

تحلیل اثرات فشارهای خارجی و تقویت کننده ها روی ارتعاشات یک پوسته استوانه ای ساندویچی با استفاده از روش انرژی تحت شرایط تکیه گاهی نامتقارن

محمد رضا عیسوند زیبائی*

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اندیمشک، اندیمشک، ایران

چکیده

در این مقاله به بررسی اثرات فشارهای خارجی و تقویت کننده ها روی ارتعاشات یک پوسته استوانه ای ساندویچی با استفاده از روش انرژی تحت شرایط تکیه گاهی نامتقارن پرداخته شده است. این پوسته سه لایه تشکیل شده است از که لایه های داخلی و خارجی از فولاد ضد زنگ و لایه میانی متشکل از ماده آلومینیوم می باشد. معادلات پوسته استوانه ای ساندویچی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی بدست آمده است. معادلات حرکت به روش انرژی و بکار بردن روش ریتز استخراج شده اند. شرایط تکیه گاهی نامتقارن در لایه های دو انتهای پوسته استوانه ای ساندویچی به صورت گیردار-آزاد، گیردار-ساده و آزاد-ساده در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از روش ارائه شده با نتایج دیگر محققان مقایسه و تطابق مناسبی مشاهده شده است. در نهایت تاثیر شرایط تکیه گاهی نامتقارن، فشارهای خارجی و تقویت کننده ها روی ارتعاشات پوسته استوانه ای ساندویچی مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: ارتعاشات؛ فشار؛ تقویت کننده؛ روش انرژی؛ شرایط نامتقارن؛ پوسته استوانه ای ساندویچی.

Analysis of Effects External Pressures and Stiffeners on Vibration of Sandwich Cylindrical Shell Based on Energy Method under Asymmetrical Boundary Conditions

M. R. Isvandzibaei

Department of Mechanical Engineering, Andimeshk Branch, Islamic Azad University, Andimeshk, Iran

Abstract

In this paper presents the effects external pressures and stiffeners on vibration of sandwich cylindrical shell based on energy method under asymmetrical boundary conditions. The sandwich shell is formed by three layers where the inner and outer layers are stainless steel and the middle layer is aluminum. The sandwich cylindrical shell equations are established based on first order shear deformation theory (FSDT). The governing equations of motion were employed, using energy functional and by applying the Ritz method. The asymmetrical boundary conditions represented by end conditions of the sandwich cylindrical shell are clamped-free (C-F), clamped-simply support (C-SS) and free-simply support (F-SS). The presented results are compared with those available in the literature and great agreement is observed. Finally, the effects asymmetrical boundary conditions, external pressures and stiffeners on vibration of sandwich cylindrical shell are studied.

Keywords: Vibration, Pressure, Stiffeners, Energy Method, Asymmetrical Conditions, Sandwich Cylindrical Shell.

۱- مقدمه

پوسته های استوانه ای در بسیاری از کاربردها در زمینه های مختلف مانند هوا فضا، عمران، مکانیک، سازه های دریایی و غیره مورد استفاده قرار می گیرند [۱]. این پوسته ها در هواپیماها، کشتی ها، شاتل های فضایی، موشک ها، مخازن تحت فشار، مخازن نفت، زیردریایی ها به کار گرفته می شوند. برای افزایش استحکام و سفتی پوسته از تقویت کننده استفاده می شود. پوسته استوانه ای در اثر بارهای دینامیک دچار ارتعاش و کماتش می شوند که شناخت خصوصیات آنها مانند فرکانس ها و بار کماتشی بسیار حیاتی می باشد. امروزه با توجه به طراحی پوسته های سبک با استحکام بالا لازم است که اینگونه سازه ها بهینه باشند.

پوسته های استوانه ای طویل، زمانی که در معرض تغییر شکل های بزرگ قرار می گیرند به وسیله تقویت کننده ها استحکام آنها افزایش می یابد. نجفی و واربارتون [۲] ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ای با سخت کننده ها را بررسی کردند. شارما و جونز [۳] ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ای دایره ای با سخت کننده ها بر اساس شرایط مرزی گیردار-آزاد را بررسی نمودند. اشنایدریا و زالتب [۴] رفتار یک پوسته

استوانه ای با سخت کننده ها تحت بار استاتیکی را مطالعه کردند. یان و همکاران [۵] خصوصیات ارتعاشی یک پوسته استوانه ای غوطه ور با سخت کننده ها را بررسی کردند. وانگ و لین [۶] پوسته های استوانه ای با سخت کننده ها را مورد مطالعه قرار دادند. با توجه به کاربردهای ویژه و مهم این سازه ها، مطالعه و بررسی فرکانس های طبیعی آنها بسیار حائز اهمیت می باشد.

آرنولد و واربروتون [۷] معادلات حرکت را برای یک پوسته استوانه ای نازک ارائه کردند. بلوینس [۸] شکل مدهای فرکانسی را مطالعه کرد، سودل [۹] یک فرمول فرکانسی برای پوسته های استوانه ای دایره ای ارائه کرد و برای حالت های مختلف تغییر شکل های پوسته نتایج را استخراج کرد. چانگ [۱۰] تحلیل فرکانس های طبیعی و شکل مدهای یک پوسته استوانه ای شکل را بررسی کرد. تحقیقات در ارتباط با تغییرات ضخامت پوسته های استوانه ای را می توان به ردی [۱۱] و سودل [۱۲] نسبت داد. آنها فرکانسهای طبیعی مختلف را با تغییر دادن نسبت ضخامت پوسته استخراج کردند و معادلات حاکم را بر اساس تئوری کلاسیک به دست آوردند.

لیو و همکاران [۱۳] تحلیل ارتعاشی پوسته های استوانه ای چرخشی با سخت کننده ها تحت شرایط مرزی دلخواه را مورد مطالعه

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: esvandzibaei@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۲/۰۱

تاریخ پذیرش: ۹۷/۱۰/۱۷

قرار دادند. پوسته دارای یک لایه و شرایط تکیه گاهی دلخواه در طول پوسته در نظر گرفته شده بود. آنها اثرات سرعت چرخشی روی یک پوسته استوانه ای با سخت کننده ها را تحت ارتعاشات آزاد نشان دادند. رامامورتی و پاتاییرامان [۱۴] و شن و همکاران [۱۵] ارتعاشات پوسته های استوانه ای ایزوتروپیک تحت بار های دینامیکی را بررسی نمودند. ساراوانان و همکاران [۱۶] یک تحلیل اجزای محدود برای پوسته های استوانه ای چند لایه مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. آنها از یک پوسته چند لایه پر شده از سیال استفاده کردند. استفاده از روش گالرکین برای بدست آوردن معادلات حرکت برای یک پوسته استوانه ای چند لایه چرخشی توسط هوآ [۱۷] مطالعه شد. ملک زاده و همکاران [۱۸] شبیه سازی روی پاسخ دینامیکی یک پوسته استوانه ای چند لایه را مورد مطالعه قرار دادند. شرایط مرزی انتخاب شده از نوع گیردار-آزاد و تئوری استفاده شده در تحقیق از نوع مرتبه سوم تغییر شکل برشی بود.

مطالعه فرکانس های طبیعی پوسته های استوانه ای ساندویچی با تقویت کننده و فشار از جنبه های مهم کاربرد موفق پوسته ها در صنعت می باشد. آنها به عنوان پوسته های استوانه ای طویل استفاده می شوند مانند هواپیما ها، زیردریایی ها و غیره. این پوسته های استوانه ای بدون تقویت کننده ها به علت کاهش استحکام دستخوش تغییر شکل و در نهایت منجر به شکست می شوند [۱۹]. پوسته های استوانه ای چند لایه اغلب موثرتر و مفیدتر از پوسته های استوانه ای ک لایه می باشند. علت این امر بهبود در خواص مکانیکی لایه ها می باشد [۲۰]. سازه های چند لایه به علت سختی بالاتر، مقاومت فشاری، حد خستگی، میرایی بهتر و خصوصیات جذب شوک قادر هستند اثرات انرژی را در میان لایه ها توزیع کنند. در میان سازه های مختلف پوسته های استوانه ای، تحلیل ارتعاشات پوسته های استوانه ای ساندویچی تقویت شده را می توان در این مراجع یافت [۲۱-۲۴].

تا کنون در هیچکدام از کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات پوسته ها، اثر همزمان پارامترهای سه رینگ تقویتی و فشارهای خارجی روی پوسته های سه لایه ساندویچی آن هم با در نظر گرفتن نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی بررسی نشده است. در این تحقیق، محل رینگ ها ثابت در نظر گرفته نشده و در نتایج ارائه شده اثر تغییرات این پارامتر روی فرکانس های طبیعی نیز با جزئیات تفسیر شده است. همچنین اثر شرایط مرزی مختلف روی ارتعاشات هم کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

هدف از این تحقیق که مراحل آن بسیار دقیق انجام شده است مطالعه یک روش تحلیلی برای ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی می باشد. معادلات پوسته استوانه ای ساندویچی با سه رینگ تقویتی و فشار خارجی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی بدست آمده است. سپس، معادلات حاکم حرکت به روش انرژی و بکار بردن تکنیک ریتز استخراج شده اند. رویه ها (فولاد) و هسته (آلومینیوم) کاملاً به یکدیگر چسبیده می باشند به طوری که جابجایی نسبی بین آنها در محل اتصال وجود نداشته باشد. تقویت کننده ها دارای مقطع مستطیلی هستند و کاملاً از لحاظ هندسی و جنس یکسان بوده و فاصله بین آنها برابر می باشد. پیکربندی پوسته استوانه ای ساندویچی

تقویتی تشکیل شده است از سه لایه ایزوتروپیک که لایه های داخلی و خارجی از فولاد ضد زنگ و لایه میانی متشکل از ماده آلومینیوم می باشد. شرایط مرزی مختلف انتخاب شده در لبه های دو انتهای پوسته استوانه ای ساندویچی به صورت گیردار-آزاد، گیردار- ساده و آزاد- ساده در نظر گرفته شده است. تاثیر فشارهای خارجی، موقعیت رینگ های تقویتی و شرایط مرزی نامتقارن مختلف روی خصوصیات فرکانسهای طبیعی مورد ارزیابی و بررسی قرار گرفته شده است.

۲- تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

شکل ۱ هندسه طرح کلی مسئله مورد بحث را نشان می دهد که در آن یک پوسته استوانه ساندویچی تقویت شده تحت فشارهای خارجی با ضخامت h ، شعاع R ، طول L ، موقعیت رینگ های تقویتی b و فشار خارجی P قرار دارد. یک سیستم مختصات متعامد در سطح میانی پوسته چند لایه در امتداد x, θ, z انتخاب شده است. تغییر مکان های پوسته استوانه ای چند لایه u, v, w در سطح میانی پوسته در نظر گرفته می شود. ضخامت پوسته استوانه ای ساندویچی بین سه لایه ایزوتروپیک تقسیم می شود که لایه های داخلی و خارجی از فولاد ضد زنگ و لایه میانی متشکل از ماده آلومینیوم می باشد.

میدان جابجایی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی برای یک نقطه اختیاری در سیستم مختصات استوانه ای به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} (x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z\psi_x(x, \theta) \\ \theta(x, \theta, z) &= \theta_0(x, \theta) + z\psi_\theta(x, \theta) \\ \omega(x, \theta, z) &= \omega_0(x, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $u(x, \theta, z)$ ، $\theta(x, \theta, z)$ و $\omega(x, \theta, z)$ اجزای جابه جایی در جهات x ، θ و z ، $u_0(x, \theta)$ ، $\theta_0(x, \theta)$ و $\omega_0(x, \theta)$ اجزای جابجایی در سطح میانی پوسته چند لایه و $\psi_x(x, \theta)$ ، $\psi_\theta(x, \theta)$ و $\psi_\omega(x, \theta)$ نرمال های چرخشی سطح میانی پوسته چند لایه می باشند.

۲-۱ روابط کرنش-جابجایی

روابط کرنش-جابجایی برای یک پوسته استوانه ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u(x, \theta, z)}{\partial x} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \theta(x, \theta, z) + \frac{\omega(x, \theta, z)}{R_1} \quad (2)$$

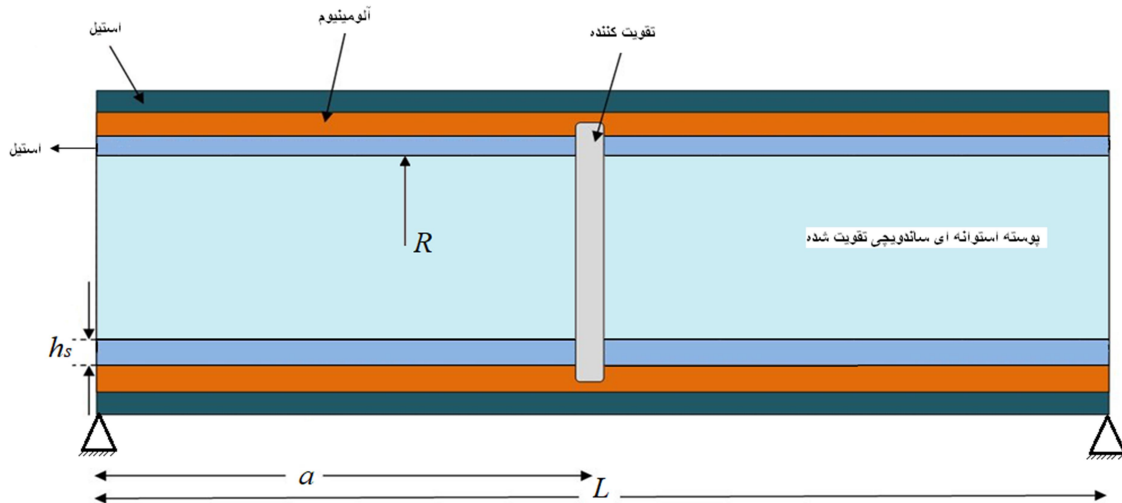
$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta(x, \theta, z)}{\partial \theta} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} u(x, \theta, z) + \frac{R_2}{\omega(x, \theta, z)} \quad (3)$$

$$\bar{\epsilon}_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta(x, \theta, z)}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u(x, \theta, z)}{A_1} \right) \quad (4)$$

$$\bar{\epsilon}_{13} = A_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u(x, \theta, z)}{A_1} \right) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega(x, \theta, z)}{\partial x} \quad (5)$$

$$\bar{\epsilon}_{23} = A_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta(x, \theta, z)}{A_2} \right) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega(x, \theta, z)}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = 0 \quad (7)$$



شکل ۱- هندسه یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

که در این روابط مقادیر کرنش-جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} + \frac{\omega_0(x, \theta)}{R} \\ \frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{22} \\ L_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} \\ \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} + \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_x(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial x} \\ \psi_\theta(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

که در این روابط ε_{22}^0 ، ε_{11}^0 ، ε_{12}^0 ، γ_{23} ، γ_{13} کرنش‌های برشی در سطح میانی پوسته چند لایه، ε_{11}^0 ، ε_{22}^0 ، γ_{23} ، γ_{13} کرنش‌های برشی در سطح میانی پوسته چند لایه، L_{11} ، L_{22} تغییرات سطح میانی در منحنی و L_{12} پیش‌سختی سطح پوسته ساندویچی می‌باشد.

۳- روابط تنش-کرنش

روابط تنش-کرنش برای یک پوسته استوانه ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی با شرایط تنش صفحه ای بصورت رابطه (۲۰) در نظر گرفته می‌شود:

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{Q}]\{\bar{\varepsilon}\} \quad (20)$$

در این رابطه $\{\bar{\sigma}\}$ بردار تنش، $\{\bar{\varepsilon}\}$ بردار کرنش و $[\bar{Q}]$ ماتریس سختی می‌باشند و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\{\bar{\sigma}\}^T = \{\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{12} \bar{\sigma}_{13} \bar{\sigma}_{23}\} \quad (21)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\}^T = \{\bar{\varepsilon}_{11} \bar{\varepsilon}_{22} \bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{13} \bar{\varepsilon}_{23}\} \quad (22)$$

نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی توسط اثرات تغییر شکل برشی در فرمول بندی پوسته در نظر گرفته می‌شود و طبق فرضیات این نظریه خطوط عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل بر صفحه عمود نخواهند ماند و زاویه چرخش آنها متفاوت با زاویه چرخش فرض شده در نظریه کلاسیک است. که در این روابط A_1 و A_2 پارامترهای لامه می‌باشند و به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۲]:

$$A_1 = \frac{\partial r}{\partial x} \quad (8)$$

$$A_2 = \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad (9)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در روابط کرنش-جابجایی (۷)-(۲) و به کار بردن سیستم مختصات استوانه ای روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \quad (10)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v_0(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} + z \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} + \frac{\omega_0(x, \theta)}{R} \quad (11)$$

$$\bar{\varepsilon}_{12} = \frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} z \left(\frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} + \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$\bar{\varepsilon}_{13} = \psi_x(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial x} \quad (13)$$

$$\bar{\varepsilon}_{23} = \psi_\theta(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{R \frac{\partial \theta}{\partial x}} \quad (14)$$

روابط کرنش-جابجایی به فرم ماتریسی با استفاده از نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{22} \\ L_{12} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \quad (23)$$

سپس معادله (۲۰) به شکل زیر تعریف می شود:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \\ \bar{\epsilon}_{13} \\ \bar{\epsilon}_{23} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

برای یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده اجزای ماتریس سختی $\bar{Q}_{ij}$ به صورت زیر تعریف می گردند:

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E}{1 - \vartheta^2} \quad (25)$$

$$\bar{Q}_{12} = \frac{\vartheta E}{(1 - \vartheta^2)} \quad (26)$$

$$\bar{Q}_{21} = \frac{\vartheta E}{(1 - \vartheta^2)} \quad (27)$$

$$\bar{Q}_{22} = \frac{E}{A(1 - \vartheta^2)} \quad (28)$$

$$\bar{Q}_{66} = \frac{E}{2(1 - \vartheta)} \quad (29)$$

$$\bar{Q}_{44} = \frac{E}{2(1 - \vartheta)} \quad (30)$$

$$\bar{Q}_{55} = \frac{E}{2(1 - \vartheta)} \quad (31)$$

منتجه ها به صورت زیر تعریف می گردند:

$$\{N_x \ N_\theta \ N_{x\theta} \ H_x \ H_\theta\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{\sigma}_{11} \ \bar{\sigma}_{22} \ \bar{\sigma}_{12} \ \bar{\sigma}_{13} \ \bar{\sigma}_{23}\} dz \quad (32)$$

$$\{M_x \ M_\theta \ M_{x\theta}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{\sigma}_{11} \ \bar{\sigma}_{22} \ \bar{\sigma}_{12}\} z dz \quad (33)$$

پس از جایگزینی معادلات (۱۰) تا (۱۴) در معادله (۲۴) و سپس جایگزین کردن در معادلات (۳۲) و (۳۳) فرم ترکیبی نتیجه ها به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\{N\} = [I]\{\bar{\epsilon}\} \quad (34)$$

در این رابطه $\{N\}$ ، $[I]$ و $\{\bar{\epsilon}\}$ عبارتند از:

$$\{N\}^T = \{N_x \ N_\theta \ N_{x\theta} \ M_x \ M_\theta \ M_{x\theta} \ H_x \ H_{x\theta}\} \quad (35)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{16} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{16} & 0 & 0 \\ X_{12} & X_{22} & X_{26} & Y_{12} & Y_{22} & Y_{26} & 0 & 0 \\ X_{16} & X_{26} & X_{66} & Y_{16} & Y_{26} & Y_{66} & 0 & 0 \\ Y_{11} & Y_{12} & Y_{16} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{16} & 0 & 0 \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{26} & Z_{12} & Z_{22} & Z_{26} & 0 & 0 \\ Y_{16} & Y_{26} & Y_{66} & Z_{16} & Z_{26} & Z_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{44} & V_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{45} & V_{55} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\{\bar{\epsilon}\}^T = \{\bar{\epsilon}_{11} \ \bar{\epsilon}_{22} \ \bar{\epsilon}_{12} \ \bar{\epsilon}_{11} \ \bar{\epsilon}_{22} \ \bar{\epsilon}_{12} \ \bar{\epsilon}_{13} \ \bar{\epsilon}_{23}\} \quad (37)$$

در معادله (۳۶) X_{ij} ، Y_{ij} و Z_{ij} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(X_{ij} \ Y_{ij} \ Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1 - z \ z^2) dz \quad (38)$$

$$V_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad (39)$$

برای یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده تشکیل شده از لایه های مختلف X_{ij} ، Y_{ij} و Z_{ij} به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^H Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \quad (40)$$

$$Y_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^H Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}^2) \quad (41)$$

$$Z_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^H Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (42)$$

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^H Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \quad (43)$$

که در این معادلات h_k و h_{k-1} فاصله از سطح میانی پوسته استوانه ای ساندویچی به سطح بیرونی و داخلی k امین لایه می باشند. Q_{ij}^k سختی k امین لایه و H شماره لایه ها در یک پوسته استوانه ای ساندویچی می باشند. با جایگزینی معادلات (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) در معادله (۳۴) خواهیم داشت

$$\left\{ \begin{matrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ H_x \\ H_{x\theta} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{11} & X_{12} & X_{16} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{16} & 0 & 0 \\ X_{12} & X_{22} & X_{26} & Y_{12} & Y_{22} & Y_{26} & 0 & 0 \\ X_{16} & X_{26} & X_{66} & Y_{16} & Y_{26} & Y_{66} & 0 & 0 \\ Y_{11} & Y_{12} & Y_{16} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{16} & 0 & 0 \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{26} & Z_{12} & Z_{22} & Z_{26} & 0 & 0 \\ Y_{16} & Y_{26} & Y_{66} & Z_{16} & Z_{26} & Z_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{44} & V_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{45} & V_{55} \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} + \frac{w_0(x, \theta)}{R} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + z \left(\frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + z \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{w_0(x, \theta)}{R} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + z \left(\frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} \right) \\ \psi_x(x, \theta) + \frac{\partial w_0(x, \theta)}{\partial x} \\ \psi_\theta(x, \theta) + \frac{\partial w_0(x, \theta)}{R \partial \theta} \end{matrix} \right\} \quad (44)$$

۴- معادلات انرژی

حال به بررسی انرژی پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده تحت فشار خارجی همانند شکل ۱ پرداخته می شود

۴-۱- انرژی کرنشی

انرژی کرنشی یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده تحت فشار خارجی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به شرح زیر است [۲۵]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{\bar{\epsilon}\}^T [I] \{\bar{\epsilon}\} R d\theta dx \quad (45)$$

با جایگزینی روابط $\{N\}$ ، $[I]$ و $\{\bar{\epsilon}\}$ در معادله انرژی کرنشی (۴۵) خواهیم داشت:

کند. b_i موقعیت تقویت کننده، H تعداد رینگ، μ_i پارامتری است که با توجه به وجود سه رینگ مقدارش سه می باشد.
تابع محوری $\Omega(x)$ به عنوان یک تابع تیر و به صورت زیر انتخاب می شود [۲۷]:

$$\Omega(x) = \psi_1 \cosh\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) + \psi_2 \cos\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) - \mu_m \left(\psi_3 \sinh\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) + \psi_4 \sin\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) \right) \quad (52)$$

که در معادله (۵۲) مقادیر $\Psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ، Φ_m و μ_m برای شرایط مرزی گیردار-آزاد، گیردار- ساده و آزاد- ساده مطابق جدول شماره ۱ داده شده است.

جدول ۱- مقادیر $\Psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ، Φ_m و μ_m برای شرایط مرزی گیردار-آزاد، گیردار- ساده و آزاد- ساده

رابطه مرزی	Φ_m	$\Psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$	μ_m
گیردار- آزاد	$\frac{(2m-1)\pi}{2}$	$\psi_1 = 1, \psi_2 = -1$ $\psi_3 = 1, \psi_4 = -1$	$\frac{\sinh\Phi_m - \sin\Phi_m}{\cosh\Phi_m + \cos\Phi_m}$
گیردار- ساده	$\frac{(4m+1)\pi}{4}$	$\psi_1 = 1, \psi_2 = -1$ $\psi_3 = 1, \psi_4 = -1$	$\frac{\cosh\Phi_m - \cos\Phi_m}{\sinh\Phi_m - \sin\Phi_m}$
آزاد-ساده	$\frac{(4m+1)\pi}{4}$	$\psi_1 = 1, \psi_2 = 1$ $\psi_3 = 1, \psi_4 = 1$	$\frac{\cosh\Phi_m - \cos\Phi_m}{\sinh\Phi_m - \sin\Phi_m}$

۶- روش ریتز

در این تحقیق، از روش تحلیلی ریتز برای پاسخ فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی استفاده شده است و تابع انرژی به صورت زیر تعریف می شود:

$$F = U_{max} - T_{max} + E_{External} \quad (53)$$

با جایگزینی معادله (۵۱) در معادلات (۴۶)، (۴۷) و (۴۹) و به کار بردن روش ریتز با به حداقل رساندن تابع انرژی F خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_1} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_2} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_3} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_4} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_5} &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

در رابطه (۵۴) پنج معادله حرکت وجود دارد، بنابراین معادله مقدار مشخصه به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15} \\ C_{21}C_{22}C_{23}C_{24}C_{25} \\ C_{31}C_{32}C_{33}C_{34}C_{35} \\ C_{41}C_{42}C_{43}C_{44}C_{45} \\ C_{51}C_{52}C_{53}C_{54}C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \\ \bar{E}_4 \\ \bar{E}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

برای داشتن جواب غیر صفر باید دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر صفر شود:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{ & \bar{E}_{11}^2 X_{11} + \bar{E}_{11}\bar{E}_{22}X_{12} + \bar{E}_{11}\bar{E}_{12}X_{16} + \bar{E}_{11}^2 Y_{11} \\ & + \bar{E}_{11}\bar{E}_{22}Y_{12} + \bar{E}_{11}\bar{E}_{12}Y_{16} \\ & + \bar{E}_{22}\bar{E}_{11}X_{12} + \bar{E}_{22}^2 X_{22} \\ & + \bar{E}_{22}\bar{E}_{12}X_{26} + \bar{E}_{22}\bar{E}_{11}Y_{12} + \bar{E}_{22}^2 Y_{22} \\ & + \bar{E}_{22}\bar{E}_{12}Y_{26} + \bar{E}_{12}\bar{E}_{11}X_{16} \\ & + \bar{E}_{12}\bar{E}_{22}X_{26} + \bar{E}_{12}^2 X_{66} + \bar{E}_{12}\bar{E}_{11}Y_{16} \\ & + \bar{E}_{12}\bar{E}_{22}Y_{26} + \bar{E}_{12}^2 Y_{66} + \bar{E}_{12}^2 Y_{11} \\ & + \bar{E}_{11}\bar{E}_{22}Y_{12} + \bar{E}_{11}\bar{E}_{12}Y_{16} + \bar{E}_{11}^2 Z_{11} \\ & + \bar{E}_{11}\bar{E}_{22}Z_{12} + \bar{E}_{11}\bar{E}_{12}Z_{16} \\ & + \bar{E}_{22}\bar{E}_{11}Y_{12} + \bar{E}_{22}^2 Y_{22} + \bar{E}_{22}\bar{E}_{12}Y_{26} \\ & + \bar{E}_{22}\bar{E}_{11}Z_{12} + \bar{E}_{22}^2 Z_{22} + \bar{E}_{22}\bar{E}_{12}Z_{26} \\ & + \bar{E}_{12}\bar{E}_{11}Y_{16} + \bar{E}_{12}\bar{E}_{22}Y_{26} + \bar{E}_{12}^2 Y_{66} \\ & + \bar{E}_{12}\bar{E}_{11}Z_{16} + \bar{E}_{12}\bar{E}_{22}Z_{26} + \bar{E}_{12}^2 Z_{66} \\ & + \bar{E}_{13}^2 V_{44} + \bar{E}_{13}\bar{E}_{23}V_{45} + \bar{E}_{23}\bar{E}_{13}V_{45} \\ & + \bar{E}_{23}^2 V_{55} \} R d\theta dx \end{aligned} \quad (46)$$

۴-۲- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده تحت فشار خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به فرم زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_T \left\{ & \left(\frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 \right. \\ & + \left(\frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 \\ & \left. + \left(\frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 \right\} R d\theta dx \end{aligned} \quad (47)$$

که در معادله (۴۷) چگالی ρ_T به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\rho_T = \sum_{k=1}^H \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad (48)$$

۴-۳- انرژی پتانسیل فشار خارجی

انرژی پتانسیل فشار خارجی یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی شده بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر بدست می آید

$$E_{External} = \frac{P_{External}}{4} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial x} \right)^2 R^2 d\theta dx \quad (49)$$

در نهایت تابع انرژی برای پاسخ فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر می باشد:

$$F = U - T + E_{External} \quad (50)$$

۵- میدان جابجایی

میدان جابجایی برای فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ و فشار بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر تعریف می شود [۲۶]:

$$\begin{aligned} u_0(x, \theta) &= \bar{E}_1 \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \theta_0(x, \theta) &= \bar{E}_2 \Omega(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\ \omega_0(x, \theta) &= \bar{E}_3 \Omega(x) \prod_{i=1}^H (x - b_i)^{\mu_i} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (51)$$

$\psi_x(x, \theta) = \bar{E}_4 \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t)$
 $\psi_\theta(x, \theta) = \bar{E}_5 \Omega(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t)$
که در آن $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{E}_4, \bar{E}_5$ ثابت های دامنه ارتعاشی می باشند. $\Omega(x)$ تابع محوری می باشد که در شرایط مرزی صدق می

$$|C_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (56)$$

در نهایت با حل معادله معادله (56) خواهیم داشت:

$$\delta_0 \omega^{10} + \delta_1 \omega^8 + \delta_2 \omega^6 + \delta_3 \omega^4 + \delta_4 \omega^2 + \delta_5 = 0 \quad (57)$$

معادله مشخصه درجه ۱۰ بالا دارای پنج جواب مثبت و پنج جواب منفی می باشد. جواب های مثبت فرکانس های طبیعی پوسته استوانه ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی هستند که کوچکترین آنها جواب مورد قبول این تحقیق می باشد. خواص مواد سه لایه استفاده شده در پوسته استوانه ای در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲- خواص مواد سه لایه

موقعیت	نوع مواد	E (N/m ²)	θ	ρ (kg/m ³)
لایه خارجی	فولاد زنگ نزن	2.1×10^{11}	0.28	7.8×10^3
لایه میانی	آلومینیوم	7.0×10^{10}	0.35	2.7×10^3
لایه خارجی	فولاد زنگ نزن	2.1×10^{11}	0.28	7.8×10^3

۷- همگرایی و مقایسه پژوهش

به منظور درک بهتر فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی و بررسی صحت روابط تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل با نتایج منتشر شده در ادبیات موضوع مقایسه شده است. در جدول ۳ مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای بدون تقویت کننده و فشار خارجی در نظر گرفته و نتایج پارامتر فرکانسی $\Gamma = \omega R \sqrt{(1 - \theta^2)\rho/E}$ با نتایج بدست آمده از نظریه کلاسیک مرجع (۱۰) مقایسه گردیده است.

جدول ۳- پارامتر فرکانسی $\Gamma = \omega R \sqrt{(1 - \theta^2)\rho/E}$ برای یک پوسته استوانه ای بدون رینگ و فشار خارجی

شرایط مرزی	n	m	L/R	h/R	چانگ (10)	تحقیق حاضر
گیردار-آزاد	۲	۱	۱.۱۱۴	0.0۵	0.۳۰۷۶	0.۳۱۲۹
گیردار-آزاد	۲	۲	2۸۸.	0.05	0.۳۰۸۱	0.3۱۳۳
گیردار-آزاد	2	۳	۵.۰۷	0.0۵	0.۳۰۷۹	0.۳۰۹۷

در دومین مقایسه، فرکانس طبیعی (Hz) برای پوسته استوانه ای بدون تقویت کننده و فشار خارجی با استفاده از نظریه کلاسیک تحت شرایط تکیه گاهی ساده حاصل شده از تحقیق حاضر و مرجع (۲۸) در جدول ۴ نشان داده شده است.

جدول ۴- فرکانس طبیعی (Hz) برای یک پوسته استوانه ای بدون تقویت کننده و فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی ساده ($L/R = 20, h/R = 0.002$)

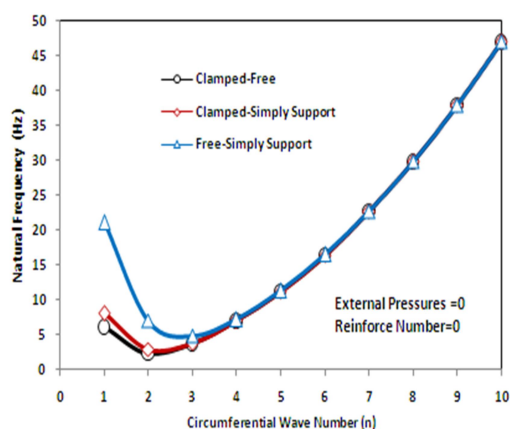
n	m	ارشد و همکاران (28)	تحقیق حاضر
1	1	13.645	13.497
2	1	4.625	4.367
3	1	4.331	4.277
4	1	7.366	7.598
5	1	11.775	11.821

تطابق بین نتایج ارائه شده در جداول ۳ و ۴ در تمامی مقایسه های صورت گرفته شده نشان از دقت و صحت روش ارائه شده دارد. با این حال تفاوت بسیار جزئی نتایج به علت استفاده از نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی در تحقیق حاضر در مقایسه با تئوری کلاسیک استفاده شده در مراجع می باشد. استفاده از سه رینگ و فشار خارجی برای یک پوسته استوانه ای ساندویچی با شرایط مرزی نامتقارن تا کنون در هیچ مرجعی یافت نشده است.

۸- بحث بر روی نتایج

۸-۱- پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده و فشار

در این بخش، پاسخ فرکانسی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده و فشار خارجی برای اعداد موج محیطی مختلف و شرایط مرزی نامتقارن مختلف مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. شکل ۲ تاثیر فرکانس های طبیعی روی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده و فشار خارجی را نشان می دهد. با توجه به شکل، مشخص می شود که برای هر سه شرایط مرزی نامتقارن مختلف فرکانس های طبیعی در ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابند. همچنین، نتایج نشان می دهد که فرکانس های طبیعی با شرایط مرزی آزاد-ساده بالاتر از دو نوع دیگر است و به همین ترتیب شرایط مرزی گیردار-آزاد از دو نوع دیگر پایین تر می باشد. در حالت پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده و فشار خارجی کمترین فرکانس های طبیعی در اعداد موج محیطی ۲ و ۳ اتفاق می افتد.



شکل ۲- تغییرات پاسخ فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای ساندویچی بدون فشار خارجی و تقویت کننده با سه شرط مرزی نامتقارن مختلف ($h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1$)

جدول ۷- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده با و بدون فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی آزاد-ساده
 $(m=1, h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$

n	بدون فشار P=0	با فشار P=400 Kpa	با فشار P= 600 Kp
1	21.075	21.075	21.075
2	7.007	38.311	46.658
3	4.883	65.528	80.179
4	7.206	91.816	112.335
5	11.306	117.583	143.786
6	16.502	143.135	174.914
7	22.683	168.641	205.917
8	29.827	194.203	236.911
9	37.927	219.892	267.972
10	46.982	245.761	299.155

۸-۳- پوسته استوانه ای ساندویچی با فشار و یک تقویت کننده

شکل ۳ تغییرات فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با یک تقویت کننده و فشار خارجی را نشان می دهد. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که روند مشابهی برای همه موقعیت های تقویت کننده در طول پوسته وجود دارد. برای شکل ۳ موقعیت رینگ در حالت $b = 0.3L$ ارائه گردید. در این حالت تاثیر وجود تقویت کننده را می توان در شکل مشاهده کرد. وجود همزمان تقویت کننده و فشار سبب افزایش فرکانس های طبیعی پوسته استوانه ای ساندویچی می گردد. نتایج نشان می دهد که افزایش در فرکانس های طبیعی مهم است وقتی که عدد موج محیطی از ۱ به ۲ افزایش می یابد. برای عدد موج محیطی بزرگتر از ۲ فرکانس های طبیعی به تدریج افزایش می یابند. همچنین، نتایج بدست آمده نشان می دهد که پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با یک تقویت کننده و فشار خارجی برای شرایط مرزی نامتقارن مختلف متفاوت است.

۸-۴- پوسته استوانه ای ساندویچی با فشار و سه تقویت کننده

در این بخش، تاثیر تعداد تقویت کننده بر روی فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با فشار خارجی برای سه شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت. جداول ۸ تا ۱۰ پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت سه شرایط مرزی نامتقارن مختلف را نشان می دهند. تقویت کننده ها با فواصل مساوی در طول پوسته استوانه ای ساندویچی قرار می گیرند. تحلیل با فرض فشار خارجی ۶۰۰ کیلو پاسکال انجام شده است. نتایج نشان می دهد که تعداد تقویت کننده روی فرکانس های طبیعی تاثیر می گذارد و سبب افزایش فرکانس های طبیعی سازه می گردد. همچنین، نتایج بدست آمده نشان می دهد که پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با سه تقویت کننده و

۸-۲- پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده با فشار

در این قسمت، پاسخ فرکانسی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده با فشار خارجی برای اعداد موج محیطی مختلف و شرایط مرزی نامتقارن مختلف مورد تحلیل قرار می گیرد. جدول های ۵ تا ۷ پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده با فشار خارجی را نشان می دهند. تحلیل با فرض فشارهای خارجی برابر با ۴۰۰ و ۶۰۰ کیلو پاسکال انجام شده است. برای تمام سه شرایط مرزی نامتقارن زمانی که فشار خارجی صفر است، فرکانس طبیعی ابتدا کاهش می یابد و سپس افزایش می یابند. وقتی که پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده در معرض فشار خارجی قرار می گیرد، برای همه سه شرایط مرزی نامتقارن پاسخ فرکانس های طبیعی افزایش می یابد. نتایج نشان می دهد که فشارهای خارجی بر روی فرکانس طبیعی پوسته استوانه ساندویچی تاثیر می گذارد و موجب افزایش فرکانس طبیعی سازه می شود. وقتی مقدار فشارهای خارجی بزرگتر است، فرکانس های طبیعی نیز بالاتر است. همچنین، نتایج بدست آمده نشان می دهد که پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده با فشار خارجی برای شرایط مرزی نامتقارن مختلف متفاوت است.

جدول ۵- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده با و بدون فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی گیردار-آزاد
 $(m=1, h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$

n	بدون فشار P=0	با فشار P=400 Kpa	با فشار P= 600 Kp
1	6.118	6.118	6.118
2	2.345	37.807	46.273
3	3.737	65.48	80.151
4	6.96	91.81	112.334
5	11.226	117.582	143.788
6	16.461	143.134	174.915
7	22.654	168.639	205.917
8	29.801	194.201	236.91
9	37.903	219.889	267.97
10	46.959	245.758	299.153

جدول ۶- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی بدون تقویت کننده با و بدون فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی گیردار-ساده
 $(m=1, h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$

n	بدون فشار P=0	با فشار P=400 Kpa	با فشار P= 600 Kp
1	20.198	20.198	20.198
2	6.849	38.321	46.682
3	4.836	65.539	80.195
4	7.187	91.821	112.342
5	11.292	117.586	143.79
6	16.489	143.136	174.916
7	22.67	168.64	205.918
8	29.814	194.202	236.911
9	37.914	219.89	267.971
10	46.969	245.759	299.154

فشار خارجی برای شرایط مرزی نامتقارن مختلف متفاوت است.

جدول ۸- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی گیردار-آزاد

$$(h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

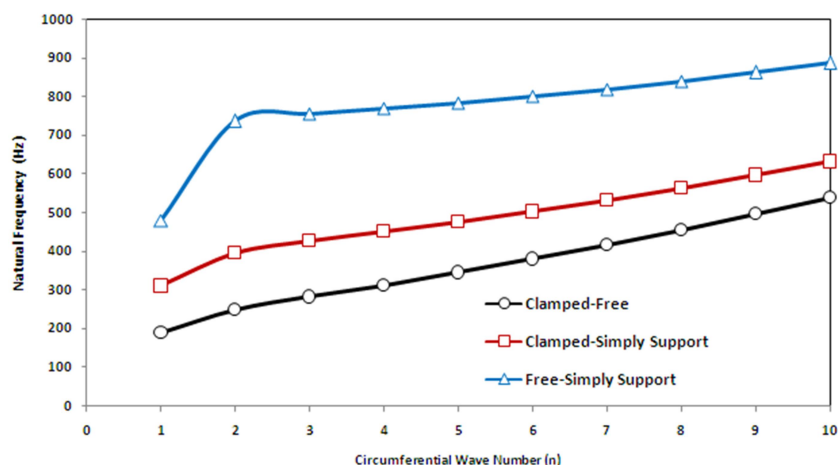
سه تقویت کننده	m	n
$b_1/L=1/4, b_2/L=2/4, b_3/L=3/4, P=600\text{KPa}$		
434.747	1	1
538.861	1	2
563.553	1	3
576.216	1	4
586.453	1	5

جدول ۹- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی

گیردار-ساده

$$(h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

سه تقویت کننده	m	n
$b_1/L=1/4, b_2/L=2/4, b_3/L=3/4, P=600\text{KPa}$		
504.329	1	1
822.109	1	2
825.782	1	3
829.814	1	4
830.112	1	5



شکل ۳- تغییرات پاسخ فرکانس پوسته استوانه ای ساندویچی تقویت شده با یک رینگ تحت فشار خارجی با سه شرایط مرزی مختلف ($P = 1400 \text{ KPa}, h/R = 0.002, L/R = 20, b = 0.3L, R = 1$)

بررسی قرار گرفت. پیکربندی پوسته استوانه ای ساندویچی تقویتی تشکیل شده است از سه لایه که لایه های داخلی و خارجی از فولاد ضد زنگ و لایه میانی متشکل از ماده آلومینیوم می باشد. معادلات پوسته استوانه ای بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی بدست آمده است. سپس، معادلات حاکم حرکت به روش انرژی و بکار بردن تکنیک ریتز استخراج شده اند. شرایط مرزی در لبه های دو انتهای پوسته استوانه ای ساندویچی به صورت گیردار-آزاد، گیردار-ساده و آزاد-ساده در نظر گرفته شده است. تاثیر فشارهای خارجی، موقعیت و تعداد رینگ های تقویتی و شرایط مرزی مختلف روی خصوصیات فرکانسهای طبیعی مورد بحث قرار گرفت.

تا کنون در هیچکدام از کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات پوسته ها، اثر همزمان پارامترهای سه رینگ تقویتی و فشارهای خارجی روی پوسته های سه لایه ساندویچی آن هم با در نظر گرفتن نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی بررسی نشده است. در این تحقیق، محل رینگ ها ثابت در نظر گرفته نشده و در نتایج ارائه شده اثر تغییرات این پارامتر روی فرکانس های طبیعی نیز با جزئیات تفسیر

جدول ۱۰- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی آزاد-ساده

$$(h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

سه تقویت کننده	m	n
$b_1/L=1/4, b_2/L=2/4, b_3/L=3/4, P=600\text{KPa}$		
580.035	1	1
970.591	1	2
993.023	1	3
1004.33	1	4
1014.40	1	5

۹- نتیجه گیری

در این مطالعه، تحلیل فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ساندویچی تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی مورد

- [9] Soedel W., A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, No. 3, pp. 309-317, 1980.
- [10] Chung H., Free vibration analysis of circular cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 74, No. 3, pp. 331-350, 1981.
- [11] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, 2nd edn. CRC Press, New York, 2004.
- [12] Soedel W., *Vibration of Shells and Plates*. 3rd edn, Marcel Dekker Inc, New York, 2004.
- [13] Liu L., Cao D., Sun S., Vibration analysis for rotating ring-stiffened cylindrical shells with arbitrary boundary conditions, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 135, No. 6, pp. 061010-12, 2013.
- [14] Ramamurti V., Pattabiraman J., Dynamic behaviour of a cylindrical shell with a cutout, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 52, No. 2, pp. 193-200, 1977.
- [15] Shen S., Xing J., Fan F., Dynamic behavior of single-layer latticed cylindrical shells subjected to seismic loading, *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol. 2, No. ۲, pp. 2693-279, 2003.
- [16] Saravanan C., Ganesan N., Ramamurti V., Vibration and damping analysis of multilayered fluid filled cylindrical shells with constrained viscoelastic damping using modal strain energy method, *Computers and Structures*, Vol. 75, No. 4, pp. 395-417, 2000.
- [17] Hua L., Influence of boundary conditions on the free Vibrations of rotating truncated circular multi-layered conical shells, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 31, No. 4, pp. 265-275, 2000.
- [18] Malekzadeh K., Khalili M. R., Davar A., Mahajan P., Transient dynamic response of clamped-free hybrid composite circular cylindrical shells, *Applied Composite Materials*, Vol. 17, No. 2, pp. 243-257, 2010.
- [19] Pan Z., Li X., Ma J., A study on free vibration of a ring-stiffened thin circular cylindrical shell with arbitrary boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 314, No. 2, pp. 330-342, 2008.
- [20] Wang R., Lin Z., Vibration analysis of ring-stiffened cross-ply laminated cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, No. 3, pp. 964-987, 2006.
- [21] Meelman J. A., Mikulasjr M. M., Stein M., Static and dynamic effects of eccentric stiffening of plates and cylindrical shells, *ALAA Journal*, Vol. 4, No. 5, pp. 887-89, 1966.
- [22] Shinlee Y., Wannkim Y., Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners, *Advances in Engineering Software*, Vol. 30, No. 9-11, pp. 469-655, 1999.
- [23] Ruotolo R., A comparison of some thin shell theories used for the dynamic analysis of stiffened cylinders, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 243, No. 5, pp. 847-860, 2001.
- [24] Li X., Chen Y., Free Vibration Analysis of Orthotropic Circular Cylindrical Shell Under External Hydrostatic Pressure, *Journal of Ship Research*, Vol. 46, No. 3, pp. 201-207, 2002.
- [25] Rahimi O., Khalili S. M. R., Malekzadeh K., Free vibration response of composite sandwich cylindrical shell with flexible core, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 5, pp. 1269-1281, 2010.
- [26] Loy C. T., Lam K. Y., Shu C., Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature. *Shock and Vibration*, Vol. 4, No. 3, pp. 193-198, 1997.
- [27] Moon F. C., Shaw S. W., Chaotic vibrations of a beam with non-linear boundary conditions, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 18, No. 6, pp. 465-477, 1983.
- [28] Arshad Sh., Naeem M. N., Sultana N., Shah A., Iqbal Z., Vibration analysis of bi-layered FGM cylindrical shells, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 3, pp. 319-343, 2011.

شده است. همچنین اثر شرایط مرزی مختلف روی ارتعاشات هم کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

نتایج نشان داد که رینگ های تقویتی و فشارهای خارجی روی پوسته استوانه‌ای ساندویچی اثر می گذارند و منجر به افزایش فرکانسهای طبیعی می گردد. همچنین، نتایج نشان داد که وقتی فشارهای خارجی افزایش می یابد فرکانس های طبیعی نیز بالاتر می روند. نتایج بدست آمده نشان داد که تعداد تقویت کننده ها تاثیر مستقیم بر فرکانس های طبیعی پوسته استوانه‌ای ساندویچی می گذارد و سبب افزایش فرکانس های طبیعی سازه می گردد و هر چه تعداد تقویت کننده در طول پوسته بیشتر شود فرکانس های طبیعی نیز افزایش می یابند. در پایان، نویسنده بر این باور است که نتایج این تحقیق می تواند در کاربردهای مهندسی مفید باشد.

برخی از نتایج این تحقیق به صورت زیر ارائه می گردد:

- ۱- در حالت پوسته استوانه‌ای ساندویچی بدون تقویت کننده و فشار برای هر سه شرایط مرزی نامتقارن مختلف فرکانس های طبیعی در ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابند.
- ۲- در حالت پوسته استوانه‌ای ساندویچی بدون تقویت کننده که در معرض فشار خارجی قرار می گیرد، برای همه سه شرایط مرزی نامتقارن پاسخ فرکانس های طبیعی افزایش می یابد.
- ۳- در حالت پوسته استوانه‌ای ساندویچی بدون تقویت کننده و با فشارهای خارجی وقتی مقدار فشارهای خارجی بزرگتر است، فرکانس های طبیعی نیز بالاتر است.
- ۴- وجود همزمان تقویت کننده و فشار سبب افزایش فرکانس های طبیعی پوسته استوانه‌ای ساندویچی می گردد. این افزایش در فرکانس های طبیعی مهم است.
- ۵- تعداد تقویت کننده در پوسته استوانه‌ای ساندویچی روی فرکانس های طبیعی تاثیر می گذارد و سبب افزایش فرکانس های طبیعی سازه می گردد.

۱۰- مراجع

- [1] Qatu M. S., Recent research advances in the dynamic behavior of shells, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 55, No. 5, pp. 415-434, 2002.
- [2] Al-Najafi A. M. J., Warburton G. B., Free vibration of ring-stiffened cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 13, No. 1, pp. 9-25, 1970.
- [3] Sharma C. B., Johns D. J., Vibration characteristics of a clamped-free and clamped-ring-stiffened circular cylindrical shell, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 14, No. 4, pp. 459-474, 1971.
- [4] Schneidera W., Zuhltenb W., Load-bearing behaviour and structural analysis of slender ring-stiffened cylindrical shells under quasi-static wind load, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 60, No. 1, pp. 125-146, 2004.
- [5] Yan J., Li T. Y., Liu T. G., Liu J. X., Characteristics of the vibrational power flow propagation in a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell, *Applied Acoustic*, Vol. 67, No. 6, pp. 550-569, 2006.
- [6] Wang R. T., Lin Z. X., Vibration analysis of ring-stiffened cross-ply laminated cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, No. 4, pp. 964-987, 2006.
- [7] Arnold R. N., Warburton G. B., The rexrural vibrations of thin cylinders, *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 167, No. 1, pp. 62-80, 1953.
- [8] Blevins R. D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.