

مقایسه روش‌های عددی تجزیه آدومیان و کرانک-نیکلسون بهبود یافته برای معادله برگرز دوبعدی

احمد رضا حقیقی*
 جعفر احمدی شالی
 حسین امامعلی پور
 نسیم اصغری

دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران
 استادیار، گروه آمار، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
 استادیار، گروه ریاضی محض، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
 استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد تهران مرکزی، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله روش‌های عددی تجزیه آدومیان و کرانک-نیکلسون بهبود یافته برای حل معادله برگرز غیرخطی دوبعدی مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین این روش‌های عددی با روش تحلیلی مقایسه شده است. روش MLCN بر خلاف کرانک-نیکلسون متداول یک روش صریح بوده و دارای پایداری نامشروط می‌باشد. این روش با تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی منجر به تشکیل چند ماتریس بلوکی ساده می‌گردد که محاسبات را ساده‌تر می‌نماید. روش تجزیه آدومیان شامل تابع نامعلوم $U(x)$ است که هر معادله توسط یک سری از تابع‌های نامحدود تعریف شده و حل می‌شود. در این مطالعه پارامترهای سرعت u در راستای محور X ها و v در راستای محور Y ها در زمان‌های مختلف و اعداد رینولدز متفاوت با طول گام زمانی ثابت مورد بررسی قرار داده شده است. با ارایه دو مثال از توابع مثلثاتی و نمایی با شرایط اولیه متفاوت، نتایج عددی حاصل از این روش‌ها با روش تحلیلی مقایسه شده و نشان داده شده است که روش تجزیه آدومیان با دقت بهتری نسبت به روش کرانک-نیکلسون عمل می‌کند و روش تجزیه آدومیان به روش تحلیلی نزدیک‌تر است. واژه‌های کلیدی: معادله برگرز غیر خطی دوبعدی، روش کرانک-نیکلسون بهبود یافته، روش تجزیه آدومیان.

A Comparison Between the Adomian Decomposition and the Modified Crank-Nicholson Methods for the two-dimensional Burgers' Equation

A. R. Haghighi
 J. Ahmadishali
 H. E. Alipour
 N. Asghary

Department of Mathematics, Technical and Vocational University, Tehran, Iran
 Department of Statistics University of Tabriz, Tabriz, Iran
 Department of Mathematics, University of Tabriz, Tabriz, Iran
 Department of Mathematics, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, numerical methods of the Adomian decomposition and the Modified Crank-Nicholson are used for solving the two-dimensional Burgers' equation, have been compared. These numerical methods have also been compared with the analytical solution. In contrast to the conventional Crank-Nicolson method, the MLCN method is an explicit and unconditionally stable method. This method leads to several block matrices through the transformation of the partial differential equation (PDE) into ordinary differential equations (ODE), which simplifies the calculations. The Adomian decomposition method includes the unknown function $U(x)$, in which each equation is defined and solved by an infinite series of unbounded functions. In this study velocity parameters u in the direction of the X axis, and v in the direction of the Y axis, are examined at different times with different Reynolds numbers over a fixed time step. Also the accuracy of the Adomian and the Crank-Nicolson methods at different Reynolds numbers have been compared utilizing two examples of trigonometric and exponential functions with different initial conditions, which shows that the Adomian decomposition method is closer to the analytical method.

Keywords: Two-dimensional Burgers equation, Modified Local Crank-Nicholson method, Adomian decomposition method.

مکانیک سیالات است. این مقاله با به کار بردن مدل‌های ریاضی، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی که در معادله برگرز به کار برده شده را حل می‌کند. [۱]

این معادلات ویژگی‌های غیرخطی معادلات حاکم در بسیاری از مسائل انتقالی عملی (مانند انتقال تلاطم) دارد و کاربرد گسترده‌ای نیز در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی دارند (از قبیل: نظریه موج ضربه‌ای، فرآیندهای موج در محیط ترموالاستیک، انتقال و پخش آلاینده‌ها در

۱- مقدمه

معادله برگرز شکل ساده شده‌ای از معادلات ناویر-استوکس می‌باشد که ویژگی‌های غیرخطی معادلات ناویر-استوکس را به‌خوبی نشان می‌دهد، که در سال ۱۹۱۵ توسط باتمن مطرح گردید، در این معادله مؤلفه‌های فشار و پیوستگی موجود در معادلات ناویر-استوکس حذف می‌شود. معادله برگرز یک معادله دیفرانسیلی جزئی بنیادی از

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: ah.haghighi@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۰۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۳/۱۷

رودخانه و انتقال رسوب [۲]. همچنین این معادلات در مدل رسوب سازی، روش شبکه بولتزمن، حرکت دورانی غلظت مقادیر مقیاس شده دو نوع ذره در تعلیق‌های مایع و کلوئیدهای تحت گرانش به کار می‌رود [۳].

معادله برگرز به ابعاد بالاتر نیز بسط داده شده است و انواع روش‌های عددی برای حل این معادلات در ابعاد (۳+۱) بعدی به کار برده شده است [۴]. در مرجع [۵]، معادله برگرز (n+1) بعدی به عنوان یک معادله ریچارد شناخته می‌شود و برای حل آن از روش تجزیه آدومیان و روش تفاضل متناهی به کار برده شده است. در آن از هیچ نوع خطی سازی یا تبدیلی استفاده نشده است و دارای همگرایی و دقت بالایی می‌باشد. این معادلات به عنوان یک مدل برای توصیف جریان آب در خاک شناخته شده است.

بعد از همدی این روش ها سرانجام ابدوالی برای حل کردن معادلات جابجایی گرما روش کرانک-نیکلسون (CN) [۶]، و روش کرانک-نیکلسون بهبود یافته (MLCN) [۷]، را معرفی کرده است. که در روش MLCN از هیچ تبدیلی استفاده نشده است. در این روش معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. روش MLCN ماتریس ضرایب را به چند ماتریس بلوکی ساده تبدیل می‌کند، که یک روش صریح با پایداری نامشروط می‌باشد. برای مشاهده کاربردهای روش کرانک - نیکلسون مراجع [۸-۱۱] پیشنهاد می‌گردد.

در سالهای اخیر، روش تجزیه آدومیان (ADM) برای حل معادله برگرز مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. بهترین راهکار ما، گسسته سازی ADM است که هنوز برای حل معادله برگرز از آن استفاده نشده است. روش گسسته سازی ADM اولین بار برای به دست آوردن راه حل‌های عددی، برای گسسته سازی معادله غیرخطی شرودینگر مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]، در چند سال اخیر، انواع روش‌های عددی برای حل معادله برگرز توسعه داده شده است. از قبیل روش المان محدود [۱۳]، روش صریح، روش غیرصریح [۱۴] می‌باشد. روش تجزیه آدومیان در اوایل سال ۱۹۸۰ توسط جورج آدومیان ارائه شد [۱۵].

فرآیند مقاله بصورت زیر است: در بخش ۲ معادله برگرز دوبعدی را تعریف می‌کنیم. حل این معادله به روش تجزیه آدومیان در بخش ۳ آورده شده است. همچنین در بخش ۴ روش کرانک-نیکلسون بهبود یافته و حل تحلیلی برای حل معادله برگرز دوبعدی به کار برده شده است. در بخش ۵ مثال عددی برای این دو روش و مقایسه آنها با حل تحلیلی آورده شده است. و نتیجه گیری در انتها ارائه می‌گردد.

۲- فرمول بندی ریاضی

معادلات بی بعد حاکم بر جریان لایه ای، تراکم ناپذیر و دوبعدی سیال نیوتنی بصورت زیر قابل بیان است: [۷-۹]

$$u_x + v_y = 0, \quad (1)$$

$$u_t + uu_x + vv_y = -p_x + \frac{1}{Re}(u_{xx} + v_{yy}), \quad (2)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -p_y + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}), \quad (3)$$

در این معادلات، u و v به ترتیب مولفه های سرعت در جهت x و y ، فشار می باشد. همچنین $Re = \frac{U_h}{\nu}$ عدد رینولدز می باشد. با بکار بردن تبدیل OST [۱۶]، معادلات (۲) و (۳) به فرم معادلات بی بعد برگرز زیر تبدیل می شوند:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right), \quad (5)$$

در ادامه از علامت ' در معادلات جهت سادگی صرف نظر شده است. فرم کلی معادلات برگرز دوبعدی به صورت (۴) و (۵) است [۷]. با شرایط اولیه:

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (6)$$

$$v(x, y, 0) = g(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

و شرایط مرزی:

$$u(x, y, t) = f_1(x, y, t), \quad x, y \in \partial D, t > 0, \quad (7)$$

$$v(x, y, t) = g_1(x, y, t), \quad x, y \in \partial D, t > 0,$$

که در آن $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ و ∂D مرز است. برای حل سیستم (۴) و (۵) با شرایط اولیه، در مرجع [۱۷] طرح تفاضل محدود کاملاً ضمنی را پیشنهاد شده است.

۳- روش تجزیه آدومیان گسسته

در این بخش ADM گسسته را که در سیستم معادلات برگرز دوبعدی به کار برده شده را توضیح داده می‌شود، که از بخش تفاضلات متناهی صریح کامل استفاده شده است [۱۸]، برای سیستم معادلات برگرز از یک عملگر به فرم زیر می‌توان استفاده کرد:

$$D_t^+ u_{i,j}^n + (D_{h_x} u_{i,j}^{n+1}) u_{i,j}^{n+1} + (D_{h_y} u_{i,j}^{n+1}) v_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{R} (D_{h_x}^2 u_{i,j}^{n+1} + D_{h_y}^2 u_{i,j}^{n+1}), \quad (8)$$

$$D_t^+ v_{i,j}^n + (D_{h_x} v_{i,j}^{n+1}) u_{i,j}^{n+1} + (D_{h_y} v_{i,j}^{n+1}) v_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{R} (D_{h_x}^2 v_{i,j}^{n+1} + D_{h_y}^2 v_{i,j}^{n+1}),$$

با شرایط اولیه:

$$u_{i,j}^0 = f_{i,j}, \quad v_{i,j}^0 = g_{i,j}, \quad i, j \in Z. \quad (9)$$

تفاضل بازگشتی استاندارد به فرم زیر است:

$$D_t^+ u_{i,j}^n = \frac{(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n)}{\tau}, \quad D_t^+ v_{i,j}^n = \frac{(v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n)}{\tau}, \quad (10)$$

و $D_{h_x} u_{i,j}^{n+1}, D_{h_y} u_{i,j}^{n+1}, D_{h_x} v_{i,j}^{n+1}, D_{h_y} v_{i,j}^{n+1}$ تفاضل مرکزی داده شده به وسیله:

$$D_{h_x} u_{i,j}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x}, \quad D_{h_y} u_{i,j}^{n+1} = \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y}, \quad (11)$$

$$D_{h_x} v_{i,j}^{n+1} = \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x}, \quad D_{h_y} v_{i,j}^{n+1} = \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y},$$

تفاضلات مرتبه دوم استاندارد

به صورت زیر داده شده است:

$$D_{h_x}^2 u_{i,j}^{n+1} = \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}))}{h_x^2},$$

$$D_{h_y}^2 u_{i,j}^{n+1} = \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}))}{h_y^2},$$

$$-4v_{M-1,1} + 2v_{M-1,2} - \frac{v_{M-1,1}h}{2h^2}(v_{M,1} - v_{M-3,1}) - \frac{v_{M-1,1}h}{2h^2}(v_{M-1,2} - v_{M-1,0}), \quad (14)$$

توجه داشته باشید که $v_{0,0}$ و $v_{M,M}$ مقادیر مرزی هستند که مقدارشان صفر می‌باشد، بنابراین معادله نیمه گسسته زیر را داریم [V]:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2h^2}AV(t), \quad (15)$$

فرض می‌شود که $h = 1/M$ فاصله شبکه باشد، $x_i = ih$ و $y_i = jh$ برای هر $i, j = 1, 2, \dots, M-1$ باشد. بردار اولیه $V(t)$ در معادله (۳۳) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$V(t) = [v(x_1, y_1, t), v(x_1, y_2, t), \dots, v(x_1, y_{N-1}, t), v(x_2, y_1, t), v(x_2, y_2, t), \dots, v(x_2, y_{N-1}, t), \dots, v(x_{N-1}, y_1, t), v(x_{N-1}, y_2, t), \dots, v(x_{N-1}, y_{N-1}, t)] \quad (16)$$

A یک ماتریس سه قطری $(M-1) \times (M-1)$ است.

۲-۴- حل تحلیلی

معادله غیر خطی زیر داده شده است [۱۹]:

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t), \quad (17)$$

که در آن L یک عملگر خطی و N یک عملگر غیرخطی است، و $g(t)$ یک تابع تحلیلی معلوم است با توجه به روش تکرار تغییرات، می‌توان رابطه بازگشتی زیر را داشت:

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) (Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)) d\xi, \quad (18)$$

که در آن λ ضریب عمومی لاگرانژ است که می‌تواند از طریق نظریه تغییرات مشخص شود. $u_0(t)$ یک تقریب اولیه که ممکن است نامعلوم باشد. و $\tilde{u}_0$ به عنوان تغییر مرزی در نظر گرفته شده و $\tilde{u}_n = 0$. بنابراین، در تکرار اول ضریب لاگرانژ λ مشخص می‌شود که از طریق انتگرالگیری جزء به جزء می‌آید. تقریب های متوالی $u_{n+1}(t)$ برای حل $u(t)$ می‌باشد، به راحتی با استفاده از ضریب لاگرانژ به دست آمده و با استفاده از هر تابع u انتخابی $u(t)$ به دست می‌آید. در نتیجه، راه حل دقیق را می‌توان با استفاده از $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ به دست آورد:

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 1 + \frac{\delta}{\delta u_n} \left(\int_0^t \lambda(\xi) (Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)) d\xi \right), \quad (19)$$

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \left(\int_0^t \lambda(\xi) (Lu_n(\xi)) d\xi \right), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda(\xi) u'_n(\xi) d\xi &= \lambda(\xi) u_n(\xi) - \int_0^t \lambda'(\xi) u_n(\xi) d\xi, \\ \int_0^t \lambda(\xi) u''_n(\xi) d\xi &= \lambda(\xi) u''_n(\xi) - \lambda'(\xi) u'_n(\xi) \\ &\quad + \int_0^t \lambda''(\xi) u_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (21)$$

روابط (۲۱) با اعمال روش انتگرالگیری جزء به جزء به دست آمده است. برای مثال اگر $Lu_n(\xi) = u'_n(\xi)$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} D_{h_x}^2 v_{i,j}^{n+1} &= \frac{(v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1})}{h_x^2}, \\ D_{h_y}^2 v_{i,j}^{n+1} &= \frac{(v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1})}{h_y^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

۴- روش کرانک-نیکلسون بهبود یافته و روش

تحلیلی برای حل معادله برگرز دوبعدی

۴-۱- روش کرانک-نیکلسون بهبود یافته

روش کرانک-نیکلسون (CN) یک روش تفاضلات متناهی مرکزی و از دقت مرتبه دوم می‌باشد. لازم به ذکر است که روش کرانک-نیکلسون یک روش ضمنی می‌باشد، که برای به دست آوردن مقادیر u در گام‌های بعدی، باید یک سری دستگاه معادلات جبری حل شود، چون مقادیر دیفرانسیل جزئی غیر خطی می‌باشند، لذا گسسته سازی این مقادیر نیز باید غیر خطی باشد، که با استفاده از روش تقریبی جدید معرفی شده به روش صریح تبدیل شده است. بنابراین روش ارایه شده یک دستگاهی از معادلات تفاضلی جبری غیر خطی است که در هر گام زمانی باید با الگوریتم ماتریس سه قطری حل شود. برای معادلات برگرز و بسیاری از معادلات می‌توان نشان داد که روش کرانک-نیکلسون دارای پایداری نامشروط می‌باشد. در روش MLCN برای تقریب ماتریس ضرایب معادلات دیفرانسیل معمولی از لم فرمول ضربی تروتر استفاده شده است. روش MLCN ماتریس ضرایب را به چند ماتریس بلوکی ساده تبدیل می‌کند [۷]. که با استفاده از تبدیل هوپف-کول یا با استفاده از تبدیلات دیگر معادله برگرز غیر خطی به معادله خطی تبدیل می‌شود [۱۸]. مزیت این روش جدید این است که در این روش از هیچ تبدیلی استفاده نشده، همچنین می‌توان معکوس ماتریس‌ها را به راحتی به دست آورد. بنابراین این روش یک روش صریح با پایداری مشروط بوده و محاسبات به راحتی انجام می‌شود.

برای حل معادله (۴) و (۵) با استفاده از تفاضل مرکزی، باید معادله را گسسته سازی کرد، برای این منظور ابتدا این PDE را باید به ODE تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{v}{2h^2} (u(x-h, y, t) - 4u(x, y, t) + u(x+h, y, t) \\ &\quad u(x-h, y, t) - 4u(x, y, t) + u(x+h, y, t)) \\ &\quad - u \left(\frac{2u(x+h, y) - 2u(x-h, y)}{4h} \right) \\ &\quad - v \left(\frac{2u(x, y+h) - 2u(x, y-h)}{4h} \right) + O(h^2) \end{aligned} \quad (13)$$

مقدار دقیق حل شده برای $(M-1)^2 \times (M-1)^2$ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی: [۷]

$$\begin{aligned} \frac{dv_{11}}{dt} &= \frac{v}{2h^2} (2v_{01} - 4v_{11} + 2v_{21} + 2v_{10} - 4v_{11} + 2v_{12}) \\ &\quad - \frac{v_{11}h}{2h^2} (v_{21} - v_{01}) - \frac{v_{11}h}{2h^2} (v_{12} - v_{10}), \\ \frac{dv_{21}}{dt} &= \frac{v}{2h^2} (2v_{11} - 4v_{21} + 2v_{31} + 2v_{20} - 4v_{21} + 2v_{22}) \\ &\quad - \frac{v_{21}h}{2h^2} (v_{31} - v_{11}) - \frac{v_{21}h}{2h^2} (v_{22} - v_{20}), \\ \frac{dv_{M-1,1}}{dt} &= \frac{v}{2h^2} (2v_{M-2,1} - 4v_{M-1,1} + 2v_{M-3,1} + 2v_{M-1,0}) \end{aligned}$$

$$-(1.25 \times 10^{-4}n) \frac{(-4e^{-0.5i+0.5j} - 2e^{-i+0.5+j} + 4e^{-i+j} - 2e^{-i-0.5+j})}{(1+e^{-0.5i+0.5+0.5j})(1+e^{-0.5i-0.5+0.5j})(1+e^{-i+j})},$$

در نهایت جواب کلی $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n$ را با استفاده از ۴ جمله تقریبی آدومیان که به صورت زیر داده شده است:

$$u_{i,j}^n \approx u_{i,j,0}^n + u_{i,j,1}^n + u_{i,j,2}^n + u_{i,j,3}^n, \\ v_{i,j}^n \approx v_{i,j,0}^n + v_{i,j,1}^n + v_{i,j,2}^n + v_{i,j,3}^n,$$

شکل ۱ از $u(x,y,t)$ با روش ADM برای $R = 10$ و $\tau = 0.0005$ با زمان $t = 0.05$ را به ترتیب نشان می‌دهد، و برای گام‌های زمانی مختلف و اعداد رینولدز دیگر در جدول‌های ۱ تا ۴ مقدارشان به دست آمده است. روش آدومیان یک روش عددی است که پایدار می‌باشد و دقت آن بستگی به عدد رینولدز و گام زمانی دارد و انتخاب نوع مش در جواب مساله هیچ تاثیری ندارد، در معادله برگز هدف به دست آوردن سرعت u و v است با افزایش عدد رینولدز ضخامت لایه مرزی کوچک‌تر شده که به این معنی است تغییرات سرعت در این لایه شدیدتر است. با توجه به جدول‌ها می‌بینیم که هر چه عدد رینولدز بالاتر باشد دقت روش آدومیان بالاتر می‌رود و اگر طول گام زمانی و همچنین طول گام زمانی کوچک‌تر در نظر بگیریم باعث می‌شود که تعداد تکرار عملیات ما افزایش یابد و در هر تکرار دقت بالاتر می‌رود و جواب به جواب تحلیلی نزدیک‌تر می‌شود. از طرفی برای روش MLCN که دقت این روش به اندازه شبکه Δx بستگی دارد، هر چه عدد رینولدز بالاتر می‌رود، بایستی مقدار Δx را کاهش داد تا دقت لازم به دست آید. زیرا با افزایش عدد رینولدز ضخامت لایه مرزی کوچک‌تر شده که به این معنی است تغییرات سرعت در این لایه شدیدتر می‌شود، برای این مثال Δx بهینه برابر $\frac{1}{80}$ به ترتیب برای روش‌های MLCN و ADM به دست آمده است. در جدول‌های ۱ و ۳ مقایسه روش‌های ADM و MLCN و تحلیلی برای سرعت u در زمان‌های $t = 0.05$ و $t = 0.5$ و عدد رینولدز $R = 1$ با طول گام زمانی ثابت $\tau = 0.0005$ که با مقایسه مقدارهای به دست آمده دیده می‌شود که روش مورد نظر را برای ما به دست نمی‌آورند ولی اگر t کوچک‌تر باشد دیده می‌شود که روش تجزیه آدومیان جوابی نزدیک‌تر به جواب تحلیلی دارد، همانطور که گفته شد هر چه عدد رینولدز بالاتر باشد دقت روش آدومیان به نسبت روش کرانک-نیکلسون بهبود یافته بهتر است. جدول‌های ۲ و ۴ تغییرات سرعت u در زمان‌های $t = 0.05$ و $t = 0.5$ و عدد رینولدز $R = 10$ برای روش‌های ADM و MLCN و تحلیلی آورده شده است مشاهده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز دقت روش‌ها بالاتر می‌رود، ولی روش تجزیه آدومیان جواب‌های نزدیک‌تری نسبت به روش تحلیلی دارد، پس نتیجه گرفته می‌شود که هر چه طول گام زمانی کوچک‌تر باشد و عدد رینولدز را بالاتر در نظر بگیریم دقت روش‌ها بالاتر رفته و روش آدومیان بهتر از روش کرانک-نیکلسون عمل می‌کند و بالعکس مشاهده می‌شود که هر چه عدد رینولدز کوچک‌تر باشد جواب روش کرانک-نیکلسون به جواب تحلیلی نزدیک‌تر است.

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \left(\int_0^t \lambda(\xi) (Lu_n(\xi)) d\xi \right), \\ \delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta (\lambda(\xi) u_n(\xi)) - \int_0^t \lambda'(\xi) \delta u_n(\xi) d\xi, \quad (22)$$

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n (1 + \lambda|_{\xi=t}) - \int_0^t \lambda' \delta u_n d\xi, \\ \delta u_{n+1} = 0 \Rightarrow 1 + \lambda|_{\xi=t} = 0, \lambda'|_{\xi=t} = 0 \Rightarrow \lambda = -1,$$

معادله (۴) و (۵) با شرایط اولیه و مرزی داده شده در نظر گرفته می‌شود، برای حل معادله برگز با شرایط اولیه با روش بازگشتی تغییرات VIM، و با جایگذاری در (۱۸) معادله اصلی به فرم زیر نوشته می‌شود [۱۹]:

$$u_{n+1}(x,y,t) = u_n(x,y,t) + \int_0^t \lambda_1(\tau) \left[\frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x,y,\tau) + \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial \tau}(x,y,\tau) + \tilde{v}_n \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial \tau}(x,y,\tau) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial y^2}(x,y,t) \right) \right] d\tau, \quad (23)$$

$$v_{n+1}(x,y,t) = v_n(x,y,t) + \int_0^t \lambda_2(\tau) \left[\frac{\partial v_n}{\partial \tau}(x,y,\tau) + \tilde{u}_n \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial \tau}(x,y,\tau) + \tilde{v}_n \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial \tau}(x,y,\tau) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial y^2}(x,y,t) \right) \right] d\tau, \quad (24)$$

پس از تحلیل ارائه شده در معادلات (۲۳)-(۲۴) و با پیروی از معادله (۲۲) می‌توان ضرایب را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lambda_1'(\tau) = \lambda_2'(\tau) = 0, 1 + \lambda_1(\tau)|_{\tau=t} = 1 + \lambda_2(\tau)|_{\tau=t} = 0, \quad (25)$$

با استفاده از فرمول ضرایب لاگرانژ بیان شده در معادله (۲۲) می‌توان λ_1, λ_2 را تعیین کرد که $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

۵- نتایج و مباحث عددی

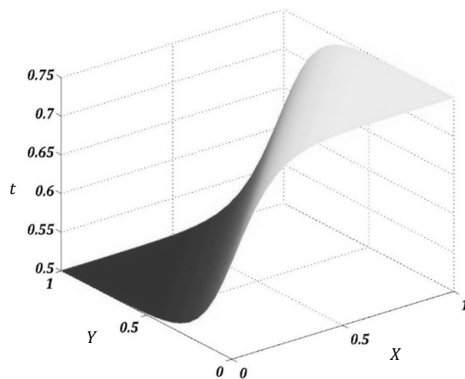
مثال ۱: در این مثال حل عددی معادله برگز دوبعدی با روش‌های ADM و MLCN و مقایسه نتیجه آنرا با حل تحلیلی آورده شده است [۱۸]، که راه حل تحلیلی به دست آمده با استفاده از تبدیل هوپف-کول در مرجع [۱۹] داده شده است:

$$u(x,y,t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + e^{(R(-t-4x+4y))/32})}, \\ v(x,y,t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + e^{(R(-t-4x+4y))/32})},$$

معادله فوق در $t = 0$ شرط اولیه مشخصی دارد. شرایط مرزی نیز با معادله بالا و با تغییر زمان t مشخص شده است. در این مثال، با اعداد رینولدز مختلف و گام زمانی به طول $\tau = 0.0005$ و مش شبکه‌ای یکنواخت $h_x = h_y = 0.05$ برای تمام مسائل استفاده می‌شود، اما زمان t متفاوت است. می‌توان معادله برگز را به صورت زیر حل کرد.

$$u_{i,j,0}^n = f_{i,j} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + e^{(-x+y)/8})}, \\ v_{i,j,0}^n = g_{i,j} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + e^{(-x+y)/8})}, \\ u_{i,j,1}^n = \frac{1.25 \times 10^{-4} n (e^{-0.5i+0.5+0.5j} + 3e^{-0.5i-0.5+0.5j})}{(1 + e^{-0.5i+0.5+0.5j})(1 + e^{-0.5i-0.5+0.5j})(1 + e^{-i+j})} + (1.25 \times 10^{-4} n) \frac{(-4e^{-0.5i+0.5j} - 2e^{-i+0.5+j} + 4e^{-i+j} - 2e^{-i-0.5+j})}{(1 + e^{-0.5i+0.5+0.5j})(1 + e^{-0.5i-0.5+0.5j})(1 + e^{-i+j})}, \\ v_{i,j,1}^n = \frac{-1.25 \times 10^{-4} n (e^{-0.5i+0.5+0.5j} + 3e^{-0.5i-0.5+0.5j})}{(1 + e^{-0.5i+0.5+0.5j})(1 + e^{-0.5i-0.5+0.5j})(1 + e^{-i+j})}$$

در این مثال دیده شده که هر چه عدد رینولدز بیشتر باشد جواب آدومیان به جواب تحلیلی نزدیکتر است و هر چه عدد رینولدز کوچکتر باشد جواب MLCN به جواب تحلیلی نزدیکتر است، و اگر t هر چه کوچکتر باشد جواب آدومیان دقیقتر است، به طوری که در اعداد رینولدز بالاتر و گام زمانی بسیار کوچک روش آدومیان بسیار دقیقتر از MLCN عمل می‌کند. همچنین با مشاهده جدول‌ها این نتیجه حاصل می‌شود که هر چه عدد رینولدز بالاتر می‌رود میزان انحراف به کمینه بیشتر می‌شود.



شکل ۱- حل عددی $u(x,y,t)$ با استفاده از روش ADM برای $R = 10$ و $\tau = 0.0005$ در زمان $t = 0.05$

مثال ۲: در این مثال معادله برگرز را با دو روش عددی ADM و MLCN حل و جواب آن با حل تحلیلی مقایسه شده است.

$$u(x, y, t) = -2\varepsilon \frac{2\pi e^{-5\pi^2 \tau t} \cos(2\pi x) \sin(\pi y)}{2 + e^{-5\pi^2 \tau t} \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}$$

$$v(x, y, t) = -2\varepsilon \frac{\pi e^{-5\pi^2 \tau t} \sin(2\pi x) \cos(\pi y)}{2 + e^{-5\pi^2 \tau t} \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}$$

با شرایط اولیه:

$$u(x, y, 0) = \frac{-4\varepsilon \pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}, \quad (x, y) \in D$$

$$v(x, y, 0) = \frac{-2\varepsilon \pi \sin(2\pi x) \cos(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}, \quad (x, y) \in D$$

جدول‌های ۵ تا ۶ مقدار عددی $v(x,y,t)$ در گامهای زمانی $t = 0.01, 1$ برای $\varepsilon = 0.01$ و $\varepsilon = 1$ با طول گام زمانی ثابت $\tau = 0.0005$ را نشان می‌دهد، و شکل ۲ تقریبی از $v(x,y,t)$ با استفاده از روش ADM در $\varepsilon = 0.01$ و $t = 0.01$ را نشان می‌دهد. جدول‌های ۵ و ۶ تغییرات سرعت v برای اعداد رینولدز ۱ و ۱۰ در گام زمانی $t = 0.01$ می‌باشد. که با مشاهده مقدارهای به دست آمده این نتیجه حاصل می‌شود که برای اعداد رینولدز بالا روش‌های آدومیان و کرانک – نیکلسون دقت بالاتری را دارند. مقایسه نتایج به دست آمده دیده می‌شود که روش تجزیه آدومیان در عددهای رینولدز مختلف نسبتاً جواب مقبولی را نتیجه می‌دهد، ولی روش کرانک-نیکلسون بهبود یافته در عدد رینولدز بالا $\varepsilon = 0.01$ جوابش به جواب تحلیلی نزدیکتر است.

جدول ۱- نتایج عددی و جواب تحلیلی برای $u(x,y,t)$ در $R = 1$ و $\tau = 0.0005$ در زمان $t = 0.05$

نقاط	روش ADM	روش MLCN	تحلیلی
(۰/۱ و ۰/۱)	۰/۵۷۳۰	۰/۵۷۴۲	۰/۶۲۴۹
(۰/۱ و ۰/۵)	۰/۶۰۰۹	۰/۶۰۱۳	۰/۶۲۸۰
(۰/۲ و ۰/۷)	۰/۵۰۷۹	۰/۵۱۸۵	۰/۶۲۸۸
(۰/۴ و ۰/۷)	۰/۵۳۲۴	۰/۵۵۶۷	۰/۶۲۷۲
(۰/۶ و ۰/۱)	۰/۶۲۶۴	۰/۶۲۳۰	۰/۶۲۱۰
(۰/۷ و ۰/۴)	۰/۶۲۷۲	۰/۶۲۵۳	۰/۶۲۲۶
(۰/۹ و ۰/۹)	۰/۵۹۶۲	۰/۵۹۸۶	۰/۶۲۴۹

جدول ۲- نتایج عددی و جواب تحلیلی برای $u(x,y,t)$ در $R = 1$ و $\tau = 0.0005$ در زمان $t = 0.5$

نقاط	روش ADM	روش MLCN	تحلیلی
(۰/۱ و ۰/۱)	۰/۵۷۲۶	۰/۵۷۳۸	۰/۶۲۴۰
(۰/۱ و ۰/۵)	۰/۶۰۰۶	۰/۶۰۱۰	۰/۶۲۷۱
(۰/۲ و ۰/۷)	۰/۵۰۷۶	۰/۵۱۸۲	۰/۶۲۷۹
(۰/۴ و ۰/۷)	۰/۵۳۲۱	۰/۵۵۶۴	۰/۶۲۶۴
(۰/۶ و ۰/۱)	۰/۶۲۱۴	۰/۶۲۲۰	۰/۶۲۰۱
(۰/۷ و ۰/۴)	۰/۵۳۲۱	۰/۵۵۱۵	۰/۶۲۱۷
(۰/۹ و ۰/۹)	۰/۵۹۵۸	۰/۵۹۸۲	۰/۶۲۴۰

جدول ۳- نتایج عددی و جواب تحلیلی برای $u(x,y,t)$ در $R = 10$ و $\tau = 0.0005$ در زمان $t = 0.05$

نقاط	روش ADM	روش MLCN	تحلیلی
(۰/۱ و ۰/۱)	۰/۶۱۳۶	۰/۶۱۳۳	۰/۶۱۵۳
(۰/۱ و ۰/۵)	۰/۷۴۷۹	۰/۷۴۷۵	۰/۷۴۸۰
(۰/۲ و ۰/۷)	۰/۷۴۹۴	۰/۷۴۹۰	۰/۷۴۹۴
(۰/۴ و ۰/۷)	۰/۷۴۳۲	۰/۷۴۳۱	۰/۷۴۳۳
(۰/۶ و ۰/۱)	۰/۵۰۰۴	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۴
(۰/۷ و ۰/۴)	۰/۵۰۴۸	۰/۵۰۴۵	۰/۵۰۴۹
(۰/۹ و ۰/۹)	۰/۶۱۳۶	۰/۶۱۳۳	۰/۶۱۵۳

جدول ۴- نتایج عددی و جواب تحلیلی برای $u(x,y,t)$ در $R = 10$ و $\tau = 0.0005$ در زمان $t = 0.5$

نقاط	روش ADM	روش MLCN	تحلیلی
(۰/۱ و ۰/۱)	۰/۵۴۲۲	۰/۵۴۲۰	۰/۵۴۳۳
(۰/۱ و ۰/۵)	۰/۷۴۲۰	۰/۷۴۱۸	۰/۷۴۲۲
(۰/۲ و ۰/۷)	۰/۷۵۷۷	۰/۷۵۷۴	۰/۷۵۷۷
(۰/۴ و ۰/۷)	۰/۷۲۴۲	۰/۷۲۴۰	۰/۷۲۴۸
(۰/۶ و ۰/۱)	۰/۵۰۰۱	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۱
(۰/۷ و ۰/۴)	۰/۵۰۱۲	۰/۵۰۱۰	۰/۵۰۱۲
(۰/۹ و ۰/۹)	۰/۵۴۲۲	۰/۵۴۲۰	۰/۵۴۳۳

می‌شود نمی‌توان شبکه را ریزتر کرد، این یکی از معایب روش MLCN در حالت دوبعدی و ابعاد بالاتر است. به همین دلیل در این مقاله از روش تجزیه آدومیان استفاده شده است، با ارائه دو مثال با شرایط اولیه متفاوت، دقت روش‌های MLCN و ADM برای اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده شد با افزایش عدد رینولدز و کوچک‌تر دقت روش ADM در توابع نمایی بهتر از روش MLCN است. و در توابع مثلثاتی در هر عدد رینولدز و هر گام زمانی روش ADM بهتر از روش MLCN عمل می‌کند.

۷- مراجع

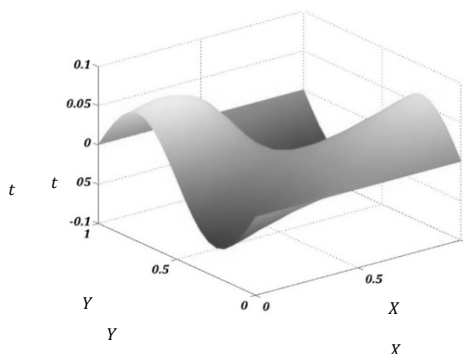
- [1] Bateman, H., Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, Vol. 43, No. 4, pp. 163-170, 1915.
- [2] Beck J. and Khanin, K., Burgers turbulence, *Physics Reports*, Vol. 447, No. 1-2, pp. 1-66, 2007.
- [3] Mittal R.C., and Arora G., Numerical solution of the coupled viscous Burgers' equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 16, No. 3, pp. 1304-1313, 2011.
- [4] Christou M.A., and Sophocleous C., Numerical similarity reductions of the (1+3)-dimensional Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, No. 18, pp. 7455-7461, 1991.
- [5] Srivastava V.K., and Awasthi M.K., (1+n)-Dimensional Burgers' equation and its analytical solution: A comparative study of HPM, ADM and DTM, *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 5, No. 2, pp. 533-541, 2014.
- [6] Abduwali A., corrector local C-N method for the two-dimensional heat equation, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 19, pp. 1-10, 1997.
- [7] Huang P., and Abduwali A., The Modified Local Crank-Nicolson method for one- and two-dimensional Burgers' equations, *Comput. Math Appl*, Vol. 59, No. 8, pp. 2452-2463, 2010.
- [8] A.R.Haghighi, A.R. and Shirin Pakrou, Comparison of the LBM with the modified local Crank-Nicolson method solution of transient one-dimensional non-linear Burgers' equation, *International Journal of Computing Science and Mathematics*, Vol. 7, No. 5, pp. 459-466, 2016.
- [9] Haghighi A.R., and Shojaeifard M., Numerical solution of the one dimensional non-linear Burgers equation using the Adomian decomposition method and the comparison between the modified Local Crank-Nicolson method and the VIM exact solution, *International Journal of Industrial Mathematics (IJIM)*, Vol. 7, No. 2, pp. 149-159, 2015.
- [10] Haghighi A.R., and Asl M.S., A comparison between alternating segment Crank-Nicolson and explicit-implicit schemes for the dispersive equation, *Int. J. Computing Science and Mathematics*, Vol. 5, No. 4, pp. 1-13, 2014.
- [11] Haghighi A.R., and Asl M.S., A finite difference alternating segment scheme of parallel computations for solving heat equation, *Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing*, Vol. 2014, pp. 1-10, 2014.
- [12] Bratsos A., Ehrhardt M., and Famelis I.T., A discrete Adomian decomposition method for discrete nonlinear Schrödinger equations, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 197, No. 1, pp. 190-205, 2008.
- [13] Caldwell J., Wanless P., and Cook A.E., A finite element approach to Burgers' equation, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 5, No. 3, pp. 189-193, 1981.
- [14] Tabatabaei A.H.A.E., Shakour E., and Dehghan M., Some implicit methods for the numerical solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 191, No. 2, pp. 560-570, 2007.

جدول ۵- نتایج عددی و جواب تحلیلی برای $v(x,y,t)$ در $\varepsilon = 0.01$ و $\tau = 0.0005$ و $t = 0.01$

نقاط	روش ADM	روش MLCN	تحلیلی
(0/1 و 0/1)	-0/0321	-0/0319	-0/0321
(0/1 و 0/9)	0/0321	0/0319	0/0319
(0/2 و 0/7)	0/0253	0/0251	0/0253
(0/4 و 0/7)	0/0175	0/0173	0/0175
(0/6 و 0/1)	0/0360	0/0380	0/0384
(0/7 و 0/4)	0/0335	0/0332	0/0334
(0/9 و 0/9)	-0/0385	-0/0382	-0/0384

جدول ۶- نتایج عددی و جواب تحلیلی برای $v(x,y,t)$ در $\varepsilon = 1$ و

نقاط	روش ADM	روش MLCN	تحلیلی
(0/1 و 0/1)	-0/3091	-0/3090	-0/3070
(0/1 و 0/9)	0/3111	0/3012	0/3077
(0/2 و 0/7)	0/2664	0/2645	0/2447
(0/4 و 0/7)	0/1694	0/1690	0/1685
(0/6 و 0/1)	0/3717	0/3657	0/3660
(0/7 و 0/4)	0/3150	0/3152	0/3086
(0/9 و 0/9)	-0/0714	-0/0170	-0/0172



شکل ۲- حل عددی $v(x,y,t)$ با استفاده از روش ADM برای $\varepsilon = 0.01$ و $\tau = 0.0005$ در زمان $t = 0.01$

پس می‌توان این نتیجه را گرفت که در توابعی که در آن از نسبت های مثلثاتی استفاده شده است روش MLCN در اعداد رینولدز بالا بهتر عمل می‌کند.

۶- نتیجه گیری

روش عددی تجزیه آدومیان برای حل معادله برگرز دوبعدی با روش عددی کرانک-نیکلسون بهبود یافته مقایسه شده است. نتایج حاصل از این دو روش با نتایج حاصل از روش تحلیلی مقایسه گردید. در روش MLCN به دلیل ماتریس‌های وجود آورنده حجم زیادی اشغال

- [15] Adomian G., Application of the decomposition method to the Navier-Stokes equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 119, No. 1-2, pp. 340-360, 1986.
- [16] Orłowski A., and Sobczyk K., Solitons and shock waves under random external noise *Reports on Mathematical Physics*, Vol. 27, No. 59, 1989.
- [17] Bahadır A. R., A fully implicit finite-difference scheme for two-dimensional Burgers' equations, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 137, No. 1, pp. 131-137, 2003.
- [18] Zhu H., Shu H., and Ding M., Numerical solutions of two-dimensional Burgers' equations by discrete Adomian decomposition method, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 60, No. 3, pp. 840-848, 2010.
- [19] Biazar J., Aminikhah H., Exact and numerical solutions for non-linear Burger's equation by VIM, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 49, pp. 1-7, 2009.