

ظهور پدیده پاسخ همزمان در تحلیل پایداری سیستم ورق - جرم متحرک

احسان ترکان

مصطفی پیرمرادیان*

محمد هاشمیان

باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی شهر، خمینی شهر، اصفهان، ایران
استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی شهر، خمینی شهر، اصفهان، ایران
استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی شهر، خمینی شهر، اصفهان، ایران

چکیده

مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌های الاستیک تحت بارگذاری متحرک از مطرح‌ترین مسائل در حوزه‌های گوناگون مهندسی است. در این مقاله، تحلیل پایداری دینامیکی ورق مستطیلی شکل نازک با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک، با استفاده از نظریه فلاکه و روش پارامترهای فشرده مطالعه شده است. در استخراج معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر رفتار دینامیکی سیستم، همه‌ی اثرات اینرسی جرم متحرک در نظر گرفته شده است. با بکارگیری روش گالرکین، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر سیستم به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. عبور متناوب جرم‌ها روی ورق منجر به پیدایش معادلاتی با ضرایب متغیر با زمان می‌شود. با در نظر گرفتن مسیری مستقیم برای حرکت جرم‌ها روی سطح ورق و با استفاده از نظریه فلاکه و روش پارامترهای فشرده، ناپایداری دینامیکی ورق و وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان مورد تحلیل قرار گرفته است. همچنین با تعریف مسیری مورب برای حرکت جرم‌ها، اهمیت توجه به پدیده‌ی پاسخ همزمان و حساسیت پایداری دینامیکی ورق به مسیر عبور جرم‌ها بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده، دقت و صحت نتایج هر دو روش را تأیید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: ورق-جرم متحرک، پایداری دینامیکی، نظریه فلاکه، پدیده‌ی پاسخ همزمان، روش پارامترهای فشرده.

Appearance of Coexistence Phenomenon in Stability Analysis of Plate-Moving Mass System

E. Torkan

M. Pirmoradian

M. Hashemian

Young Researchers and Elite Club, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr/Isfahan, Iran
Department of Mechanical Engineering, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr/Isfahan, Iran
Department of Mechanical Engineering, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr/Isfahan, Iran

Abstract

Dynamic behavior study of elastic structures under moving loads is one of the most famous problems in different engineering fields. In this study, dynamic stability of a simply supported rectangular plate under periodic passage of moving masses is investigated using Floquet theory and strained parameters method. Considering effects of all inertia components of the moving masses, the governing partial differential equation of motion is derived. The Galerkin's method is applied to reduce the governing partial differential equation to a set of ordinary differential equations. The periodic loading across the plate results in a time-varying equation. Considering a straight path for passage of moving masses and applying the Floquet theory and strained parameters method, the dynamic instability of the plate and coexistence phenomenon are analyzed. In addition, defining a diagonal transition path of moving masses over the plate's surface, the significance of the coexistence phenomenon and also sensitivity of plate instability to mass transition paths are investigated. Numerical simulations validate the accuracy of both methods results.

Keywords: Plate-moving mass interaction, Dynamic stability, Floquet theory, Coexistence phenomenon, strained parameters method

۱- مقدمه

ارتعاش ورق‌های مستطیلی تحت بارگذاری متحرک به دلیل کاربردهای وسیعی که در مهندسی سازه و مهندسی حمل و نقل دارد، موضوعی شناخته شده به حساب می‌آید. سازه‌هایی مانند پل‌های راه‌آهن، پل‌های بزرگراه‌ها، جرثقیل‌های حمل بار و عرشه‌ی ناوهای هواپیمابر را می‌توان به عنوان ورق‌های مستطیلی مدل‌سازی کرد. استفاده‌ی روز افزون از سازه‌های انعطاف‌پذیر و سبک و در عین حال استفاده از وسائل نقلیه‌ی سنگین و سریع، محققین را به در نظر گرفتن جملات مختلف اینرسی و تغییر شکل‌های برشی در تحلیل‌ها ترغیب

نموده است. در این راستا می‌توان به مطالعات نیکخو و همکارانش اشاره کرد [۲۰۱]. آن‌ها در مطالعات خود از مدل تیر اویلر-برنولی^۱ و مدل ورق کیرشهف^۲ استفاده کردند و تأثیر جملات مختلف اینرسی را بر پاسخ دینامیکی سیستم در حوزه‌ی زمان و فرکانس بررسی کردند. همچنین مطالعات متعددی در مورد تیرها و ورق‌های غیریکنواخت [۴۰۳] و ورق‌های غیرخطی [۵۰۵] در معرض عبور جرم متحرک، همچنین استفاده از قضیه‌ی انتشار امواج [۷۰۸] و یا تحلیل

¹ Euler-bernoulli beam theory

² Kirchhoff's plate

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: pirmoradian@iaukhsh.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۲/۱۱

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۵/۲۲

فرکانس‌های شبه‌طبیعی سیستم تیر-جرم متحرک [۱۰ و ۹]، انجام شده است که معمولاً در این مطالعات تمرکز پژوهشگران بر استخراج پاسخ‌های زمانی و فرکانسی سیستم بوده است. در میان انبوه مطالعات انجام شده در زمینه‌ی سازه‌های الاستیک تحت بارگذاری متحرک، تعداد محدودی از مطالعات یافت می‌شود که با دیدی متفاوت جنبه‌ی دیگری از این موضوع را به چالش می‌کشند. در این مطالعات، مکان متغیر با زمان بار عبوری، که ویژگی اصلی تحریک دینامیکی است، نقش مهمی را در تحلیل پایداری این قبیل سیستم‌ها ایفا می‌کند [۱۱-۱۵]. در حقیقت، در این مطالعات با لحاظ کردن ورود و خروج نوبه‌ای بارهای متحرک بر روی سطح سازه، تحریکی از نوع پارامتری بر سازه اعمال می‌شود که نتیجه‌ی آن حصول معادلاتی با ضرایب متناوب با زمان برای سیستم است.

سیستم‌های با تحریک پارامتری^۱ به سیستم‌هایی اطلاق می‌شود که حداقل یکی از پارامترهای آن به صورت متناوب با زمان تغییر کند. مطالعه‌ی این نوع سیستم‌ها و یافتن پاسخ‌هایی برای سوالات مطرح شده در طراحی آن‌ها حائز اهمیت و در عین حال جذاب است. جذابیت به این خاطر است که معادلات حاکم بر سیستم‌های تحت تحریک پارامتری دارای ضرایب متناوب با زمان هستند و معمولاً برای اکثر این مسائل پاسخ تحلیلی وجود ندارد، ولی با استفاده از برخی روش‌ها می‌توان بدون اینکه حل کاملی برای سیستم یافت، از برخی خصوصیات آن آگاهی پیدا کرد. معادلات متیو^۲ و اینس^۳ به عنوان مطرح‌ترین معادلات با ضرایب متناوب هستند. پاسخ دینامیکی اینگونه سیستم‌ها می‌تواند با گذشت زمان به طور مستمر افزایش یابد و منجر به ناپایداری پاسخ گردد. از این رو مطالعه‌ی پایداری این نوع سیستم‌ها حائز اهمیت است. از مثال‌های رایج برای سیستم‌های تحت تحریک پارامتری می‌توان به مکانیزم پیرو بادامک، آونگ با تکیه‌گاه متحرک یا سازه‌های الاستیک تحت بارگذاری محوری متناوب، اشاره کرد. در مقایسه بین ارتعاش اجباری و تحریک پارامتری یک سیستم می‌توان بیان کرد که در ارتعاش اجباری یک سیستم بدون استهلاک، اگر فرکانس نیروی خارجی اعمالی برابر با یکی از فرکانس‌های خطی سیستم شود، دامنه‌ی ارتعاش سیستم به صورت مداوم افزایش می‌یابد. این در حالی است که برای یک سیستم با ضرایب متناوب علی‌رغم وجود جمله‌ی استهلاک، اگر فرکانس تحریک تقریباً دو برابر یکی از فرکانس‌های سیستم شود، پاسخ سیستم ناپایدار خواهد شد. این پدیده را تشدید پارامتری اصلی گویند [۱۶]. از دیگر پدیده‌های چالش برانگیز که در سیستم‌های تحت تحریک پارامتری امکان وقوع آن وجود دارد، پدیده‌ی وجود پاسخ همزمان است. این پدیده هنگامی رخ می‌دهد که دو منحنی تشکیل دهنده‌ی یک زبانه‌ی ناپایدار کاملاً بر یکدیگر منطبق شده و یک زبانه‌ی ناپایدار بسته و پنهان را در صفحه‌ی پارامترهای سیستم تشکیل دهند. در ادامه، برخی از مطالعات مرتبط با تحلیل تشدید پارامتری در سازه‌های الاستیک تحت بارگذاری متحرک مورد بررسی قرار می‌گیرند. آلدراهم و باز [۱۱] پایداری دینامیکی تیر پله‌ای که تحت عبور جرم متحرک قرار گرفته است را مطالعه کردند. آن‌ها معادلات حرکت

را با استفاده از اصل همپتون استخراج کردند و با بکارگیری نظریه تحریک پارامتری ضربه‌ای که مبتنی بر نظریه فلاکه^۴ است، پایداری سیستم را از دید لیاپانوف مورد بررسی قرار دادند. ماکرتیچ [۱۲] پایداری دینامیکی تیر تیموشنکوی واقع بر بستر الاستیک که تحت عبور یک سری از جرم‌های متحرک با سرعت‌های ثابت و فواصل یکسان قرار گرفته است را بررسی کرد. او با بکارگیری نظریه فلاکه نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی جرم-سرعت بار عبوری را مشخص کرد. نواحی ناپایدار ارائه شده، کاملاً مرتبط با وقوع تشدید پارامتری در این سیستم می‌باشد. در مطالعات اخیر، پیرمردیان و همکاران [۱۳ و ۱۴] تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکوی تحریک شده با یک سری جرم‌های متحرک یکسان را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روش هارمونیک بالانس برای تعیین منحنی مرزی جدا کننده‌ی نواحی پایدار و ناپایداری و منحنی‌های تشدید در صفحه‌ی پارامترهای جرم عبوری استفاده کردند. کریم‌پور و همکاران [۱۵] با استفاده از روش توازن هارمونیک‌ها، به وجود پدیده‌ی پاسخ همزمان در مطالعه‌ی پایداری دینامیکی تیر اویلر-برنولی تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک اشاره کردند و اهمیت آگاهی از آن را متذکر شدند.

با مروری بر مقالات ارائه شده در زمینه‌ی تحلیل پایداری دینامیکی سازه‌های الاستیک تحت بارهای متحرک، مشاهده می‌شود که این موضوع برای تیر به عنوان سازه‌ی تحت بارگذاری جرم متحرک مورد مطالعه قرار گرفته است، اما با توجه به بهترین دانش نویسندگان، تاکنون تحلیل پایداری دینامیکی برای ورق به عنوان سازه‌ی تحت بارگذاری جرم متحرک انجام نشده است. از این روی، در مقاله‌ی حاضر ناپایداری دینامیکی ورق مستطیلی شکل نازک تحت تأثیر عبور متناوب جرم‌های متحرک با بکارگیری نظریه فلاکه و روش اغتشاشی پارامترهای فشرده، مورد بررسی قرار گرفته است. اثر همه‌ی جملات اینرسی ناشی از جرم متحرک در استخراج معادلات حاکم بر حرکت سیستم لحاظ شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم با استفاده از روش گالرکین به همراه توابع شکل مثلثاتی به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. ابتدا مسیری مستقیم برای عبور جرم‌ها از روی ورق در نظر گرفته شده و در ادامه با بکارگیری هر دو روش فلاکه و پارامترهای فشرده، شرایط وقوع ناپایداری دینامیکی در سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر این، با استفاده از روش پارامترهای فشرده، وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان در سیستم ورق-جرم متحرک توجیه می‌شود. توجه به منحنی پاسخ همزمان هنگامی اهمیت پیدا می‌کند که ایجاد تغییرات کوچک در پارامترهای سیستم منجر به ظاهر شدن این ناحیه‌ی بسته می‌شود. از این رو در مطالعه‌ی حاضر با در نظر گرفتن مسیری مورب برای عبور جرم‌ها از روی سطح ورق نشان داده می‌شود که مسیر حرکت جرم‌ها تأثیر به سزایی بر باز شدن منحنی‌های پاسخ همزمان دارد. به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل، پاسخ زمانی ارتعاش ورق برای پارامترهای متعلق به نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترها با استفاده از انتگرال‌گیری عددی بدست می‌آید.

⁴ Floquet theory

⁵ Incremental harmonic balance method

¹ Parametric excitation

² Mathieu equation

³ Ince equation

۲- مدل سازی سیستم

سازه‌ی در نظر گرفته شده در مسأله‌ی مورد نظر شامل یک ورق مستطیلی شکل یکنواخت به طول a ، عرض b ، ضخامت ثابت h ، مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν و جرم واحد حجم ρ است. شرایط مرزی چهار لبه‌ی ورق به صورت تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد. ابتدا فرض می‌شود که جرمی در طول مسیری دلخواه واقع بر ورق، مطابق با شکل ۱ حرکت می‌کند. بر اساس نظریه مکانیک پیوسته، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت عرضی ورق مستطیلی شکل نازک تحت بارگذاری کلی به صورت رابطه‌ی (۱) بیان می‌شود [۱۷].

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, y, t) \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$$

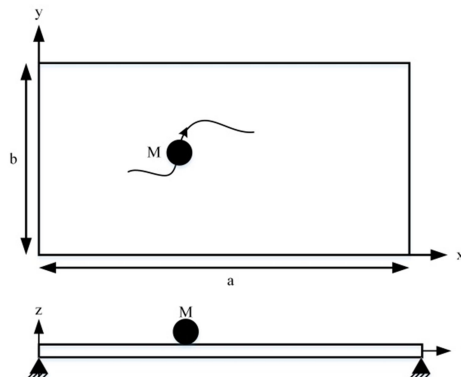
در رابطه‌ی (۱)، $w(x, y, t)$ و $P(x, y, t)$ به ترتیب بیانگر جابجایی عرضی سطح میانی ورق و تابع تحریک هستند. این تحریک برای حرکت جرم متحرک در طول مسیر دلخواه بر روی سطح ورق به صورت رابطه‌ی (۲) تعریف می‌شود.

$$P(x, y, t) = M \left(g - \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \delta(x - x_0(t)) \delta(y - y_0(t)) \quad (2)$$

در رابطه‌ی (۲)، M و g به ترتیب جرم بار عبوری و شتاب گرانش بوده، δ بیانگر تابع دلتای دیراک و $x_0(t)$ و $y_0(t)$ بیانگر موقعیت جرم روی ورق در زمان t می‌باشند. با در نظر گرفتن همه‌ی جملات اینرسی، مشتق زمانی w به فرم رابطه‌ی (۳) حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \left(w_{,tt} + w_{,xx} \dot{x}^2 + w_{,yy} \dot{y}^2 + 2w_{,xy} \dot{x}\dot{y} + 2w_{,xt} \dot{x} + 2w_{,yt} \dot{y} + w_{,xx} \ddot{x} + w_{,yy} \ddot{y} \right)_{x=x_0(t), y=y_0(t)} \quad (3)$$

پاسخ ارتعاش آزاد ورق به صورت رابطه‌ی (۴) در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- حرکت جرم متحرک در طول مسیری دلخواه روی سطح ورق

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x, y) \bar{q}_i(t) \quad (4)$$

در رابطه‌ی (۴)، $\bar{q}$ عدد موهومی، $\phi_i(x, y)$ و ω_i به ترتیب i -امین تابع شکل ورق بدون حضور جرم و i -امین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی شکل هستند. با جایگذاری رابطه‌ی (۴) در معادله همگن متناظر با رابطه‌ی (۱)، نتیجه می‌شود:

$$D\nabla^4 \phi_i(x, y) = \rho h \omega_i^2 \phi_i(x, y) \quad (5)$$

به منظور استفاده از روش گالرکین برای گسسته‌سازی رابطه‌ی (۱)،

جابجایی عرضی ورق بر اساس رابطه‌ی (۶) به دامنه‌ی زمان و مکان جداسازی می‌شوند.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (6)$$

در رابطه‌ی (۶)، $q_i(t)$ دامنه‌ی مودال برای i -امین تابع شکل $\phi_i(x, y)$ است. با جایگذاری رابطه‌ی (۶) در (۱) و ساده‌سازی رابطه‌ی حاصل با استفاده از رابطه‌ی (۵)، سپس با ضرب طرفین معادله‌ی حاصل در $\phi_j(x, y)$ و در نهایت انتگرال‌گیری از آن روی سطح ورق، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_A \rho h \omega_i^2 \phi_i \phi_j dA + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i \int_A \rho h \phi_i \phi_j dA = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A M (g \phi_j - \phi_i \phi_j \ddot{q}_i - f_1(x, y, t) \phi_j \dot{q}_i - f_2(x, y, t) \phi_j q_i) \delta(x - x_0(t)) \delta(y - y_0(t)) dA \quad (7)$$

که در رابطه‌ی (۷)

$$f_1(x, y, t) = 2\dot{x}_0 \phi_{i,x} + 2\dot{y}_0 \phi_{i,y} \quad (8)$$

$$f_2(x, y, t) = \dot{x}_0^2 \phi_{i,xx} + \dot{y}_0^2 \phi_{i,yy} + 2\dot{x}_0 \dot{y}_0 \phi_{i,xy} + \ddot{x}_0 \phi_{i,x} + \ddot{y}_0 \phi_{i,y}$$

با توجه به شرایط تعامد بین مودهای ارتعاشی، می‌توان رابطه‌ی (۹) را تعریف کرد.

$$\int_A \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dA = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (9)$$

با در نظر گرفتن شرایط تعامد و محاسبه‌ی انتگرال‌های رابطه‌ی (۷)، مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسأله در فرم ماتریسی به صورت رابطه‌ی (۱۰) حاصل می‌شود.

$$[M(t)] [\ddot{q}(t)] + [C(t)] [\dot{q}(t)] + [K(t)] [q(t)] = [F(t)], \quad (10)$$

که در رابطه‌ی (۱۰)

$$M_{ij} = \delta_{ij} + \frac{M}{\rho h} \phi_i \phi_j$$

$$C_{ij} = 2 \frac{M}{\rho h} (\dot{x}_0 \phi_{i,x} + \dot{y}_0 \phi_{i,y}) \phi_j$$

$$K_{ij} = \omega_i^2 \delta_{ij} + \frac{M}{\rho h} (\dot{x}_0^2 \phi_{i,xx} + \dot{y}_0^2 \phi_{i,yy} + \ddot{x}_0 \phi_{i,x} + \ddot{y}_0 \phi_{i,y} + 2\dot{x}_0 \dot{y}_0 \phi_{i,xy}) \phi_j \quad (11)$$

$$F_j = \frac{Mg}{\rho h} \phi_j$$

$$[q(t)] = [q_1(t) \dots q_n(t)]^T$$

قابل ذکر است که اگرچه ورق ذاتاً بدون میرایی در نظر گرفته شده است، لیکن به خاطر لحاظ کردن همه‌ی جملات اینرسی ناشی از جرم متحرک در معادلات حاکم، علاوه بر ماتریس جرم، ماتریس‌های متغیر با زمان میرایی و سفتی نیز در ضرایب معادله‌ی (۱۰) ظاهر شده است. توابع شکل و فرکانس‌های طبیعی برای ورق‌های مستطیلی به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) تعریف می‌شوند.

$$\phi_i(x, y) = \phi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (12)$$

$$\omega_i = \omega_{mn} = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho h} \left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right)} \quad (13)$$

که در روابط (۱۲) و (۱۳)، m و n مودهای ارتعاشی ورق هستند.

با این فرض که جرم عبوری روی مسیری مستقیم و موازی لبه‌های طولی ورق با سرعت ثابت V مطابق با شکل ۲ حرکت کند،

مکان متغیر با زمان آن روی سطح ورق با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) توصیف می‌شود.

$$x_0(t) = Vt \quad (14)$$

$$y_0(t) = \frac{b}{2} \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۲)، (۱۴) و (۱۵) در (۱۰) و در نظر گرفتن مود اول ارتعاشی، معادله‌ی حاکم بر مختصات مودال به صورت رابطه‌ی (۱۶) استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} & \left(1 + 4 \frac{M}{\rho h a b} \sin^2 \left(\frac{\pi V t}{a} \right)\right) \ddot{q}(t) \\ & + \left(8 \frac{M \pi V}{\rho h a^2 b} \sin \left(\frac{\pi V t}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi V t}{a} \right)\right) \dot{q}(t) \\ & + \left(\omega_1^2 - 4 \frac{M \pi^2 V^2}{\rho h a^3 b} \sin^2 \left(\frac{\pi V t}{a} \right)\right) q(t) = \frac{2}{\sqrt{a b}} \frac{M}{\rho h} g \sin \left(\frac{\pi V t}{a} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

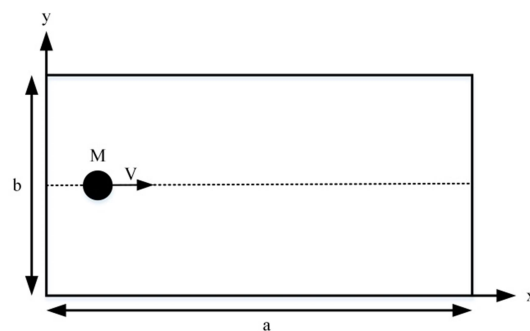
با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در رابطه‌ی (۱۷)

$$\alpha = \frac{m}{\rho h a b}, \quad \beta = \frac{\pi V}{a \omega_1}, \quad \tau = \beta \omega_1 t, \quad g^* = \frac{g}{\sqrt{a b} \omega_1^2}, \quad Q = \frac{q}{a b} \quad (17)$$

و همچنین استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای، معادله‌ی حاکم بر سیستم در فرم بی‌بعد به صورت رابطه‌ی (۱۸) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} & (1 + 4 \alpha \sin^2(\tau)) Q''(\tau) + 8 \alpha \sin(\tau) \cos(\tau) Q'(\tau) \\ & + \left(\frac{1}{\beta^2} - 4 \alpha \sin^2(\tau) \right) Q(\tau) = 2 \frac{\alpha}{\beta^2} g^* \sin(\tau) \end{aligned} \quad (18)$$

که در رابطه‌ی (۱۸)، بالانویس پریم به معنای مشتق نسبت به زمان بی‌بعد τ است



شکل ۲- عبور جرم متحرک در طول مسیری مستقیم

مادامی که جرم بر روی سطح ورق حرکت می‌کند، رابطه‌ی (۱۸) معادله دیفرانسیلی خطی لیکن با ضرایب متغیر با زمان است. به محض خروج جرم از روی ورق این ضرایب به ضرایبی ثابت تبدیل می‌شوند (کافی است که در رابطه‌ی (۱۸) $\alpha = 0$ در نظر گرفته شود) و در نتیجه همه‌ی عوامل تقویت ارتعاش در سیستم حذف می‌شوند. بنابراین با در نظر گرفتن عبور نوبه‌ای جرم‌ها بر روی سطح ورق، تحریک تکراری بر ورق اعمال می‌گردد و ضرایب رابطه‌ی (۱۸) متناوب با دوره تناوب $T = a/V$ می‌شوند. با توجه به نحوه‌ی بارگذاری، با انجام بسط فوریه‌ی ضرایب معادله‌ی (۱۸)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & (1 + 2\alpha(1 - \cos(2\tau))) Q''(\tau) + 4\alpha \sin(2\tau) Q'(\tau) \\ & + \left(\frac{1}{\beta^2} - 2\alpha(1 - \cos(2\tau)) \right) Q(\tau) \\ & = 2 \frac{\alpha}{\beta^2} g^* \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1 - 4k^2)} \cos(2k\tau) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

به منظور مطالعه‌ی پایداری دینامیکی سیستم، معادله همگن متناظر با معادله (۱۹) به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} & (1 + 2\alpha(1 - \cos(2\tau))) Q''(\tau) + 4\alpha \sin(2\tau) Q'(\tau) \\ & + \left(\frac{1}{\beta^2} - 2\alpha(1 - \cos(2\tau)) \right) Q(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

۳- نظریه فلاکه

نظریه فلاکه یک نظریه کلی برای تحلیل ویژگی‌های حل یک سیستم بدون حل کل معادلات حاکم بر آن است [۱۶]. بر اساس این روش، ناپایداری یک سیستم متناوب با تعیین و شناسایی ماتریس پایه در یک تناوب زمانی قابل بررسی است. مقادیر ویژه‌ی این ماتریس را می‌توان به عنوان معیاری برای تعیین پایداری سیستم در نظر گرفت. نظریه فلاکه را می‌توان برای معادلات دیفرانسیل به فرم فضای حالت رابطه‌ی (۲۱) بکار برد.

$$\dot{x}(t) = [A(t)]x(t) \quad (21)$$

از آنجایی که ماتریس $[A(t)]$ متناوب با دوره تناوب T است، اگر $[x(t)]$ یک ماتریس پاسخ برای رابطه‌ی (۲۱) باشد آنگاه $[x(t+T)]$ نیز یک پاسخ معادله است و رابطه‌ی آن با ماتریس $[x(t)]$ از طریق ماتریس ثابت $[B]$ به صورت رابطه‌ی (۲۲) بیان می‌شود.

$$[x(t+T)] = [B][x(t)] \quad (22)$$

با انتخاب $[x(0)] = [I]$ ، از رابطه‌ی (۲۲) می‌توان مشاهده کرد که $[x(T)] = [B]$ است. این بدین معناست که می‌توان ماتریس پایه $[B]$ را با استفاده از انتگرال گیری عددی از معادله‌ی (۲۱) در بازه زمانی یک دوره تناوب بدست آورد. نظریه فلاکه بیان می‌کند که اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس پاسخ پایه داخل دایره‌ای واحد به مرکزیت $(0,0)$ در صفحه‌ی مختلط قرار گیرند، سیستم پایدار است و در صورتی که تنها یکی از مقادیر ویژه‌ی آن خارج این دایره واقع شود، سیستم ناپایدار خواهد بود. به منظور تحلیل پایداری سیستم ورق-جرم متحرک، با تبدیل رابطه‌ی (۲۰) به فرم رابطه‌ی (۲۱)، ماتریس $[A(\tau)]$ و بردار $[x(\tau)]$ برابر خواهند شد با:

$$\begin{aligned} [A(\tau)] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\beta^2} - 2\alpha(1 - \cos(2\tau)) & -\frac{4\alpha \sin(2\tau)}{1 + 2\alpha(1 - \cos(2\tau))} \end{bmatrix} \\ [x(\tau)] &= \begin{bmatrix} Q(\tau) \\ Q'(\tau) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

برای مشخص کردن نواحی ناپایدار صفحه‌ی پارمترهای مسأله، در نرم-افزار MATLAB برنامه‌ای نوشته شده است که پس از یافتن ماتریس پایه به ازای نقاط این صفحه، مقادیر ویژه‌ی ماتریس را محاسبه کرده و پایداری سیستم را برای پارامترهای انتخابی بررسی می‌کند. این نواحی در شکل ۳ نمایش داده شده‌اند. نواحی هاشور خورده بیان‌گر نواحی

در رابطه‌ی (۲۵)، $k \geq 0$ و δ_i ها پارامترهایی هستند که با حذف کردن جملات سکولار از پاسخ سیستم بدست می‌آیند. با تعریف پارامترهای

$$\delta \square \frac{1}{\beta^2}, \quad \varepsilon \square \alpha \quad (26)$$

و جایگذاری آن‌ها در معادله‌ی (۲۰)، نتیجه می‌شود:

$$(1 + 2\varepsilon(1 - \cos(2\tau)))Q''(\tau) + 4\varepsilon \sin(2\tau)Q'(\tau) + (\delta - 2\varepsilon(1 - \cos(2\tau)))Q(\tau) = 0 \quad (27)$$

در ادامه روابط (۲۴) و (۲۵) در معادله‌ی حاکم بر مسئله جایگذاری می‌شوند و عبارت حاصل بر حسب توان‌های مختلف ε مرتب‌سازی می‌شود. سپس با مساوی صفر قرار دادن مجموع ضرایب عبارات هم توان ε ، دستگاه معادلات جبری بدست می‌آید. ابتدا یک مقدار برای k در نظر گرفته می‌شود، معادلات به ترتیب حل شده و δ_i ها با حذف کردن جملات سکولار در هر بار حل بدست می‌آیند. در نهایت از جایگذاری δ_i های بدست آمده در رابطه‌ی (۲۵)، منحنی‌های گذار از صفحه‌ی پارامترها حاصل می‌شود. از جایگذاری روابط (۲۴) و (۲۵) در (۲۷)، رابطه‌ی (۲۸) حاصل می‌شود.

$$(1 + 2\varepsilon(1 - \cos(2\tau))) (Q_0''(\tau) + \varepsilon Q_1''(\tau) + \varepsilon^2 Q_2''(\tau) + \dots) + 4\varepsilon \sin(2\tau) (Q_0'(\tau) + \varepsilon Q_1'(\tau) + \varepsilon^2 Q_2'(\tau) + \dots) + ((n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots) - 2\varepsilon(1 - \cos(2\tau))) (Q_0(\tau) + \varepsilon Q_1(\tau) + \varepsilon^2 Q_2(\tau) + \dots) = 0 \quad (28)$$

با مساوی صفر قرار دادن مجموع ضرایب عبارات هم توان ε ، روابط (۲۹) تا (۳۲) بدست می‌آیند.

$$\varepsilon^0: Q_0''(\tau) + k^2 Q_0(\tau) = 0 \quad (29)$$

$$\varepsilon^1: Q_1''(\tau) + k^2 Q_1(\tau) = -2(1 - \cos(2\tau))Q_0'(\tau) - 4\sin(2\tau)Q_0(\tau) - (\delta_1 - 2 + 2\cos(2\tau))Q_0(\tau) \quad (30)$$

$$\varepsilon^2: Q_2''(\tau) + k^2 Q_2(\tau) = -2(1 - \cos(2\tau))Q_1'(\tau) - 4\sin(2\tau)Q_1(\tau) - (\delta_1 - 2 + 2\cos(2\tau))Q_1(\tau) - \delta_2 Q_0(\tau) \quad (31)$$

$$\varepsilon^3: Q_3''(\tau) + k^2 Q_3(\tau) = -2(1 - \cos(2\tau))Q_2'(\tau) - 4\sin(2\tau)Q_2(\tau) - (\delta_1 - 2 + 2\cos(2\tau))Q_2(\tau) - \delta_2 Q_1(\tau) - \delta_3 Q_0(\tau) \quad (32)$$

جواب عمومی رابطه‌ی (۲۹) برابر است با:

$$Q_0(\tau) = A \cos(k\tau) + B \sin(k\tau) \quad (33)$$

در رابطه‌ی (۳۳)، اگر k زوج باشد $Q_0(\tau)$ متناوب با دوره تناوب π و اگر فرد باشد متناوب با دوره تناوب 2π است. در ادامه پاسخ‌های متناوب سیستم و منحنی‌های گذار حاصل از این پاسخ‌ها برای مقادیر $k = 0, 1, 2, 3, 4$ به صورت مجزا محاسبه خواهند شد.

۴-۱- حالت $k=0$

با جایگذاری $k=0$ در رابطه‌ی (۳۳)، جواب عمومی رابطه‌ی (۲۹) در این حالت برابر است با:

$$Q_0(\tau) = A \quad (34)$$

از جایگذاری رابطه‌ی (۳۴) در (۳۰)، رابطه‌ی (۳۵) حاصل می‌شود.

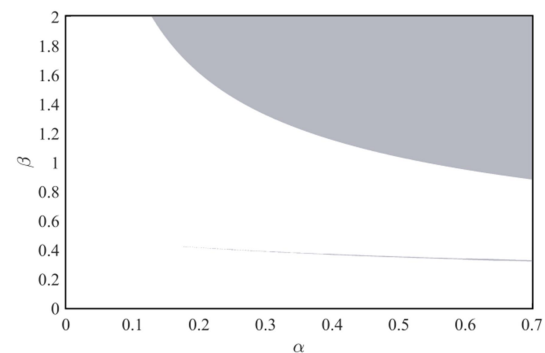
$$Q_1'(\tau) = (2 - \delta_1)A - 2A \cos(2\tau) \quad (35)$$

واضح است که اگر در رابطه‌ی (۳۵) مقدار δ_1 برابر ۲ انتخاب شود، جمله‌ی سکولار از پاسخ سیستم حذف خواهد شد. بنابراین جواب خصوصی رابطه‌ی (۳۵) بعد از حذف جمله‌ی سکولار برابر خواهد شد با:

ناپایدار مسأله است و نواحی سفید نواحی پایدار را نشان می‌دهند. برای آن دسته از پارامترهای جرم و سرعت بارهای عبوری که منجر به ناپایداری سیستم می‌شود می‌توان این چنین تفسیر کرد که انتقال انرژی از عامل حرکتی جرم‌ها به ارتعاش ورق با نرخ انجام می‌گیرد که منجر به انباشت انرژی در سیستم و نهایتاً ناپایدار شدن ارتعاشات ورق می‌شود. لازم به ذکر است که در این تحلیل 1000×2000 نقطه از صفحه‌ی پارامترها انتخاب شده است. اگرچه این دقت بالا در شبکه‌بندی منجر به طولانی شدن زمان تحلیل گردید، اما با این وجود باعث ظاهر شدن یک زبانه‌ی ناپایدار بسیار باریک در ناحیه‌ی پایدار مسأله شده است.

۴- روش پارامترهای فشرده

بنابر نظریه فلاکه برای معادلات با ضرایب متناوب، روی منحنی گذار در صفحه‌ی پارامترها بین نواحی پایدار و ناپایدار، پاسخ‌های متناوبی با دوره تناوب T و $2T$ وجود دارد. بنابراین هر روشی که بتواند پاسخ‌های با دوره تناوب T و $2T$ معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله را بیابد، منجر به کشف مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار خواهد شد. روش اغتشاشی پارامترهای فشرده، روشی است که توانایی یافتن پاسخ‌های نیمه‌تحلیلی سیستم را ارائه می‌کند. این روش از یک تبدیل متغیر در مراحل ابتدایی حل استفاده می‌کند تا از ظهور جملات سکولار در پاسخ جلوگیری کند. روش مذکور نسبت به روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ سیستم را با محاسبات جبری کمتری به دست می‌آورد. با این وجود، می‌توان از محدودیت این روش برای یافتن حل مسائل شامل استهلاک لزجی نام برد. در این بخش، علاوه بر بررسی دقیق نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترها، منحنی‌هایی که بیانگر



شکل ۳- نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از نظریه فلاکه

وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان هستند نیز با استفاده از این روش بررسی می‌شوند.

بر اساس روش پارامترهای فشرده، پاسخ سیستم را می‌توان به صورت بسط یکنواخت بیان شده در رابطه‌ی (۲۴) در نظر گرفت [۱۶].

$$Q(\tau; \varepsilon) = Q_0(\tau) + \varepsilon Q_1(\tau) + \varepsilon^2 Q_2(\tau) + \dots \quad (24)$$

در رابطه‌ی (۲۴)، ε پارامتر اغتشاش کوچک است. به طور مشابه فرض می‌شود که δ به صورت رابطه‌ی (۲۶) تعریف می‌شود.

$$\delta = k^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (25)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 1}} \quad (50)$$

مقایسه بین منحنی‌های گذار از پاسخ‌های متناوب سینوسی و کسینوسی نشان می‌دهد که این دو منحنی کاملاً یکسان هستند. تساوی این دو منحنی بیان‌گر وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان است که در نتیجه‌ی آن دو منحنی تشکیل دهنده‌ی یک زبانه‌ی ناپایدار بر روی یکدیگر منطبق شده‌اند. در اثر این انطباق، در واقع یک زبانه‌ی ناپایدار از صفحه‌ی $\alpha - \beta$ بسته و پنهان شده است. ناپدید ماندن این نوع زبانه‌ها باعث مخفی ماندن برخی از نواحی ناپایداری در صفحه‌ی پارامترهای سیستم می‌شود. این نواحی در اثر کوچک‌ترین تغییر در پارامترهای سیستم ممکن است پدیدار شوند. لازم به ذکر است که نظریه فلاکه به دلیل استفاده از انتگرال‌گیری عددی قادر به پیش‌بینی پدیده‌ی پاسخ همزمان نمی‌باشد و تنها با استفاده از روش‌های نیمه-تحلیلی می‌توان به بررسی این پدیده پرداخت.

۳-۴ - حالت $k=2$

با لحاظ کردن $k=2$ در پاسخ عمومی معادله‌ی (۲۹)، رابطه‌ی (۵۱) بدست می‌آید.

$$Q_0(\tau) = A \cos(2\tau) + B \sin(2\tau) \quad (51)$$

مطابق بخش گذشته با جداسازی پاسخ‌های کسینوسی و سینوسی منحنی‌های گذار از این پاسخ‌ها محاسبه می‌شوند. این منحنی‌ها عبارتند از:

$$\beta = \sqrt{\frac{4}{50\alpha^3 - 25\alpha^2 + 40\alpha + 16}} \quad (52)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{4}{54\alpha^3 - 27\alpha^2 + 40\alpha + 16}} \quad (53)$$

این دو منحنی دارای تفاوتی جزئی هستند و در نتیجه، ایجاد زبانه ناپایدار باریکی (شروع شده از نقطه‌ی $(\alpha=0, \beta=0.5)$) در صفحه پارامترهای مسأله می‌کنند. این زبانه، همان زبانه‌ای است که وجود آن توسط نظریه فلاکه نیز گزارش شد. قابل ذکر است که پدیده‌ی وجود پاسخ همزمان تنها زمانی اتفاق می‌افتد که معادله دو منحنی تشکیل دهنده‌ی یک زبانه‌ی ناپایدار، دقیقاً با یکدیگر برابر شوند. با اختصاص دادن مقادیر بیشتری به پارامتر k منحنی‌های متعددی در صفحه‌ی پارامترهای سیستم ظاهر خواهد شد. در شکل ۴ علاوه بر منحنی‌های بدست آمده در بخش‌های پیشین، منحنی‌های مربوط به حالت‌های $k=2,3$ نیز ترسیم شده‌اند. نواحی هاشور خورده بیانگر نواحی ناپایدار بوده و منحنی‌هایی که به صورت منقطع ترسیم شده‌اند، پدیده‌ی پاسخ همزمان را نشان می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌شود، روش پارامترهای فشرده نواحی پایدار و ناپایدار و همچنین زبانه‌ی باریک ناپایداری را با دقت بالایی نسبت به نظریه فلاکه مشخص کرده است.

$$Q_1(\tau) = \frac{1}{2} A \cos(2\tau) \quad (36)$$

با جایگذاری روابط (۳۴)، (۳۶) و $\delta_1=2$ در (۳۱) و حذف جمله‌ی سکولار نتیجه می‌شود:

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \quad (37)$$

$$Q_2(\tau) = -A \cos(2\tau) + \frac{9}{32} A \cos(4\tau) \quad (38)$$

همچنین با جایگذاری $\delta_1, \delta_2, Q_0(\tau), Q_1(\tau)$ و $Q_2(\tau)$ در رابطه‌ی (۳۲) نتیجه می‌شود:

$$\delta_3 = 1 \quad (39)$$

$$Q_3(\tau) = \frac{329}{128} A \cos(2\tau) - \frac{9}{8} A \cos(4\tau) + \frac{25}{128} A \cos(6\tau) \quad (40)$$

حال به منظور مشخص کردن منحنی گذار از پاسخ‌های متناوب در حالت $k=0$ ، با جایگذاری δ_1, δ_2 و δ_3 در رابطه‌ی (۲۵) و لحاظ کردن پارامترهای رابطه‌ی (۲۶) در معادله‌ی حاصل، اولین منحنی گذار از پاسخ‌های متناوب با تقریب مرتبه سوم، به شکل رابطه‌ی (۴۱) حاصل می‌شود.

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{2\alpha^3 - \alpha^2 + 4\alpha}} \quad (41)$$

۲-۴ - حالت $k=1$

با جایگذاری $k=1$ در رابطه‌ی (۳۳) نتیجه می‌شود:

$$Q_0(\tau) = A \cos(\tau) + B \sin(\tau) \quad (42)$$

واضح است که رابطه‌ی (۴۲) شامل جمله‌ی کسینوسی و سینوسی می‌باشد. این بدین معناست که می‌توان پاسخ‌های سینوسی و کسینوسی را به صورت جداگانه تحلیل کرد و همچنین منحنی‌های گذار از این پاسخ‌ها را بدست آورد. معادله‌ی (۴۲) تنها با در نظر گرفتن عبارت کسینوسی، به صورت رابطه‌ی (۴۳) بازنویسی می‌شود.

$$Q_0(\tau) = A \cos(\tau) \quad (43)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۴۳) در (۳۰) و حذف جمله‌ی سکولار در رابطه‌ی حاصل نتیجه می‌شود:

$$\delta_1 = 4 \quad (44)$$

$$Q_1(\tau) = \frac{1}{2} A \cos(3\tau) \quad (45)$$

با ادامه‌ی روندی مشابه بخش قبل، δ_2 و δ_3 به صورت رابطه‌ی (۴۶) محاسبه می‌شوند.

$$\delta_2 = -2, \quad \delta_3 = 4 \quad (46)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۴۶) در (۲۵)، منحنی گذار از پاسخ‌های کسینوسی برابر خواهد شد با:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 1}} \quad (47)$$

با صرف نظر از عبارت کسینوسی در رابطه‌ی (۴۲)، پاسخ سینوسی معادله‌ی (۲۹) به فرم رابطه‌ی (۴۸) تعریف می‌شود.

$$Q_0(\tau) = B \sin(\tau) \quad (48)$$

با دنبال کردن روندی مشابه بخش قبل، مقادیر δ_1, δ_2 و δ_3 برابر خواهند شد با:

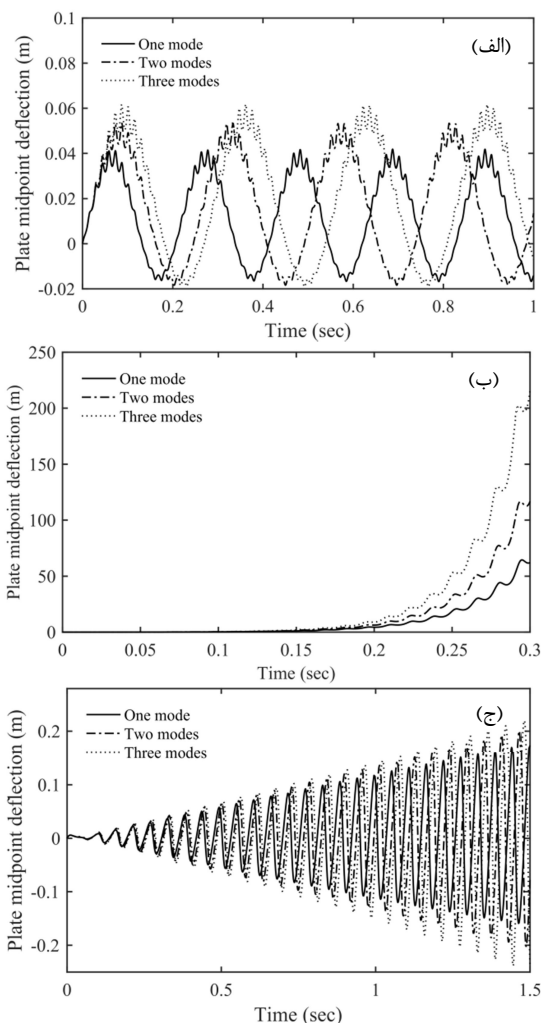
$$\delta_1 = 4, \quad \delta_2 = -2, \quad \delta_3 = 4 \quad (49)$$

بنابراین منحنی گذار از پاسخ‌های سینوسی به صورت رابطه‌ی (۵۰) حاصل می‌شود.

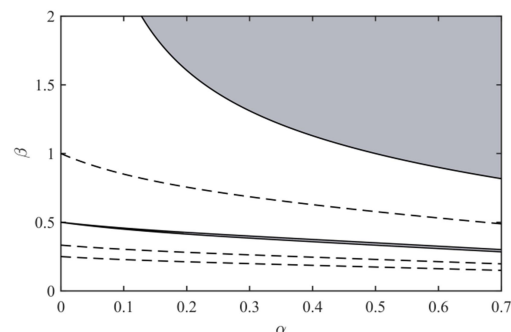
است. در شکل‌های ۶-ب و ۶-ج، دامنه‌ی نوسانات نامحدود می‌باشد، این بدین معناست که ارتعاشات ورق برای پارامترهای انتخابی با گذشت زمان به ترتیب به صورت نمایی و نوسانی افزایش می‌یابد و در نتیجه ورق ارتعاشی ناپایدار را تجربه می‌کند. علاوه بر این، از این شکل‌ها استنباط می‌گردد که در نظر گرفتن مودهای بیشتر در شبیه‌سازی‌های عددی، تغییری در ماهیت پایداری یا ناپایداری پاسخ نداشته است. اما از آنجایی که افزایش تعداد مودها منجر به نرم‌تر شدن ورق می‌شود، جابجایی نقطه میانی آن تا حدودی افزایش یافته است. نتایج شبیه‌سازی‌ها حاکی از دقت بالای نظریه فلاکه و روش‌های پارامترهای فشرده در پیش‌بینی نواحی پایدار و ناپایدار سیستم است.

۵- تأثیر پارامترهای ورق بر سرعت بحرانی جرم عبوری

با در نظر گرفتن فرکانس طبیعی مود اول ارتعاشی سیستم، پارامتر



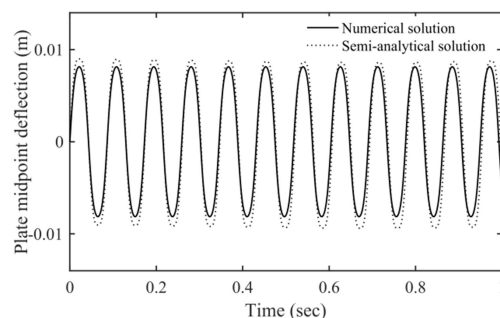
شکل ۶- پاسخ زمانی برای نقاط (الف) $(\alpha = 0.4, \beta = 1.1)$ متعلق به ناحیه پایدار (ب) $(\alpha = 0.4, \beta = 1.2)$ متعلق به ناحیه ناپایدار (ج) $(\alpha = 0.6, \beta = 0.338)$ متعلق به زبانه ناپایداری



شکل ۴- نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از روش پارامترهای فشرده

پاسخ ورق در معرض بارگذاری متحرک، زمانی از لحاظ دینامیکی پایدار است که حل معادله‌ی حاکم بر سیستم با گذشت زمان، دامنه‌ای مشخص و محدود نوسان کند. به عبارت دیگر هرگاه با گذشت زمان، دامنه‌ی ارتعاشات سیستم به طور مستمر افزایش یابد و اگرایی در پاسخ سیستم حاصل شود، سیستم به سمت ناپایداری میل کرده است. بنابراین به منظور بررسی صحت نواحی بدست آمده با روش‌های تحلیلی فلاکه و پارامترهای فشرده، پاسخ زمانی ارتعاش نقطه میانی ورق برای نقاط انتخابی از صفحه‌ی $\alpha - \beta$ با استفاده از انتگرال‌گیری عددی به دست آورده شده است.

در این شبیه‌سازی‌ها یک ورق مستطیلی شکل آلومینیومی با ابعاد $20(m) \times 10(m) \times 50(cm)$ ، جرم واحد حجم $\rho = 2700 \text{ Kg.m}^{-3}$ ، ضریب پواسون $\nu = 0.33$ و مدول ینگ $E = 70 \times 10^9 \text{ Pa}$ در نظر گرفته شده است. پاسخ زمانی بدست آمده با هر دو روش عددی و نیمه‌تحلیلی برای نقطه‌ی $(\alpha = 0.2, \beta = 0.754)$ متعلق به منحنی پاسخ همزمان در شکل ۵ نمایش داده شده است. قابل ذکر است که به منظور مقایسه، در ابتدا فقط مود اول ارتعاشی ورق در نظر گرفته شده است. می‌توان مشاهده نمود که تطابق خوبی بین روش عددی و نیمه‌تحلیلی وجود دارد.



شکل ۵- پاسخ زمانی برای نقطه‌ی $(\alpha = 0.2, \beta = 0.754)$ متعلق به منحنی پاسخ همزمان

در شکل ۶ الف-ج پاسخ‌های عددی نقطه میانی ورق مرتبط با سه دسته پارامترهای انتخابی $(\alpha = 0.4, \beta = 1.1)$ ، $(\alpha = 0.4, \beta = 1.2)$ و $(\alpha = 0.6, \beta = 0.338)$ که به ترتیب متعلق به نواحی پایدار، ناپایدار و زبانه ناپایداری هستند، با به احتساب آوردن سه مود اول ارتعاشی ورق، نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۶-الف مشاهده می‌شود، دامنه‌ی ارتعاشات سیستم با گذشت زمان محدود و پایدار

بی‌بعد β را می‌توان به فرم رابطه‌ی (۵۴) بازنویسی کرد.

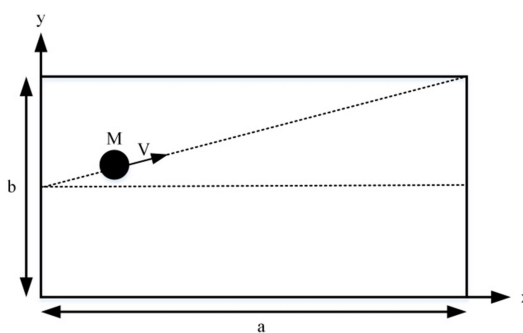
$$\beta = \frac{V}{\pi \left(\frac{h}{a} + \frac{h}{b} \times \frac{a}{b} \right)} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} \quad (54)$$

با توجه به شکل ۴ مشاهده می‌شود که برای یک جرم عبوری خاص (α معین)، سرعت‌های بحرانی متعددی وجود دارد که به ازای آن‌ها ارتعاشات ورق ناپایدار می‌شود. حال اگر بررسی تأثیر جنس ورق بر سرعت بحرانی جرم عبوری مدنظر باشد، با توجه به رابطه‌ی (۵۴)، واضح است که برای ورق با مدول یانگ بیشتر، سرعت بحرانی جرم عبوری (V_{cr}) افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به معادله‌ی مذکور مشخص است که هرچقدر ضخامت ورق افزایش پیدا کند، ارتعاشات آن در سرعت‌های بیشتری از جرم عبوری ناپایدار می‌شود.

۶- تأثیر مسیر عبور جرم‌ها بر پایداری دینامیکی

اهمیت پدیده‌ی پاسخ همزمان هنگامی آشکار می‌شود که ایجاد تغییراتی در پارامترهای سیستم منجر به باز شدن زبانه‌ی پنهان ناشی از وقوع این پدیده می‌شود. در مرجع [۱۵] و برای مساله تیر تحریک شده با جرم‌های متحرک، نشان داده شده است که با در نظر گرفتن یک نیروی محوری نوسانی در اثر ورود و خروج جرم‌ها، زبانه‌های ناپایدار پنهان در صفحه‌ی پارامترهای سیستم، آشکار می‌شوند. در مطالعه‌ی حاضر نشان داده می‌شود که مسیری که جرم‌های متحرک بر روی سطح ورق طی می‌کنند، می‌تواند تأثیر به‌سزایی بر روی باز شدن

منحنی‌های پاسخ همزمان داشته باشد. در این راستا، فرض می‌شود که جرم عبوری در طول یک مسیر مورب مطابق شکل ۷ حرکت می‌کند.



شکل ۷- عبور جرم متحرک در طول مسیری مورب

مکان جرم بر روی سطح ورق در این نوع مسیر بارگذاری با استفاده از روابط (۵۵) و (۵۶) تعریف می‌شود.

$$x_0(t) = \frac{Va}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}} t \quad (55)$$

$$y_0(t) = \frac{Vb}{2\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}} t + \frac{b}{2} \quad (56)$$

با جایگذاری روابط (۵۵) و (۵۶) در (۱۰) و تعریف پارامتر بی‌بعد

$$\beta = \frac{\pi V}{\omega_1 \sqrt{4a^2 + b^2}} \quad (57)$$

معادله دیفرانسیل همگن حاکم بر مود اول ارتعاشی سیستم در فرم

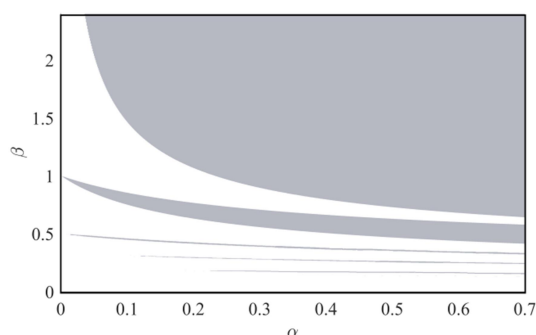
بی‌بعد به صورت رابطه‌ی (۵۸) استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} & (1 + 16\alpha \sin^2(\tau) \cos^4(\tau)) Q''(\tau) \\ & + (32\alpha (2 \sin(\tau) \cos^5(\tau) - \sin(\tau) \cos^3(\tau) \\ & - \sin^3(\tau) \cos^3(\tau))) Q'(\tau) \\ & + \left(\frac{1}{\beta^2} - 144\alpha \sin^2(\tau) \cos^4(\tau) \right. \\ & \left. + 32\alpha \sin^2(\tau) \cos^2(\tau) \right) Q(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

با توجه به نحوه‌ی بارگذاری نوبه‌ای جرم‌ها، با نوشتن بسط فوری ضرایب متغیر با زمان معادله‌ی (۵۸)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\tau) - \cos(4\tau) - \frac{1}{2} \cos(6\tau) \right) \right) Q''(\tau) \\ & - \alpha (\sin(2\tau) - 4 \sin(4\tau) - 3 \sin(6\tau)) Q'(\tau) \\ & + \left(\frac{1}{\beta^2} - \alpha \left(5 + \frac{9}{2} \cos(2\tau) - 5 \cos(4\tau) - \frac{9}{2} \cos(6\tau) \right) \right) Q(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

با تبدیل رابطه‌ی (۵۹) به فرم فضای حالت مطابق رابطه‌ی (۲۱) و تحلیل پایداری سیستم با استفاده از نظریه فلاکه، نواحی پایدار و ناپایدار صفحه‌ی پارامترها در این نوع مسیر بارگذاری حاصل و در شکل ۸ مشخص شده است.

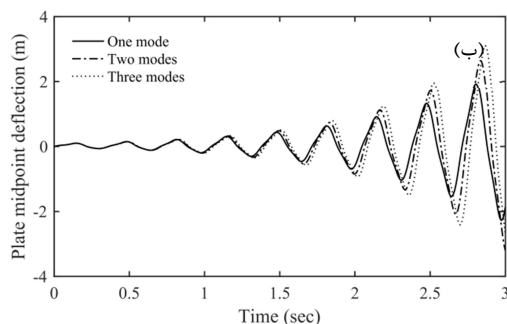


شکل ۸- نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از نظریه فلاکه

لازم به ذکر است که پنج جمله‌ی هارمونیک از سری‌های ظاهر شده در رابطه‌ی (۵۹) در تحلیل لحاظ شده است. با مقایسه‌ی نتایج حاصل با نتایج مرتبط با مسیر مستقیم (شکل ۳)، می‌توان مشاهده کرد که زبانه‌های ناپایداری جدیدی که شروع آن‌ها $\beta = 1$ ، $\beta = 0.33$ و $\beta = 0.25$ است، در صفحه‌ی پارامترها ظاهر شده است که البته در ادامه با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی به صورت دقیق‌تر

مورد بررسی قرار گرفته است.

با انجام روندی مشابه بخش ۴ با استفاده از روش پارامترهای فشرده، پاسخ‌های متناوب و منحنی‌های گذار از این پاسخ‌ها برای معادله‌ی (۵۹) محاسبه شده است. در حالت $k=1$ ، دو منحنی که از نقطه‌ی $(\alpha=0, \beta=1)$ شروع می‌شوند، یک زبانه‌ی ناپایدار را در صفحه‌ی پارامترها تشکیل می‌دهند. در بخش ۴-۲ مشاهده شد که در حالت $k=1$ دو منحنی گذار از پاسخ‌های کسینوسی و سینوسی دقیقاً با یکدیگر برابر شدند و در نتیجه‌ی آن، پدیده‌ی پاسخ همزمان اتفاق افتاد. لیکن، بعد از تغییر مسیر در عبور جرم‌ها بر روی سطح ورق، این دو منحنی منطبق بر هم باز شده و یک زبانه‌ی ناپایدار را تشکیل داده‌اند. شکل ۹ صفحه پایداری سیستم را برای پارامترهای جرم و سرعت



شکل ۱۰- پاسخ زمانی نقطه میانی ورق برای نقطه‌ی مرتبط با (الف) مسیر مستقیم (ب) مسیر مورب ($\alpha = 0.5, \beta = 0.73$)

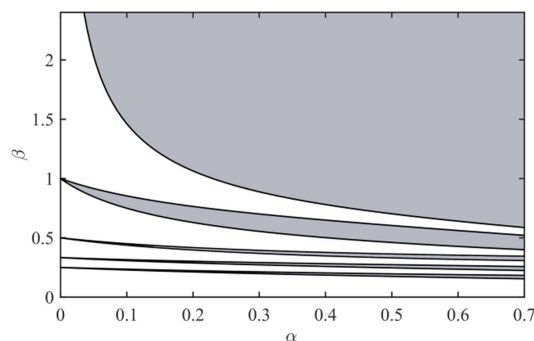
۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به تحلیل پایداری دینامیکی ورق مستطیلی شکل نازک با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده تحت عبور نوبه‌ای جرم‌های متحرک با استفاده از نظریه فلاکه و روش پارامترهای فشرده پرداخته شد. با بکارگیری روش گالرکین به همراه توابع شکل مثلثاتی معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر ارتعاشات عرضی ورق به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل گردید. ابتدا برای حرکت جرم‌ها بر روی سطح ورق، مسیری مستقیم در نظر گرفته شد و معادله‌ی حاکم با استفاده از هر دو روش فلاکه و پارامترهای فشرده مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج هر دو روش تطابق خوبی با یکدیگر نشان می‌دهند. همچنین، نتایج نیمه‌تحلیل حاکی از وقوع پدیده‌ی پاسخ همزمان برای مسیر بارگذاری مستقیم می‌باشد. در اثر وقوع این پدیده، زبانه‌هایی ناپایدار از سیستم بسته و پنهان می‌ماند که ایجاد تغییراتی جزئی در پارامترهای سیستم منجر به باز شدن این نواحی خواهد شد. این تغییر با تعریف مسیری مورب برای حرکت جرم‌ها بر روی سطح ورق اعمال گردید و نشان داده شد که منحنی‌های پاسخ همزمان در این نوع مسیر باز می‌شوند و در نتیجه نواحی ناپایدار بیشتری در صفحه‌ی پارامترها ظاهر می‌شود. وجود نواحی ناپایدار بیشتر در صفحه‌ی پارامترها بدین معناست که برای یک جرم عبوری مشخص، سرعت‌های بحرانی بیشتری وجود دارد. پارامترهای ورق بر سرعت بحرانی جرم‌های متحرک تأثیر گذار هستند. با افزایش مدول یانگ سرعت بحرانی جرم‌های عبوری افزایش می‌یابد و همچنین هر چه ورق ضخیم‌تر باشد، ارتعاشات آن در سرعت‌های بیشتری از بارهای عبوری ناپایدار می‌شود. به منظور تأیید نتایج حاصل از دو روش، از شبیه‌سازی‌های عددی استفاده شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان داد که روش‌های فلاکه و پارامترهای فشرده روش‌هایی بسیار مناسب برای تحلیل پایداری سیستم ورق-جرم متحرک می‌باشند.

۸- نمادها

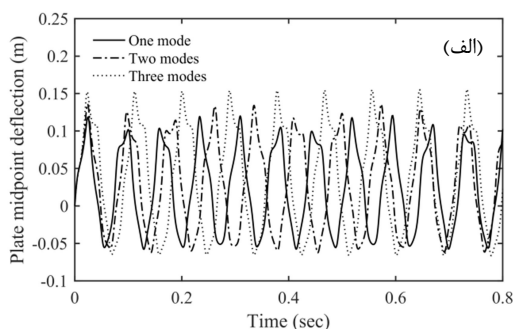
a	طول ورق (m)
b	عرض ورق (m)
D	صلبیت خمشی ورق (N.m)
E	مدول یانگ (Pa)
g	شتاب گرانش ($m.s^{-2}$)
h	ضخامت ورق (m)

بارهای عبوری، برای الگوی مسیر مورب حرکت جرم‌ها نشان می‌دهد.



شکل ۹- نواحی پایدار و ناپایدار حاصل از روش پارامترهای فشرده

زبانه‌های پنهان دیگری که با تغییر الگوی مسیر عبور جرم‌ها آشکار شده است، زبانه‌های باریک شروع شده از ($\alpha = 0, \beta = 0.33$) و ($\alpha = 0, \beta = 0.25$) می‌باشد. با مقایسه‌ی شکل‌های ۸ و ۹ می‌توان دریافت که روش پارامترهای فشرده در مسیر بارگذاری مورب پایداری سیستم را با دقت خوبی تحلیل کرده است. به عنوان نتیجه‌ای کلی، مسیری که جرم‌های متحرک بر روی سطح ورق طی می‌کنند، تأثیر به سزایی در پایداری ورق و باز شدن نواحی پنهان ناپایدار در صفحه‌ی پارامترها دارد که عدم توجه به آن می‌تواند باعث وقوع پیامدهایی ناخواسته در سازه‌ی ورق شود. این موضوع را می‌توان به مثابه حرکت وسایل نقلیه بر روی پل‌ها در نظر گرفت. مسیری که وسایل نقلیه بر روی پل‌ها طی می‌کنند یا انحراف آن‌ها از مسیر خود می‌تواند نقش مهمی در پایداری ارتعاشات پل‌ها ایفاء کند. برای درک بهتر این موضوع، معادلات حاکم بر الگوی مسیر مستقیم و مورب برای پارامترهای ($\alpha = 0.5, \beta = 0.73$) با استفاده از انتگرال‌گیری عددی و با در نظر گرفتن سه مود اول ارتعاشی ورق، حل شده است. این جفت پارامتر در بارگذاری مسیر مستقیم متعلق به ناحیه‌ی پایدار است و در مسیر مورب در زبانه‌ی ناپایدار واقع است. پاسخ‌های زمانی ارتعاش نقطه میانی ورق در شکل ۱۰ رسم شده‌اند. در شکل ۱۰-الف واضح است که ورق به ازای پارامترهای انتخابی در مسیر بارگذاری مستقیم، ارتعاشی پایدار را تجربه می‌کند، در صورتی که در مسیر مورب مطابق شکل ۱۰-ب دامنه‌ی ارتعاشات ورق برای همان پارامترها، به صورت نامحدود افزایش می‌یابد.



- [13] Pirmoradian M., Keshmiri M., Karimpour H., Instability and resonance analysis of a beam subjected to moving mass loading via incremental harmonic balance method, *Vibroengineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 2779-2789, 2014.
- [14] Pirmoradian, M., Keshmiri M., Karimpour H., On the parametric excitation of a Timoshenko beam due to intermittent passage of moving masses: instability and resonance analysis, *Acta Mechanica*, Vol. 17, No. 9, pp. 1310-1324, 2014.
- [15] Karimpour H., Pirmoradian, M., Keshmiri M., Instance of hidden instability traps in intermittent transition of moving masses along a flexible beam, *Acta Mechanica*, Vol. 227, No. 4, pp. 1213-1224, 2016.
- [16] Nayfeh A.H., Mook D.T., *Nonlinear Oscillations*, New York: John Wiley, 1979.
- [17] Chakraverty S., *Vibration of Plates.*, New York: CRC Press, 2008.

$\bar{J}$	عدد موهومی
M	جرم بارهای عبوری (kg)
m	مود ارتعاشی سیستم
n	مود ارتعاشی سیستم
Q	دامنه‌ی مودال سیستم
T	دوره تناوب حرکت (s)
T	زمان (s)
V	سرعت بارهای عبوری ($m.s^{-1}$)
w	جابجایی عرضی ورق (m)
α	جرم بی‌بعد بارهای عبوری
β	سرعت بی‌بعد بارهای عبوری
ε	پارامتر اغتشاش کوچک
ν	ضریب پواسون
ρ	جرم واحد حجم ورق ($kg.m^{-3}$)
φ	تابع شکل ورق
ω	فرکانس طبیعی ورق ($rad.s^{-1}$)

۹- مراجع

- [1] Nikkhoo A., Rofooei F. R., Shadnam M.R., Dynamic behavior and modal control of beams under moving mass, *Sound and Vibration*, Vol. 306, No. 3, pp. 712-724, 2007.
- [2] Nikkhoo A., Rofooei F. R., Parametric study of the dynamic response of thin rectangular plates traversed by a moving mass, *Acta Mechanica*, Vol. 223, No. 1, pp. 15-27, 2012.
- [3] Sudheesh Kumar C.P., Sujatha C., Krishnapillai S., Non-uniform Euler-Bernoulli beams under a single moving oscillator: An approximate analytical solution in time domain, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 30, No. 10, pp. 4479-4487, 2016.
- [4] Ghazvini T., Nikkhoo A., Allahyari H., Zalpuli, M., Dynamic response analysis of a thin rectangular plate of varying thickness to a traveling inertial load, *Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 403-411, 2016.
- [5] Enshaeian A., Rofooei F. R., Geometrically nonlinear rectangular simply supported plates subjected to a moving mass, *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 2, pp. 595-608, 2014.
- [6] Rofooei F. R., Enshaeian A., Nikkhoo A., Dynamic response of geometrically nonlinear, elastic rectangular plates under a moving mass loading by inclusion of all inertial components, *Sound and Vibration*, Vol. 394, pp. 497-514, 2017.
- [7] Mazilu T., Instability of a train of oscillators moving along a beam on a viscoelastic foundation, *Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 19, pp. 4597-4619, 2013.
- [8] Ju S.H., Nonlinear analysis of high-speed trains moving on bridges during earthquakes, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 69, No. 1, pp. 173-183, 2012.
- [9] Ghorbani E., Keshmiri M., Identification of pseudo-natural frequencies in a beam-moving mass system with periodic passages, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 29, No. 7, pp. 2739-2734, 2015.
- [10] Ghorbani E., Keshmiri M., Natural frequency extraction of a beam-moving mass system with periodic passages using its pseudo-natural frequencies, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 30, No. 7, pp. 2981-2986, 2016.
- [11] Aldraihem O.J., Baz A., Dynamic stability of stepped beams under moving loads, *Sound and Vibration*, Vol. 250, No. 5, pp. 835-848, 2002.
- [12] Mackertich S., Dynamic stability of a beam excited by a sequence of moving mass particles, *Acoustical Society of America*, Vol. 226, No. 4, pp. 1241-1253, 2004.