,۳۲

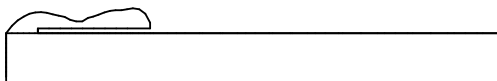
نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که در یک عدد کاویتاسیون مشخص، طول حفره در استوانه سرتخت بیشترین مقدار و در استوانه سرکروی کمترین مقدار را دارد. این بدان علت است که هر چه ناهماری روی سطح جسم، دارای شیب تندتری باشد، میزان پرش سیال از روی آن سطح بیشتر و در نتیجه طول حفره بزرگتر خواهد بود. بیشتر بودن طول حفره در استوانه سرتخت و کمتر بودن طول حفره در استوانه سرکروی نیز بر اساس این مفهوم فیزیکی توجیه خواهد شد.



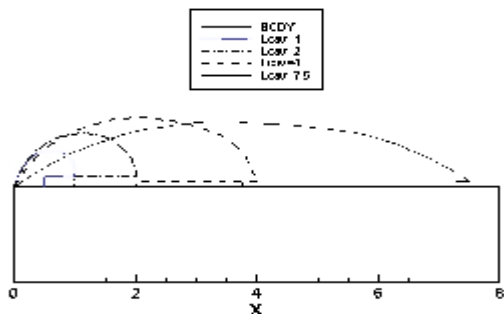
استوانه‌های با جریان کاویتاسیون می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در شکل ۱۰ نیز نمودار کاربردی دیگری که تغییرات بیشینه ضخامت حفره‌های ارائه شده در شکل ۹ را نسبت به تغییر عدد کاویتاسیون نشان می‌دهد ارائه گردیده است.



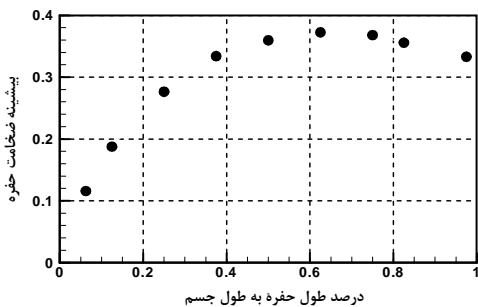
شکل ۷- تغییرات عدد کاویتاسیون نسبت به طول جت بازگشتی بی‌بعد شده نسبت به طول حفره



شکل ۸- پیش‌بینی جدا شدن قسمت عقب حفره در هنگام پیشروی بیش از حد جت به درون حفره

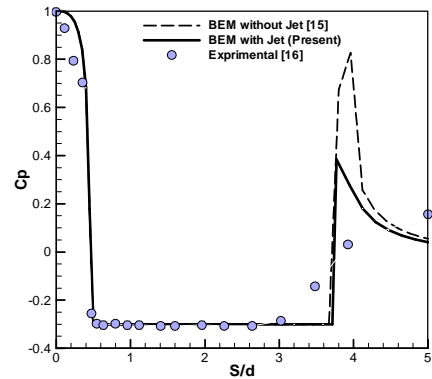


شکل ۹- بررسی اثر تغییر طول جسم بر عدد کاویتاسیون در یک طول حفره مشخص

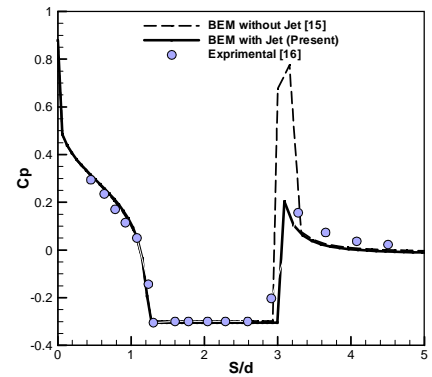


شکل ۱۰- نمودار تغییرات بیشینه ضخامت حفره نسبت به طول حفره

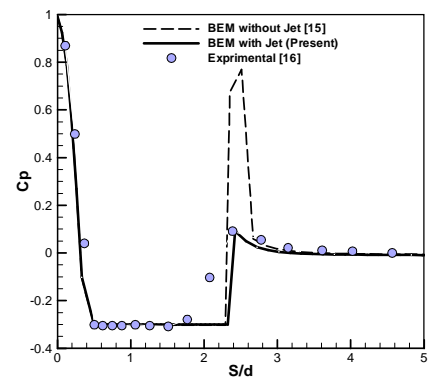
به نزدیکی‌های لبه حمله، عدد کاویتاسیون به سرعت افزایش و حل نیز واگرا خواهد شد. جالب است که روش المان مرزی با جت بازگشتی، مطابق شکل ۸، تا حدودی پدیده جدا شدن قسمت عقب حفره و باقی ماندن یک حفره کوچک در لبه حمله را پیش‌بینی می‌کند.



(الف)



(ب)

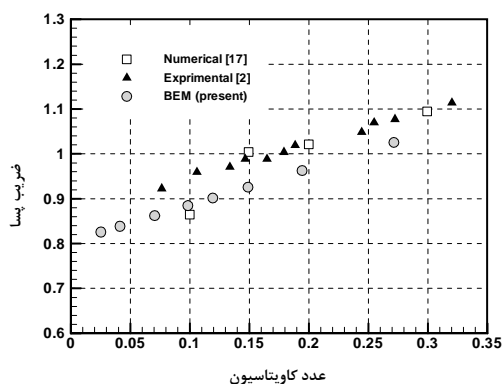


(ج)

شکل ۶- تغییر ضریب فشار بر روی استوانه (الف) سرتخت، (ب) سرمخروطی و (ج) سرکروی در عدد کاویتاسیون ۰/۳ و مقایسه آن با نتایج روش المان مرزی مرجع [۱۵] و نتایج عددی مرجع [۱۶]

در شکل (۹) شکل حفره در طول حفره‌های مختلف بر روی یک استوانه سرتخت به طول ۸ نشان داده شده است. این نمودار از لحاظ عملی نمودار کاربردی و مفیدی است که در طراحی

در شکل ۱۲، ضریب پسای حاصل از روش المان مرزی با مدل جت بازگشتی (مقاله حاضر)، با داده‌های تجربی مرجع [۲] و نتایج حل عددی مرجع [۱۷] مقایسه گردیده است. مقدار ضریب پسای پیش‌بینی‌شده توسط روش حاضر در عدد کاویتاسیون‌های مختلف، حداکثر ۵ درصد کمتر از داده‌های تجربی مرجع [۲] و نتایج حل عددی مرجع [۱۷] است. وودز در مرجع [۲] نیز به این مسأله اشاره کرده است که مدل جت بازگشتی در پیش‌بینی ضریب پسا با اندکی خطا همراه است. در شکل ۱۳ تغییرات بیشینه قطر حفره بر حسب عدد کاویتاسیون که از روش المان مرزی حاضر به دست آمده است، با نتایج روش المان مرزی مرجع [۱۵]، نتایج تجربی مرجع [۲]، نتایج تحلیلی ریچارد و نتایج عددی مرجع [۱۷] مقایسه شده است. شکل ۱۳ بیانگر آن است که روش المان مرزی حاضر به خوبی می‌تواند تغییرات طول حفره گسترده بر حسب عدد کاویتاسیون را نشان دهد اما در اعداد کاویتاسیون کوچک، نتایج این تحلیل مقدار کمی با نتایج تجربی اختلاف دارد.



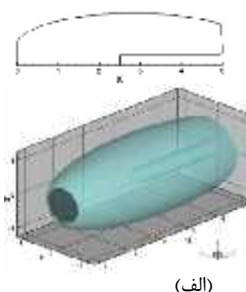
شکل ۱۲- تغییر ضریب پسا بر حسب عدد کاویتاسیون برای دیسک و مقایسه نتایج با داده‌های تجربی مرجع [۲] و نتایج عددی مرجع [۱۷]

شکل حفره گسترده پشت هندسه‌های متقارن محوری، معمولاً به صورت بیضی‌گون و مستقل از هندسه کاویتاتور می‌باشد [۲]. می یک رابطه تحلیلی را برای نسبت طول حفره گسترده پشت هندسه‌های متقارن محوری ( $L_{cavity}$ ) به قطر کاویتاتور ( $D_{cavitator}$ ) ارائه نموده است [۱۷]. در شکل ۱۴ تغییر طول حفره بر حسب عدد کاویتاسیون برای جریان کاویتاسیون گسترده پشت دیسک به روش المان مرزی حاضر با نتایج روش المان مرزی بدون جت بازگشتی مرجع [۱۵]، داده‌های تجربی مرجع [۲]، و نتایج عددی و تحلیلی مرجع [۱۷] مقایسه گردیده است. این شکل، انطباق کامل نتایج روش حاضر با داده‌های تجربی در کلیه اعداد کاویتاسیون مورد بررسی

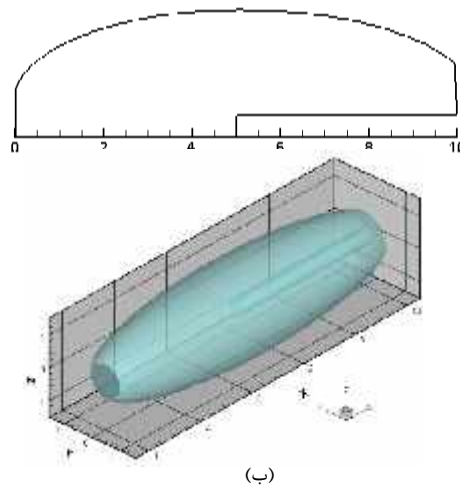
همان‌گونه که در شکل‌های ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود، بیشینه ضخامت در طول حفره‌های حدود ۶۰ درصد طول جسم و در عدد کاویتاسیون حدود ۰٫۲ رخ می‌دهد. با افزایش بیشتر طول حفره (کاهش بیشتر عدد کاویتاسیون)، بیشینه ضخامت حفره نیز کاهش خواهد یافت. علت را می‌توان این‌گونه توجیه نمود که بر روی سطح حفره، دو مولفه سرعت عمود و مماس بر محور تقارن وجود دارد که مولفه مماسی سرعت وظیفه افزایش طول حفره و مولفه عمودی آن وظیفه افزایش ضخامت حفره را بر عهده دارد. تا محدوده طول حفره حدود ۶۰ درصد، این دو مولفه همگام با یکدیگر افزایش می‌یابند، اما در طول حفره‌های بزرگ‌تر، نسبت این دو مولفه به هم می‌خورد و اثر مؤلفه عمودی سرعت کاهش می‌یابد و در نتیجه ضخامت بیشینه حفره نیز کاهش خواهد یافت.

(ب) کاویتاسیون گسترده:

در شکل ۱۱ شکل حفره پشت دیسک برای دو طول حفره مختلف ۵ و ۱۰ به صورت دوبعدی و سه‌بعدی نشان داده شده است. طول حفره با قطر دیسک بی‌بعد شده است. در این مقاله، برای محاسبه ضریب پسای جریان کاویتاسیون پشت دیسک، از رابطه تجربی-تحلیلی پلست و شافر (بر حسب  $\sigma$ ) ارائه شده در مرجع [۱۷] استفاده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۱۱- نمایی از کاویتاسیون گسترده پشت دیسک:

(الف)  $\sigma = 0.2715$  و  $L_c/D_d = 5$

(ب)  $\sigma = 0.1489$  و  $L_c/D_d = 10$

کاویتاسیون کوچک (طول‌های حفره بزرگ) نمی‌شود زیرا برای تحلیل چنین جریان‌هایی، نیاز به شبکه‌بندی حجیم و استفاده از کامپیوترهایی با قابلیت‌های خیلی بالا می‌باشد. همچنین با وجودی که نتایج تحلیلی برای طول حفره‌های بزرگ جواب خوبی ارائه نمی‌دهد اما روش المان مرزی حاضر در این طول‌ها، مقدار عدد کاویتاسیون را با تقریب خوبی پیش‌بینی نموده است. مزیت دیگر روش المان مرزی حاضر، همگرایی در مدت زمان کوتاه (حداکثر چند دقیقه) است؛ این در حالی است که معمولاً روش‌های تحلیل کامل معادلات ناویر-استوکس، حتی با وجود کامپیوترهای پر سرعت امروزی بسیار زمان‌بر و وقت‌گیر می‌باشند.

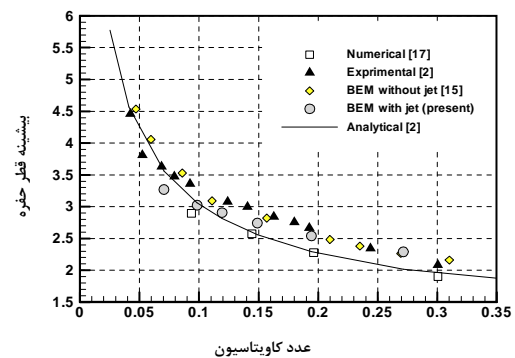
#### ۸- جمع‌بندی

در این مقاله، با استفاده از روش المان مرزی و مدل جت بازگشتی در انتهای حفره، جریان همراه با کاویتاسیون جزئی و گسترده بر روی هندسه‌های متقارن محوری شبیه‌سازی شده است. ضمن انطباق نسبتاً مناسب نتایج این روش با نتایج تجربی و عددی دیگر، استفاده از این مدل، در اصلاح ضریب فشار در انتهای حفره جزئی بسیار موفق عمل کرده است. در کاویتاسیون گسترده نیز، شکل حفره پیش‌بینی شده توسط این روش در محدوده وسیعی از عدد کاویتاسیون بر نتایج تجربی و تحلیلی منطبق است. سرعت بسیار بالای همگرایی، از ویژگی‌های مهم این روش می‌باشد.

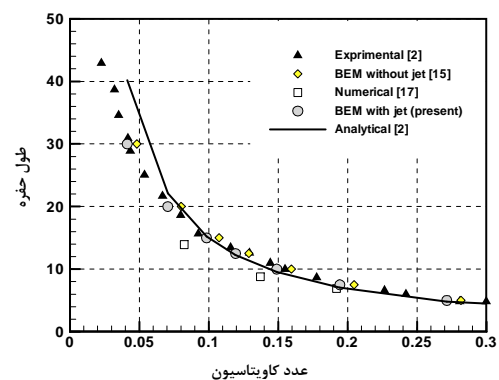
#### مراجع

- [1] Pasandidehfard M., Noroozi M., Rashidi I., "Numerical Simulation Of Partial Cavitation Over Axisymmetric Bodies Using The Boundary Element Method Based On Potential", Ankara International Aerospace Conference, Turkey, Ankara, AIAC-2009-037, 2009.
- [2] Franc J.P., Michel J.M., "Fundamental Of Cavitation", Kluwer Academic Publisher, Netherlands, pp. 131-161, 2004.
- [3] نوروزی، مهدی، «تحلیل جریان همراه با کاویتاسیون اجسام متقارن محوری با استفاده از روش المان مرزی بر پایه پتانسیل با مدل‌سازی جت بازگشتی»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، صص ۷-۱، ۱۳۸۸.
- [4] Birkhoff G., Zarantonello, E.H., "Jets, Wakes and Cavities", Academic Press, New York, 1957.
- [5] Gilbarg D., "Jets and Cavities", Handbuch der Physik, Vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1960.
- [6] Furness R. A., Hutton S. P., "Experimental and Theoretical Studies of Two-Dimensional Fixed-

و همچنین انطباق بسیار خوب نتایج این روش با نتایج تحلیلی در اعداد کاویتاسیون بزرگتر از ۰٫۱ را نشان می‌دهد. با مقایسه این روش با روش المان مرزی بدون جت بازگشتی مرجع [۱۵] مشاهده می‌شود که این روش نتایج بهتری را ارائه می‌دهد و در یک عدد کاویتاسیون مشخص، طول حفره به دست آمده از روش المان مرزی مرجع [۱۵]، اندکی بزرگتر از طول حفره داده‌های تجربی و روش حاضر است.



شکل ۱۳- تغییر بیشینه قطر حفره بر حسب عدد کاویتاسیون برای دیسک و مقایسه نتایج روش المان مرزی حاضر با نتایج روش المان مرزی مرجع [۱۵]، رابطه تحلیلی ریچارد و داده‌های تجربی مرجع [۲] و نتایج عددی مرجع [۱۷]



شکل ۱۴- تغییر طول حفره بر حسب عدد کاویتاسیون برای جریان کاویتاسیون گسترده پشت دیسک و مقایسه نتایج روش المان مرزی حاضر با روش المان مرزی بدون جت بازگشتی مرجع [۱۵]، داده‌های تجربی مرجع [۲]، نتایج تحلیلی و عددی مرجع [۱۷]

نکته قابل توجه در مورد روش المان مرزی این است که با استفاده از آن می‌توان به راحتی جریان‌های با اعداد کاویتاسیون خیلی کوچک (طول‌های حفره خیلی بزرگ) را بدون محدودیت از نظر شبکه‌بندی و با کامپیوترهای معمولی مورد تحلیل قرار داد. این در حالی است که نتایج عددی مرجع [۱۷] شامل اعداد

- Type Cavities”, Trans. ASME: J. Fluids Engineering 97, pp. 515-522, 1975.
- [7] Pellone E. and Rowe A., “Super Cavitating Hydrofoils in Nonlinear Theory” in Proceedings, Third International Conference on Numerical Ship Hydrodynamic, 1981.
- [8] Fine, N.E., Kinnas, S.A., “A Boundary Element Method for the Analysis of the Flow Around 3-D cavitating hydrofoils”, Journal of Ship Research, Vol. 37, No.1, 1993.
- [9] Krishnaswamy P., “Flow Modeling for Partially Cavitating Hydrofoils”, Ph.D. thesis, Technical University of Denmark, ch.4, p.45, 2000.
- [10] Uhlman J. S., “A Note On The Development Of A Nonlinear Axisymmetric Reentrant Jet Cavitation Model”, Engineering Technology Center, Anteon Corp, 2006.
- [11] Labertaux K.R., Ceccio S.L., “Partial Cavity flows (Part 1), “Cavities Forming on Models without Span Wise Variation”, J. Fluid Mech., Vol. 431, pp. 1-41, 2001.
- [12] Fine N. E., “Nonlinear Analysis of Cavitating Propellers in Non-Uniform Flow”, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1992.
- [13] Callenaere M., Franc J.P., Michel J.M., Riondet M., “The Cavitation Instability Induced by the Development of a Re-Entrant jet”, J. Fluid Mech., Vol. 444, pp. 223-256, 2001.
- [14] Washio S., Takahashi S., and Yoshimori S., “Study on Cavitation Starting at the Ppoint of Separation on a Smooth Wall in Hydraulic Oil Flow”, Proceedings of the I MECH E Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 217, Number 6, 1 June 2003, pp. 619-630(12), 2003.
- [۱۵] رشیدی طرقي، ایمان، «حل عددی پدیده کاویتاسیون بر روی هندسه‌های متقارن محوری با استفاده از روش المان مرزی بر پایه پتانسیل»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، ۱۳۸۶.
- [16] Farouk M.O., and Ali H.N., “Numerical Simulation of 3-D Incompressible Multi-Phase Flows over Cavitating projectiles”, European Journal of Mechanics, B/Fluids, Vol. 23, pp. 339-351, 2004.
- [17] Passandideh-Fard M., Roohi E., “Transient Simulations of Cavitating Fows Using a Modified volume-of-fluid (VOF) technique”, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 22, Issue 1-2, pp. 97-114, 2008.