

تأثیر نابالانسی و بهره‌های کنترلی بر دینامیک غیرخطی یک روتور هم‌محور در یاتاقان‌های مغناطیسی فعال و تماس با یاتاقان‌های کمکی

رضا ابراهیمی

استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرکرد، شهرکرد، ایران

مصطفی غیور*

استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

حشمت‌اله محمدخانلو

استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

رضا تیکانی

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده

هدف اصلی این مقاله، پیش‌بینی رفتار دینامیک غیرخطی یک سیستم روتور هم‌محور تعلیق شده توسط دو یاتاقان مغناطیسی فعال (AMB) و تماس با دو یاتاقان کمکی می‌باشد. سیستم مورد نظر، با ده درجه آزادی در دو صفحه طولی عمود بر هم مدل‌سازی می‌شود. در این مدل، ممان‌های ژيروسکوپیک دیسک‌ها و کوپلینگ هندسی بین قطب‌های AMB لحاظ شده است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت با استفاده از معادله لاگرانژ استخراج و با روش عددی رانگ-کوتا حل شده‌اند. سپس اثرات نابالانسی، بهره کنترل تناسبی و مشتقی روی رفتار دینامیکی سیستم روتور هم‌محور - AMB، با استفاده از مسیرهای مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخگی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که نابالانسی و بهره‌های کنترلی اثرات قابل ملاحظه‌ای بر پاسخ‌های دینامیکی سیستم روتور هم‌محور - AMB دارند. همچنین نتایج تحلیل، رفتارهای غیرخطی متنوعی را از جمله حرکات با دوره تناوب 2T، شبه‌تناوبی و نیز پدیده پرش، آشکار می‌کنند که می‌تواند راهکارهایی را به مهندسان و محققان در رابطه با طراحی و مطالعه سیستم‌های روتور هم‌محور - AMB یا بعضی از توربوماشین‌ها در آینده بدهد.

واژه‌های کلیدی: روتور هم‌محور، یاتاقان مغناطیسی فعال، یاتاقان کمکی، دینامیک غیرخطی، دوشاخگی.

Effects of Unbalance and Controller Gains on Nonlinear Dynamic of a Coaxial Rotor in Active Magnetic Bearings and Contact with Auxiliary Bearings

R. Ebrahimi

Faculty of Engineering and Technology, Shahrekord Branch, Islamic Azad University, Shahrekord, Iran

M. Ghayour

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

H. Mohammad Khanlo

Department of Aerospace Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

R. Tikani

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

Abstract

The main purpose of this study is to predict the nonlinear dynamic behavior of a coaxial rotor system supported by two active magnetic bearings (AMBs) and contact with two auxiliary bearings. The system is modeled by ten degrees of freedom in two perpendicular lateral planes. In this model, gyroscopic moments of disks and geometric coupling of the magnetic actuators are included. The nonlinear equations of motion are developed using the Lagrange's equation and solved by the Rung-Kutta method. Then, the effects of unbalance, proportional and differential controller gain on the dynamic behavior of the coaxial rotor-AMB system are investigated by the dynamic trajectories, power spectra, Poincaré maps and bifurcation diagrams. The results indicate that the unbalance and controller gains have significant effects on the dynamic responses of the coaxial rotor-AMB system. Also, the results of analysis reveal a variety of nonlinear behavior such as period-2, quasi-periodic motions, as well as jump phenomena that can give some insight to engineers and researchers in designing and studying coaxial rotor-AMB systems or some turbo-machinery in the future.

Keywords: Coaxial rotor, Active magnetic bearing, Auxiliary bearing, Nonlinear dynamic, Bifurcation.

۱- مقدمه

نتیجه عدم وجود اصطکاک، باعث فرسودگی کمتر و عمر بیشتر سیستم شده و به این ترتیب هزینه‌های تعمیر و نگهداری را کاهش می‌دهد. بنابراین AMB دارای ویژگی‌های متمایزی نسبت به یاتاقان معمولی می‌باشد که منجر به کاربرد بیشتر آن در ماشین‌های دوار با سرعت بالا می‌شود. همچنین عدم نیاز به روغنکاری، دقت کنترلی بالا و توانایی کار

یاتاقان مغناطیسی فعال (AMB) که در سال‌های اخیر کاربرد زیادی پیدا کرده است، محور را به جای تماس مکانیکی با نیروی مغناطیسی به حالت تعلیق در می‌آورد. عدم تماس روتور با AMB و در

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: ghayour@cc.iut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۰/۰۶

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۱/۲۷

در محیط‌های با تغییرات دمایی بالا یا خلاء، از دیگر مزیت‌های AMB به حساب می‌آید [۱ و ۲]. از طرفی به دلیل اینکه AMB دارای خواص غیرخطی زیاد است، سیستم‌های روتور - AMB دارای پاسخ دینامیکی پیچیده‌ای هستند که ممکن است در آن پدیده‌های غیرخطی متعددی مانند پرش^۱، حرکات شبه‌تناوبی^۲، آشوبناک^۳ و ... مشاهده شود [۳ - ۵]. بنابراین مطالعه دینامیک غیرخطی سیستم روتور - AMB از اهمیت خاصی برخوردار است.

جی و هانسن [۶] نوسانات غیرخطی یک روتور صلب با AMB را تحت شرایط تشدید اصلی سیستم به صورت تحلیلی بررسی کرده‌اند. در شرایط تشدید اصلی فرض می‌شود که فرکانس تحریک تقریباً با فرکانس طبیعی سیستم خطی برابر است. با استفاده از روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه^۴، معادلات مربوط به دامنه و فاز تا مرتبه چهارم به دست آمده‌اند. در ادامه اثر نابالانسی و اثر بهره‌های تناسبی و مشتقی کنترل را روی پاسخ غیرخطی سیستم، بررسی نموده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که با دامنه نیروی تحریک پایین، سیستم دارای یک حل دائم پایدار با دامنه‌های برابر در جهت‌های x و y است.

به هنگام نصب روتورها روی یاتاقان‌های مغناطیسی، یاتاقان‌های کمکی معمولی به همراه آنها باید استفاده شود. معمولاً این یاتاقان‌ها به گونه‌ای نصب می‌شوند که اگر جابجایی روتور از نصف لقی شعاعی یاتاقان مغناطیسی بیشتر شد، از ایجاد آسیب به مجموعه روتور یاتاقان جلوگیری کنند. این شرایط ممکن است در اثر عواملی مانند بیش‌باری آبی یا قطع منبع تغذیه الکتریکی AMB ایجاد شود. البته به دلیل لقی شعاعی خیلی کم، تماس بین روتور و یاتاقان‌های کمکی در شرایط کاری طبیعی نیز دور از انتظار نیست.

بر این اساس عنایت‌حسین [۷] دینامیک غیرخطی یک روتور صلب با AMB و یاتاقان کمکی را بررسی کرده است. در مدل‌سازی سیستم، اثر نیروی وزن روتور، نیروی نابالانسی، نیروی اعمال شده از طرف یاتاقان‌های کمکی، نیروهای اعمال شده از طرف یاتاقان‌های مغناطیسی و کوپلینگ هندسی^۵ بین نیروهای مغناطیسی در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت به ازای مقادیر عددی مختلف از پارامترهای نابالانسی، سختی و ضریب اصطکاک در یاتاقان کمکی با روش رانگ - کوتا حل شده‌اند. نتایج حل عددی با استفاده از نمودارهای دوشاخگی، پاسخ زمانی، مسیرهای مداری، مقاطع پوانکاره و نمودارهای طیف توانی ارائه شده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهد که پاسخ سیستم به طور عمده تحت تاثیر مقدار نابالانسی روتور است. در حالتی که مقدار نابالانسی زیاد باشد، مقادیر سختی و ضریب اصطکاک لغزشی اثر تقریباً ناچیزی روی پاسخ سیستم دارند. برای مقادیر نابالانسی نسبتاً کم نیز استفاده از یاتاقان‌های کمکی با سختی کمتر و ضریب اصطکاک کمتر، منجر به کاهش یا حذف حرکات نامنظم در پاسخ می‌شود.

مطالعه دیگری توسط عنایت‌حسین برای بررسی دقیق‌تر اثر نابالانسی روی پاسخ یک روتور صلب با AMB انجام شده است. در این

مطالعه، نمودار دوشاخگی به جای پارامتر سرعت بدون بعد، برای تغییرات نابالانسی رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نابالانسی روتور، علاوه بر افزایش دامنه، تغییر پاسخ تناوبی به آشوبناک نیز به طور مشخصی صورت می‌پذیرد. به این ترتیب پاسخ تناوبی روتور دستخوش یک دوشاخگی می‌شود که ارتعاشات شبه‌تناوبی را نتیجه می‌دهد. سپس با افزایش بیشتر نابالانسی ارتعاشات شبه‌تناوبی از بین رفته و رفتار آشوبناک در پاسخ سیستم ایجاد می‌شود [۸].

جانگ و چن [۹] به تحلیل دوشاخگی پاسخ دینامیکی یک سیستم AMB با روتور انعطاف‌پذیر همراه با یاتاقان کمکی پرداختند که در آن اثرات کوپلینگ بین جهت‌های افقی و قائم نیز در نظر گرفته شده است. با استفاده از مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخگی و طیف توان، رفتار دینامیکی سیستم به ازای پارامترهای مختلف از جمله نابالانسی، نسبت جرم دیسک به جرم یاتاقان‌ها، سختی محور، لقی شعاعی در AMB و بهره‌های تناسبی و مشتقی جریان‌های کنترلی، بررسی گردیده است. نتایج نشان داد که نابالانسی کمتر، لقی شعاعی بیشتر، نسبت جرم نزدیک به یک و بهره مشتقی کمتر کنترلر، دامنه گسترده‌تری از حرکت تناوبی را نتیجه می‌دهد. همچنین نابالانسی کمتر و بهره تناسبی بزرگتر کنترلر، دامنه ارتعاشی کمتری را ایجاد می‌کند.

به طور کلی، اغلب مطالعات انجام شده در زمینه دینامیک روتورها، به ماشین‌های دوار با یک روتور مربوط می‌شوند. در حالی که برخی از ماشین‌های دوار مانند توربین‌های گازی، از دو یا چند روتور برای انتقال توان بین قسمت‌های فشار پایین و فشار بالای کمپرسور و توربین استفاده می‌کنند. دینامیک ماشین‌های دوار با چندروتور پیچیده‌تر است چون در یک ماشین با بیش از یک روتور و به واسطه سرعت‌های متفاوت روتورها، طراح باید مقادیر سرعت‌های بحرانی هر روتور را به عنوان مسئله‌ای مجزا مد نظر قرار دهد و در مواردی مثل روتورهای هم‌محور با یاتاقان‌های واسطه بین آنها که در راستای عرضی به هم کوپل شده‌اند، اثر برهم کنش محورها نیز باید بررسی شود [۱۰].

یک تحلیل نظری برای بررسی و تعیین مشخصات دینامیکی سیستم‌های توربوماشین با یک روتور و دو روتور توسط چیانگ و سو [۱۱] ارائه شد. سپس اثر نسبت سرعت و سختی تکیه‌گاه روی فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی بررسی گردید. نتایج نشان داد که اولین و دومین سرعت بحرانی سیستم با افزایش سختی تکیه‌گاه افزایش می‌یابد، این در حالی است که سومین سرعت بحرانی سیستم تقریباً ثابت است. هر چند با یک شرایط تکیه‌گاهی صلب‌تر، سرعت‌های بحرانی اول و دوم سیستم نیز با افزایش سختی، تقریباً ثابت می‌مانند.

فراریس و همکاران [۱۲] مدل ساده‌ای از یک سیستم روتور هم-محور توربوپراپ را ارائه نموده و معادلات دیفرانسیل حرکت را با استفاده از روش لاگرانژ به دست آوردند. پس از حل معادلات به دست آمده از روش تحلیلی، نمودارهای کمبل و سرعت‌های بحرانی را برای نسبت دوره‌های ۵-، ۱- و ۵ ترسیم نمودند. پاسخ جرم نابالانس نیز برای دو حالتی که نابالانسی روی دیسک اول و دیسک دوم باشد، محاسبه و ترسیم شد.

با توجه به جمع‌بندی مطالعات صورت گرفته، تحقیقات پیشین می‌توانند راهکارهایی را در رابطه با تحلیل رفتار آشوبناک سیستم‌های دوار با یک روتور و یاتاقان‌های مغناطیسی فعال به دست دهند. همچنین می‌تواند بینش خوبی را برای تحلیل پاسخ فرکانسی و

¹ Jump

² Quasi periodic

³ Chaotic

⁴ Multiple time scale

⁵ Geometric Coupling

سرعت‌های دورانی ثابت فرض شده و از میرایی داخلی محور، ارتعاشات پیچشی و ارتعاشات طولی آن چشم‌پوشی شده است.

انرژی جنبشی کلی سیستم، جمع انرژی جنبشی جرم‌های متمرکز و دیسک‌های صلب می‌باشد. انرژی پتانسیل کلی سیستم جمع انرژی کرنشی محور انعطاف‌پذیر داخلی و انرژی پتانسیل ناشی از خاصیت الاستیک بودن یاتاقان واسطه C است. انرژی اتلافی سیستم، ناشی از وجود سیال هوا در اطراف دیسک‌ها می‌باشد که به صورت میرایی ویسکوز بر روی دیسک‌ها مدل شده است. نیروهای خارجی اعمال شده به سیستم شامل نیروهای وزن، نیروهای ناشی از نابالانسی در دیسک-ها، نیروهای الکترومغناطیسی ایجاد شده در AMB و نیروهای تماس بین محور انعطاف‌پذیر داخلی و یاتاقان‌های کمکی A و D می‌باشند. لذا نیروهای تعمیم یافته متناظر با مختصات تعمیم یافته مورد نظر برای سیستم دو روتوری، عبارتند از:

$$Q_{x_1} = F_{M_{x_1}} + F_{C_{x_1}} \quad (1)$$

$$Q_{y_1} = -m_1 g + F_{M_{y_1}} + F_{C_{y_1}} \quad (2)$$

$$Q_{x_2} = m_2 u \Omega_1^2 \cos(\Omega_1 t) \quad (3)$$

$$Q_{y_2} = -m_2 g + m_2 u \Omega_1^2 \sin(\Omega_1 t) \quad (4)$$

$$Q_{\theta_{1x}} = 0 \quad (5)$$

$$Q_{\theta_{1y}} = 0 \quad (6)$$

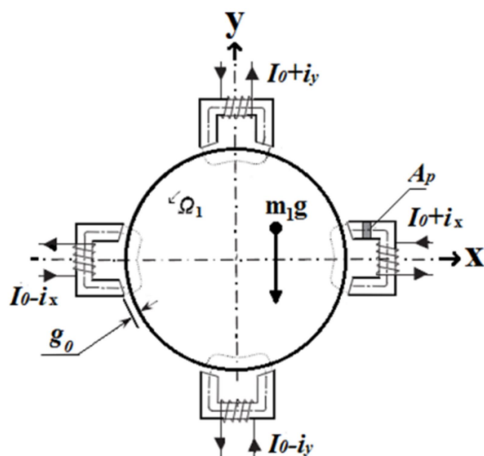
$$Q_{x_3} = F_{M_{x_3}} + F_{C_{x_3}} \quad (7)$$

$$Q_{y_3} = -m_3 g + F_{M_{y_3}} + F_{C_{y_3}} \quad (8)$$

$$Q_{x_4} = m_4 u \Omega_2^2 \cos(\Omega_2 t) \quad (9)$$

$$Q_{y_4} = -m_4 g + m_4 u \Omega_2^2 \sin(\Omega_2 t) \quad (10)$$

یاتاقان‌های مغناطیسی فعال در این مدل‌سازی دارای چهار قطب الکترومغناطیسی می‌باشد که در راستای x و y قرار گرفته‌اند. کوپلینگ هندسی بین قطب‌های واقع در راستای افقی و قائم، در نظر گرفته شده است. نمای کلی از مقطع این یاتاقان‌ها در موقعیت‌های A و D روتور داخلی، در شکل ۲ نشان داده شده است.



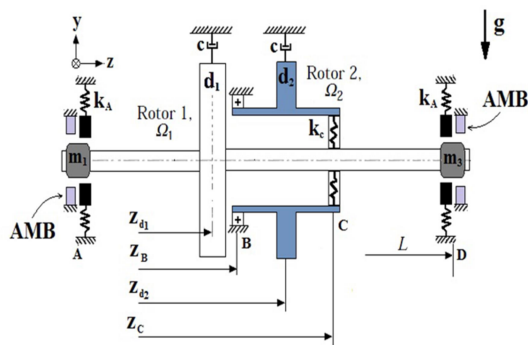
شکل ۲- مقطع عرضی AMB در نقطه A

نیروهای مغناطیسی ایجاد شده توسط قطب‌های AMB، تابعی غیرخطی از جریان عبوری از سیم‌پیچ آنها و فاصله هوایی بین قطب‌ها و

سرعت‌های بحرانی سیستم‌های دوار با چندروتور و یاتاقان‌های معمولی ارائه دهند. اما بررسی رفتار آشوبناک سیستم روتور هم‌محور با AMB و تماس با یاتاقان‌های کمکی، مسئله‌ای است که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. بنابراین در این مقاله اثر نابالانسی و بهره‌های کنترلی روی دینامیک غیرخطی یک سیستم روتور هم‌محور - AMB در یاتاقان‌های کمکی مطالعه شده است. برای این کار از ابزارهایی مانند مسیرهای مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخگی استفاده گردیده است. این مقاله ادامه کار قبلی نویسندگان است که در آن مدل سازی سیستم انجام شد و اثر پارامترهای سرعت و وزن روی پاسخ سیستم بررسی گردید [۱۳].

۲- فرمول‌بندی و تعریف مسئله

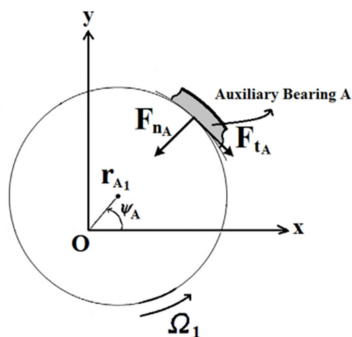
یک مدل ارتعاشی از سیستم روتور هم‌محور - AMB با دو یاتاقان کمکی (در A و D) در شکل ۱ نشان داده شده است. این مدل شامل یک محور انعطاف‌پذیر داخلی (روتور اول) و یک محور صلب خارجی (روتور دوم) به صورت هم‌محور است که یک دیسک صلب روی هر کدام از آنها قرار گرفته است. به این ترتیب می‌توان محور صلب خارجی و دیسک روی آن را به صورت یک جسم صلب یکپارچه در نظر گرفت.



شکل ۱- مدل روتور هم‌محور تعلیق شده با AMB و یاتاقان کمکی

قسمت‌هایی از محور انعطاف‌پذیر داخلی که سمت چپ و راست دیسک d1 قرار دارد، به صورت جرم‌های متمرکز (m1 و m3) در انتهای سمت چپ و راست آن لحاظ گردیده است؛ لذا مانند یک محور انعطاف‌پذیر بدون جرم در سیستم عمل می‌کند. به این ترتیب برای هرکدام از جرم‌های متمرکز m1 و m3 دو مختصه انتقالی x1, y1, x3 و y3 در نظر گرفته شده است. دیسک d1 قرار گرفته روی روتور انعطاف‌پذیر داخلی نیز دارای دو مختصه انتقالی x2 و y2 و دو مختصه دورانی theta1x و theta1y است. حرکت روتور صلب خارجی هم می‌تواند با دو مختصه انتقالی x4 و y4 مربوط به دیسک d2 توصیف شود. لذا در مجموع، سیستم روتور هم‌محور ارائه شده را می‌توان به صورت یک سیستم ارتعاشی ده درجه آزادی با در نظر گرفتن فرضیات زیر مدل‌سازی کرد. سختی یاتاقان B به اندازه کافی زیاد فرض می‌شود که بتوان آن را مانند یک تکیه‌گاه مفصلی در نظر گرفت. حرکت دو روتور هم‌محور تنها به وسیله یاتاقان واسطه C در راستای عرضی به هم کوپل شده است و بین دو روتور کوپلینگ پیچشی وجود ندارد. خاصیت الاستیک یاتاقان واسطه C لحاظ شده ولی از اصطکاک در آن صرف نظر شده است.

راستای x_1 و y_1 عبارت‌اند از:



شکل ۳- مدل نیروهای تماسی بین محور داخلی و یاتاقان کمکی A

$$F_{C_{x1}} = -f_{nA} \cos \psi_A + f_{tA} \sin \psi_A \quad (21)$$

$$F_{C_{y1}} = -f_{nA} \sin \psi_A - f_{tA} \cos \psi_A \quad (22)$$

که:

$$\psi_A = \tan^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) \quad (23)$$

نیروهای تماسی برای یاتاقان کمکی D نیز به همین صورت مدل می‌شوند. در ادامه با استفاده از معادله لاگرانژ و همچنین معرفی برخی پارامترهای بدون بعد و ضرایب ثابت، ده معادله دیفرانسیل بدون بعد غیرخطی و کوپل شده حرکت سیستم به دست می‌آیند [۱۹]. پارامتر-های بدون بعد عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_i}{g_0} & y_1 &= \frac{y_i}{g_0} & \theta_{1x} &= \frac{L\theta_{1x}}{g_0} \\ \theta_{2x} &= \frac{L\theta_{2x}}{g_0} & \theta_{1y} &= \frac{L\theta_{1y}}{g_0} & \theta_{2y} &= \frac{L\theta_{2y}}{g_0} \\ n_1 &= \frac{g_i}{g_0} & n_2 &= \frac{L}{r_i} & \tau &= \omega_0 t \\ \frac{d}{dt} &= \omega_0 \frac{d}{d\tau} & W &= \frac{g}{g_0 \omega_1^2} & \zeta &= \frac{C}{2m_2 \omega_1} \\ S_1 &= \frac{\omega_0}{\omega_1} & S_2 &= \frac{\omega_0}{\omega_2} & S_3 &= \frac{\omega_0}{\omega_3} \\ \Omega &= \frac{\Omega_2}{\Omega_1} & S &= \frac{\Omega_1}{\omega_0} & U &= \frac{u}{g_0} \\ \alpha_2 &= \frac{m_1}{m_2} & \alpha_3 &= \frac{m_4}{m_2} & p &= \frac{g_0 \bar{P}}{I_0} \\ D &= \frac{g_0 \omega_0 \bar{D}}{I_0} \end{aligned}$$

در این مطالعه، مقدار نابالانسی با پارامتر کنترلی بدون بعد U مشخص می‌گردد. ضرایب ثابت تعریف شده در معادلات عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{\mu_0 N^2 A_p I_0^2 (P-1)}{m_1 g_0^3} & \omega_1^2 &= \frac{3EI}{L^3 m_2} \\ \omega_2^2 &= \frac{k_c}{m_2} & \omega_3^2 &= \frac{k_a}{m_1} \\ \gamma_1 &= \frac{L - z_c}{L} & \gamma_2 &= \left(1 + \frac{z_c - z_{d2}}{z_{d2} - z_B} \right) \end{aligned}$$

روتور داخلی می‌باشد. با چشم‌پوشی از اثرات پراکندگی شار مغناطیسی در فضای اطراف، جریان گردابی^۱ و تلفات هیستریزس^۲ جنس هسته سیم‌پیچ‌ها، نیروهای الکترومگنت اعمال شده به روتور داخلی در موقعیت‌های A و D (جرم‌های m_1 و m_3) در راستای x و y به صورت زیر داده می‌شوند [۱]:

$$F_{M_{x1}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{x1}}{g_0 - x_1} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_{x1}}{g_0 + x_1} \right)^2 \right] + \alpha x_1 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{y1}}{g_0 - y_1} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - i_{y1}}{g_0 + y_1} \right)^2 \right] \quad (11)$$

$$F_{M_{y1}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{y1}}{g_0 - y_1} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_{y1}}{g_0 + y_1} \right)^2 \right] + \alpha y_1 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{x1}}{g_0 - x_1} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - i_{x1}}{g_0 + x_1} \right)^2 \right] \quad (12)$$

$$F_{M_{x3}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{x3}}{g_0 - x_3} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_{x3}}{g_0 + x_3} \right)^2 \right] + \alpha x_3 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{y3}}{g_0 - y_3} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - i_{y3}}{g_0 + y_3} \right)^2 \right] \quad (13)$$

$$F_{M_{y3}} = \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{y3}}{g_0 - y_3} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_{y3}}{g_0 + y_3} \right)^2 \right] + \alpha y_3 \frac{A_p \mu_0 N^2}{4} \left[\left(\frac{I_0 + i_{x3}}{g_0 - x_3} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - i_{x3}}{g_0 + x_3} \right)^2 \right] \quad (14)$$

با در نظر گرفتن یک کنترلر PD برای سیستم یاتاقان مغناطیسی فعال، هر کدام از جریان‌های کنترلی i_{x1} ، i_{y1} ، i_{x3} و i_{y3} می‌توانند با بهره تناسبی $\bar{P}$ و بهره مشتقی $\bar{D}$ ، به جابجایی و سرعت روتور انعطاف-پذیر داخلی در موقعیت‌های A و D ارتباط داده شوند لذا:

$$i_{x1} = -\bar{P}x_1 - \bar{D}\dot{x}_1 \quad (15)$$

$$i_{y1} = -\bar{P}y_1 - \bar{D}\dot{y}_1 \quad (16)$$

$$i_{x3} = -\bar{P}x_3 - \bar{D}\dot{x}_3 \quad (17)$$

$$i_{y3} = -\bar{P}y_3 - \bar{D}\dot{y}_3 \quad (18)$$

در هنگام تماس محور انعطاف‌پذیر داخلی با یاتاقان‌های کمکی نیز چون سطح تماس، نسبت به ابعاد کلی بسیار کوچک باقی می‌ماند، این تماس را می‌توان به صورت الاستیک فرض کرد و از اثر گرمای ایجاد شده به واسطه اصطکاک چشم‌پوشی نمود. در شکل ۳ مدل نیروهای تماسی بین محور انعطاف‌پذیر داخلی و یاتاقان کمکی موقعیت A نشان داده شده است. این نیروهای تماسی هم از لحاظ تاثیر بر رفتار دینامیکی محور و هم از لحاظ تاثیر بر نیروی منتقل شده به پایه، از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشند. به این ترتیب می‌توان نیروهای ایجاد شده توسط یاتاقان کمکی در موقعیت A را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} f_{nA} = k_a e_A \\ f_{tA} = \mu f_{nA} \end{cases} \quad (19)$$

که:

$$e_A = (\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - g_1)H(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - g_1) \quad (20)$$

بنابراین مولفه‌های نیروی تماسی اعمال شده به جرم m_1 در

¹ Eddy current

² Hysteresis

$$\ddot{x}_2 + \frac{2\zeta}{S_1} \dot{x}_2 + \left[\frac{\beta_3}{S_1^2} + \frac{\beta_4}{S_2^2} \right] x_2 - \frac{\beta_1}{S_1} x_1 - \left[\frac{\beta_5}{S_1^2} + \frac{\beta_6}{S_2^2} \right] x_3 + \frac{\beta_7}{S_2^2} x_4 - \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] \theta_{1y} = US^2 \cos(S\tau)$$

(۲۶)

$$\ddot{y}_2 + \frac{2\zeta}{S_1} \dot{y}_2 + \left[\frac{\beta_3}{S_1^2} + \frac{\beta_4}{S_2^2} \right] y_2 - \frac{\beta_1}{S_1} y_1 - \left[\frac{\beta_5}{S_1^2} + \frac{\beta_6}{S_2^2} \right] y_3 + \frac{\beta_7}{S_2^2} y_4 + \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] \theta_{1x} = -\frac{W}{S_1^2} + US^2 \sin(S\tau)$$

(۲۷)

$$\ddot{\theta}_{1x} + 2S\dot{\theta}_{1y} + 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{10}}{S_1^2} + \frac{\beta_{11}}{S_2^2} \right] \theta_{1x} - \frac{4n_2^2 \beta_2}{S_1^2} y_1 + 4n_2^2 \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] y_2 + 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{12}}{S_1^2} - \frac{\beta_{13}}{S_2^2} \right] y_3 + 4n_2^2 \frac{\beta_{14}}{S_2^2} y_4 = 0$$

(۲۸)

$$\ddot{\theta}_{1y} - 2S\dot{\theta}_{1x} + 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{10}}{S_1^2} + \frac{\beta_{11}}{S_2^2} \right] \theta_{1y} - \frac{4n_2^2 \beta_2}{S_1^2} x_1 - 4n_2^2 \left[\frac{\beta_8}{S_1^2} + \frac{\beta_9}{S_2^2} \right] x_2 - 4n_2^2 \left[\frac{\beta_{12}}{S_1^2} - \frac{\beta_{13}}{S_2^2} \right] x_3 - \frac{4n_2^2 \beta_{14}}{S_2^2} x_4 = 0$$

(۲۹)

$$\ddot{x}_3 + \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{16}}{\alpha_2 S_2^2} \right] x_3 - \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{17}}{\alpha_2 S_2^2} \right] x_2 - \frac{\beta_{20}}{\alpha_2 S_2^2} x_4 - \left[\frac{\beta_{18}}{\alpha_2 S_1^2} - \frac{\beta_{19}}{\alpha_2 S_2^2} \right] \theta_{1y} = \frac{\alpha_1}{4(1-\alpha_1)(P-1)}$$

(۳۰)

$$\times \left[\left(\frac{1-Px_3-D\dot{x}_3}{1-x_3} \right)^2 - \left(\frac{1+Px_3+D\dot{x}_3}{1+x_3} \right)^2 \right] + \frac{\alpha\alpha_1 x_3}{4(1-\alpha_1)(P-1)} \left[\left(\frac{1-Py_3-D\dot{y}_3}{1-y_3} \right)^2 + \left(\frac{1+Py_3+D\dot{y}_3}{1+y_3} \right)^2 \right] - \frac{\alpha_1(\sqrt{x_3^2+y_3^2}-n_1)H(\sqrt{x_3^2+y_3^2}-n_1)}{(1-\alpha_1)S_3^2}$$

$$\times (\cos \psi_D - \mu \sin \psi_D)$$

$$\ddot{y}_3 + \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{16}}{\alpha_2 S_2^2} \right] y_3 - \left[\frac{\beta_{15}}{\alpha_2 S_1^2} + \frac{\beta_{17}}{\alpha_2 S_2^2} \right] y_2 - \frac{\beta_{20}}{\alpha_2 S_2^2} y_4 + \left[\frac{\beta_{18}}{\alpha_2 S_1^2} - \frac{\beta_{19}}{\alpha_2 S_2^2} \right] \theta_{1x} = -\frac{W}{S_1^2} + \frac{\alpha_1}{4(1-\alpha_1)(P-1)}$$

$$\times \left[\left(\frac{1-Py_3-D\dot{y}_3}{1-y_3} \right)^2 - \left(\frac{1+Py_3+D\dot{y}_3}{1+y_3} \right)^2 \right] + \frac{\alpha\alpha_1 y_3}{4(1-\alpha_1)(P-1)} \left[\left(\frac{1-Px_3-D\dot{x}_3}{1-x_3} \right)^2 + \left(\frac{1+Px_3+D\dot{x}_3}{1+x_3} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{\alpha_1(\sqrt{x_3^2+y_3^2}-n_1)H(\sqrt{x_3^2+y_3^2}-n_1)}{(1-\alpha_1)S_3^2}$$

$$\times (\cos \psi_D + \mu \sin \psi_D)$$

$$\ddot{x}_4 + \frac{2\zeta}{\beta_{21}\alpha_3 S_1} \dot{x}_4 + S\Omega\beta_{22}\dot{y}_4 + \frac{\beta_{23}}{\alpha_3 S_2^2} x_4 + \frac{\beta_{24}}{\alpha_3 S_2^2} x_2 - \frac{\beta_{25}}{\alpha_3 S_2^2} x_3 - \frac{\beta_{26}}{\alpha_3 S_2^2} \theta_{1y} = \frac{US^2\Omega^2}{\beta_{21}} \cos(S\Omega\tau)$$

(۳۱)

$$\ddot{y}_4 + \frac{2\zeta}{\beta_{21}\alpha_3 S_1} \dot{y}_4 - S\Omega\beta_{22}\dot{x}_4 + \frac{\beta_{23}}{\alpha_3 S_2^2} y_4 + \frac{\beta_{24}}{\alpha_3 S_2^2} y_2 - \frac{\beta_{25}}{\alpha_3 S_2^2} y_3 + \frac{\beta_{26}}{\alpha_3 S_2^2} \theta_{1x} = -\frac{W}{\beta_{21}S_1^2} + \frac{U\Omega^2 S_4^2}{\beta_{21}} \sin(S\Omega\tau)$$

(۳۲)

(۳۳)

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1^3}$$

$$\beta_3 = \frac{1+3\alpha_1^2-3\alpha_1}{\alpha_1^3(1-\alpha_1)^3}$$

$$\beta_5 = \frac{1}{(1-\alpha_1)^3}$$

$$\beta_7 = \gamma_2 \sqrt{\beta_4}$$

$$\beta_9 = \frac{\sqrt{\beta_4}}{2} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1-1)^2} \right)$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{4} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1-1)^2} \right)^2$$

$$\beta_{13} = \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1-1)^2} \right) \times \frac{(1+\sqrt{\beta_4})}{2}$$

$$\beta_{15} = \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)^4}$$

$$\beta_{17} = \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)} (\sqrt{\beta_4} + \beta_4)$$

$$\beta_{19} = \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)} \beta_{13}$$

$$\beta_{21} = 1 + \frac{r_{o_2}^2 - r_{i_2}^2}{4(z_{d_2} - z_B)^2}$$

$$\beta_{23} = \frac{\gamma_2^2}{\beta_{21}}$$

$$\beta_{25} = \frac{(1+\sqrt{\beta_4})\gamma_2}{\beta_{21}}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\alpha_1^2}$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4} \left[\frac{3\gamma_1}{(\alpha_1-1)} - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1-1)^3} \right]^2$$

$$\beta_6 = \beta_4 + \sqrt{\beta_4}$$

$$\beta_8 = \frac{(1-2\alpha_1)}{\alpha_1^2(1-\alpha_1)^2}$$

$$\beta_{10} = \frac{1}{\alpha_1(1-\alpha_1)}$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{(1-\alpha_1)^2}$$

$$\beta_{14} = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{(\alpha_1-1)^2} \right) \gamma_2$$

$$\beta_{16} = \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)} (\sqrt{\beta_4} + 1)^2$$

$$\beta_{18} = \alpha_1 \beta_5$$

$$\beta_{20} = \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)} (\sqrt{\beta_4} + 1) \gamma_2$$

$$\beta_{22} = \frac{2(r_{o_2}^2 - r_{i_2}^2)}{4(z_{d_2} - z_B)^2 + (r_{o_2}^2 - r_{i_2}^2)}$$

$$\beta_{24} = \frac{\beta_7}{\beta_{21}}$$

$$\beta_{26} = \frac{\beta_{14}}{\beta_{21}}$$

معادلات ديفرانسييل بعد حركت سيستم:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_2 S_1^2} (x_1 - x_2) + \frac{\beta_2}{\alpha_2 S_1^2} \theta_{1y} = \frac{1}{4(P-1)} \left[\left(\frac{1-Px_1-D\dot{x}_1}{1-x_1} \right)^2 - \left(\frac{1+Px_1+D\dot{x}_1}{1+x_1} \right)^2 \right] + \frac{\alpha x_1}{4(P-1)} \left[\left(\frac{1-Py_1-D\dot{y}_1}{1-y_1} \right)^2 + \left(\frac{1+Py_1+D\dot{y}_1}{1+y_1} \right)^2 \right] - \frac{(\sqrt{x_1^2+y_1^2}-n_1)H(\sqrt{x_1^2+y_1^2}-n_1)}{S_3^2} \times (\cos \psi_A - \mu \sin \psi_A)$$

(۲۴)

$$\ddot{y}_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_2 S_1^2} (y_1 - y_2) - \frac{\beta_2}{\alpha_2 S_1^2} \theta_{1x} = -\frac{W}{S_1^2} + \frac{1}{4(P-1)} \times \left[\left(\frac{1-Py_1-D\dot{y}_1}{1-y_1} \right)^2 - \left(\frac{1+Py_1+D\dot{y}_1}{1+y_1} \right)^2 \right] + \frac{\alpha y_1}{4(P-1)} \left[\left(\frac{1-Px_1-D\dot{x}_1}{1-x_1} \right)^2 + \left(\frac{1+Px_1+D\dot{x}_1}{1+x_1} \right)^2 \right] - \frac{(\sqrt{x_1^2+y_1^2}-n_1)H(\sqrt{x_1^2+y_1^2}-n_1)}{S_3^2} \times (\cos \psi_A + \mu \sin \psi_A)$$

(۲۵)

۳- الگوریتم حل عددی و ابزارهای تحلیل رفتارهای غیرخطی

تعداد اندکی از معادلات دیفرانسیل حل تحلیلی و دقیق دارند که اغلب پیچیده و زمان‌بر می‌باشد. به همین دلیل روش‌های حل عددی، به روشی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل تبدیل شده‌اند. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی به کار رفته برای مدل‌سازی سیستم روتورهای هم‌محور - AMB در جدول ۱ داده شده‌اند.

جدول ۱- مقادیر عددی پارامترهای سیستم	
پارامتر	مقدار عددی
S	1.9
Ω	-1
W	0
n_1	0.5
n_2	4.761
ζ	0.49×10^{-4}
S_1	8.062
S_2	0.3
S_3	1.688
α	0.24
α_1	0.333
α_2	0.045
α_3	0.55
P	1.1
D	0.04

حل عددی معادلات حرکت با استفاده از روش رانگ - کوتا با گام متغیر در نرم‌افزار MATLAB انجام گرفته است. لازم به ذکر است که در تحلیل رفتار سیستم، برای اطمینان از دریافت خروجی حل معادلات در حالت دائمی، تعداد زیادی از اطلاعات اولیه حاصل از انتگرال‌گیری عددی در یک فاصله زمانی که در حالت گذرا هستند کنار گذاشته شده و پس از اطمینان از رسیدن به حالت دائمی، تعدادی فاصله زمانی برای ثبت اطلاعات انتخاب شده است. تحلیل رفتار غیرخطی سیستم نیز با استفاده از ابزارهایی مانند مسیرهای مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخگی انجام شده است.

مسیرهای مداری فقط مشخص می‌کند که حرکت سیستم تناوبی یا غیرتناوبی است و نمی‌تواند اطلاعات کافی را برای شروع حرکت نامنظم فراهم کنند. نمودار طیف توان از تبدیل فوری گسسته متغیر خروجی به دست می‌آید. این نمودار از یک سری خطوط قائم تشکیل می‌شود و این خطوط مبین این موضوع هستند که سیگنال مورد نظر را می‌توان به صورت مجموعه‌ای گسسته از توابع هارمونیک نشان داد. طیف توان رفتار شبه‌تناوبی از خطوط طیف در برخی فرکانس‌های نامتناسب با یکدیگر تشکیل شده است [۱۴].

مقطع پوانکاره یک صفحه‌ای در فضای فاز می‌باشد که نمودار فازی ایجاد شده از حل معادلات حاکم بر حرکت سیستم را قطع می‌کند. برای حرکت‌های تناوبی، مقطع پوانکاره تنها یک نقطه است. چنانچه حرکت شبه‌تناوبی باشد، مقطع پوانکاره یک منحنی بسته از نقاط منفصل را ایجاد می‌کند یا از تعدادی نقاط به صورت توده‌ای و با نظم خاصی تشکیل می‌شود [۱۵].

از نمودارهای دوشاخگی برای شناسایی مسیر ورود به حرکت نامنظم استفاده می‌شود. در نمودار دوشاخگی، دامنه دائمی یک سیستم غیرخطی به صورت تابعی از پارامتر غیرخطی ترسیم می‌شود. به طوری که این پارامتر به آرامی تغییر می‌کند و با تغییر آن، پایداری نقاط تعادل و تعداد آنها تحت تاثیر قرار می‌گیرد. برای یک حرکت تناوبی، هنگام تغییر پارامتر کنترلی، در هر گام فقط یک نقطه روی منحنی دیده می‌شود. اگر حرکت به صورت زیرهارمونیک با دوره تناوب n ام باشد، در هر گام مشخص، n نقطه مجزاء روی منحنی دیده خواهد شد. در نهایت اگر حرکت شبه‌تناوبی یا آشوبناک باشد، ستونی از نقاط روی منحنی مشاهده می‌شود. در این حالت با مراجعه به مقاطع پوانکاره می‌توان حرکت شبه‌تناوبی را از حرکت آشوبناک تشخیص داد [۱۶].

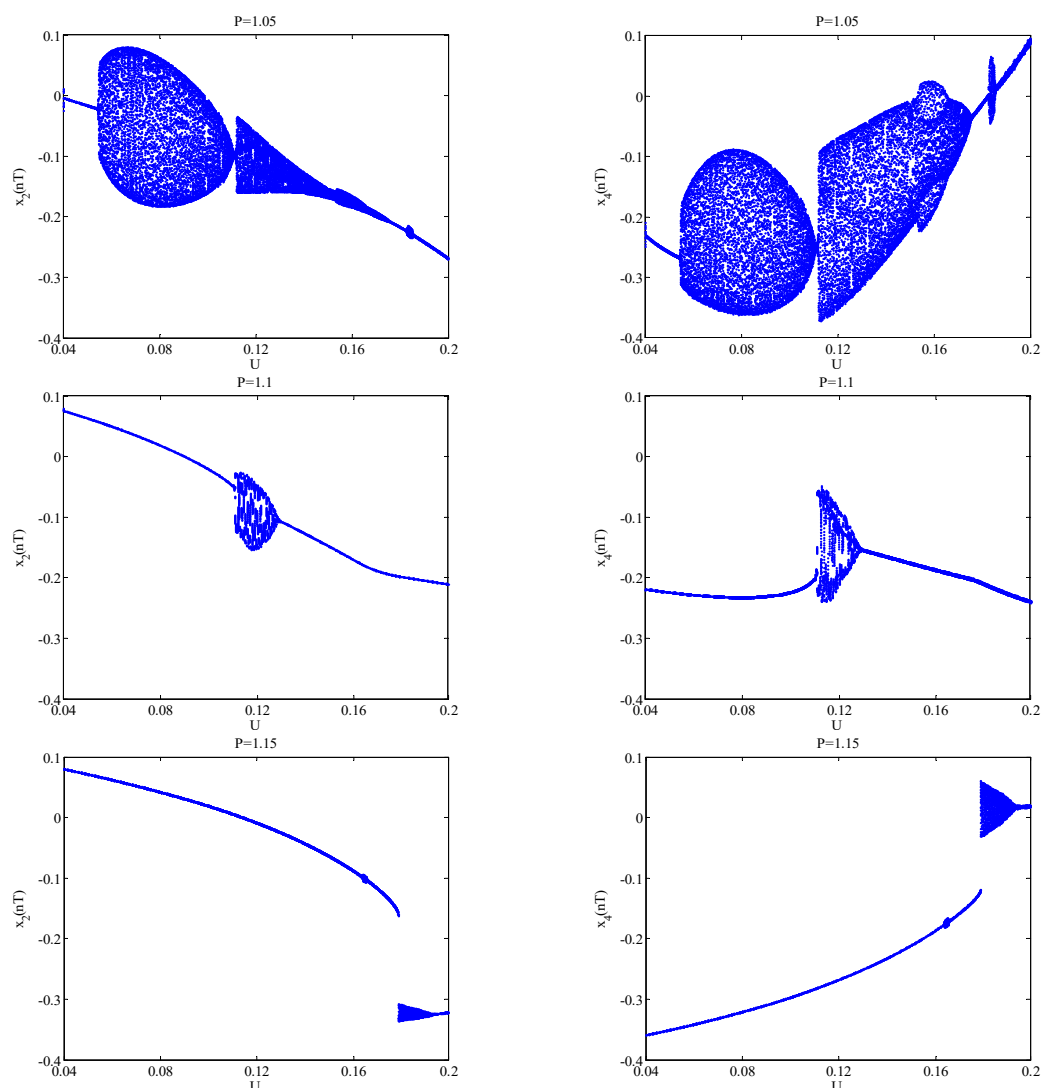
۴- نتایج و بحث

نیروی تحریک ناشی از نابالانسی یکی از موارد مهم در ماشین‌آلات دوار است که علاوه بر ایجاد حرکات نامنظم در سیستم روتور، می‌تواند باعث افزایش لقی در اتصالات، افزایش نرخ سایش در قطعات، ایجاد سر و صدای اضافی و ... شود. در یک سیستم روتور - AMB، حتی زمانی که سیستم روتور در طول زمان فرسوده شده و ممکن است نیروهای دینامیکی ناشی از نابالانسی در آن تشدید شود، می‌توان پارامترهای کنترلی AMB را مطابق با شرایط مورد نیاز تنظیم نمود.

در این مطالعه، پارامتر نابالانسی U برای هر دو روتور، یکسان در نظر گرفته شده است تا با تغییر این پارامتر، به‌طورهمزمان نابالانسی کل سیستم تحت تاثیر قرار گیرد. سپس به ازای مقادیر مختلفی از بهره‌های کنترلی، تاثیر پارامتر نابالانسی بر رفتار غیرخطی سیستم بررسی می‌گردد.

شکل ۴ نمودارهای دوشاخگی پاسخ دیسک‌های d_1 و d_2 را با تغییر پارامتر کنترلی U ، در بهره‌های کنترل تناسبی بدون بعد $P=1.05$ ، $P=1.1$ و $P=1.15$ نشان می‌دهد. به ازای پارامتر بهره کنترل تناسبی $P=1.05$ ، حرکت تناوبی در محدوده $U=[0.04 \sim 0.054]$ قابل دستیابی است. نمودار دوشاخگی شدن، در محدوده نسبتاً وسیع $U=[0.0541 \sim 0.1752]$ رفتار نامنظمی را نشان می‌دهد. حرکت سیستم در $U=[0.1753 \sim 0.1826]$ وارد حالت تناوبی شده و دوباره در $U=[0.1827 \sim 0.1854]$ دچار رفتار نامنظم می‌شود. سرانجام به رفتار تناوبی در $U=0.1855$ برمی‌گردد.

به ازای پارامتر بهره کنترل تناسبی $P=1.1$ ، حرکت سیستم فقط در محدوده $U=[0.1296 \sim 0.1113]$ نامنظم است و پس از آن دوباره به حالت تناوبی برمی‌گردد. به ازای پارامتر بهره کنترل تناسبی $P=1.15$ ، حرکت تناوبی در محدوده نسبتاً وسیع $U=[0.04 \sim 0.1640]$ قابل دستیابی است. حرکت سیستم در یک محدوده کوچک $U=[0.1641 \sim 0.1661]$ دچار رفتار نامنظم شده و پس از آن مجدداً به حالت تناوبی برمی‌گردد. این حرکت تناوبی ناگهان به یک جاذب نامنظم در $U=0.1793$ پرش می‌کند و رفتار نامنظم ایجاد شده تا $U=0.1947$ حفظ می‌شود. در نهایت رفتار سیستم دوباره به حالت تناوبی برمی‌گردد.



شکل ۴- نمودارهای دوشاخگی $x_2(nT)$ و $x_4(nT)$ با تغییر پارامتر نابالانسی U برای $S_1=8.062$, $\zeta=0.49 \times 10^{-4}$, $n_2=4.761$, $n_1=0.5$, $W=0$, $\Omega=-1$, $S=1.9$ و $D=0.04$ و $\alpha_3=0.55$, $\alpha_2=0.045$, $\alpha_1=0.333$, $\alpha=0.24$, $S_3=1.688$, $S_2=0.3$

از $U=[0.1579 \sim 1.683]$ وارد حرکت با دوره تناوب $2T$ می‌شود. در نهایت به رفتار تناوبی در $U=0.1684$ برمی‌گردد.

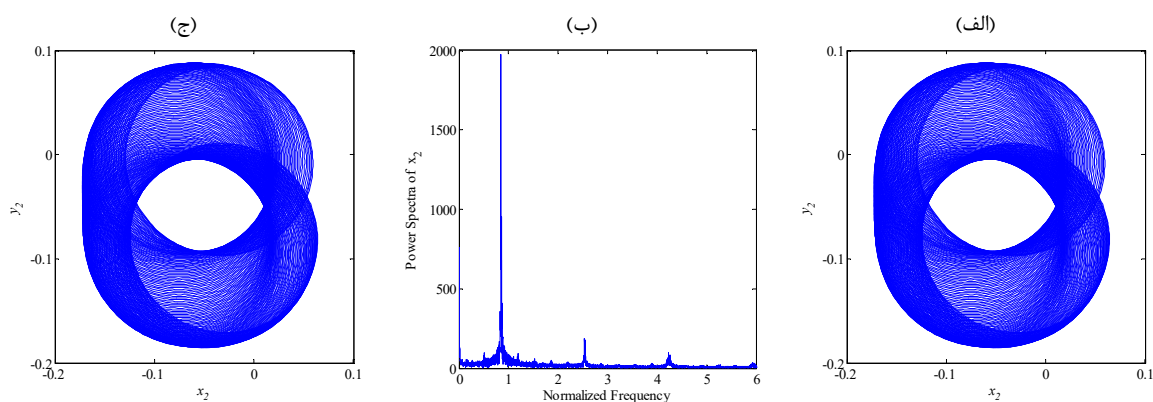
به ازای پارامتر بهره کنترل مشتقی $D=0.04$ ، حرکت سیستم فقط در محدوده $U=[0.1113 \sim 0.1296]$ شبه‌تناوبی است و پس از آن دوباره به حالت تناوبی برمی‌گردد. به ازای پارامتر بهره کنترل مشتقی $D=0.05$ ، حرکت تناوبی در محدوده $U=[0.04 \sim 0.1081]$ قابل دستیابی است. حرکت سیستم در یک محدوده $U=[0.1082 \sim 0.1178]$ دچار رفتار شبه‌تناوبی شده و پس از آن مجدداً به حالت تناوبی برمی‌گردد. این حرکت تناوبی با یک پرش در $U=0.1238$ به حرکت شبه‌تناوبی تبدیل می‌شود و تا $U=0.1586$ ادامه پیدا می‌کند. سپس در $U=[0.1587 \sim 0.1653]$ سیستم وارد حرکت با دوره تناوب $2T$ می‌شود و در نهایت به رفتار تناوبی در $U=0.1654$ برمی‌گردد.

شکل ۷ رفتار دینامیکی سیستم را در $U=0.1584$ و $D=0.03$ نشان می‌دهد. در این حالت، از نمودار مداری و طیف توان تا حدود زیادی می‌شود به حرکت با دوره تناوب $2T$ پی برد، درحالی‌که وجود دو نقطه

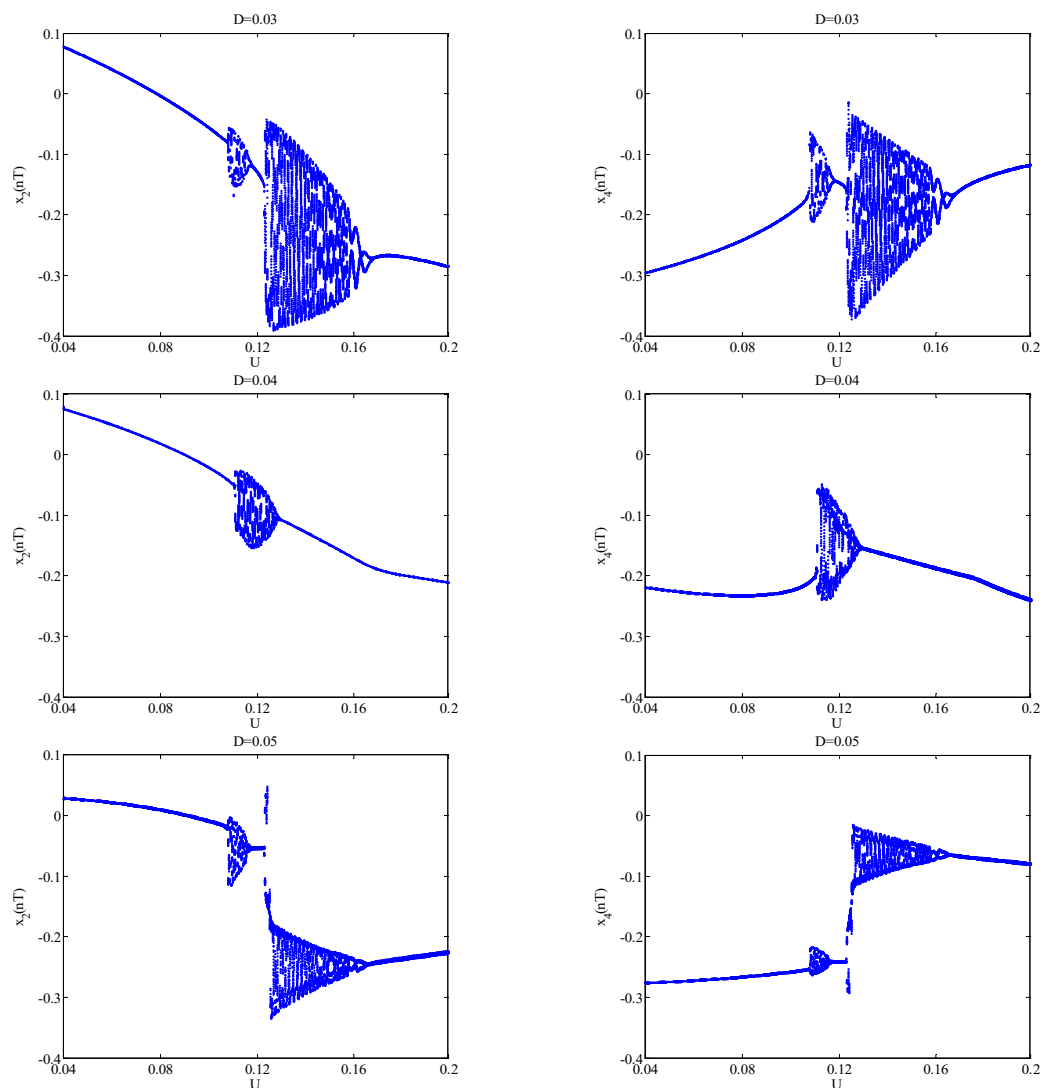
از دیگر تکنیک‌های شناسایی نیز برای بررسی و تأیید دقیق‌تر رفتار دینامیکی سیستم استفاده گردیده است. در شکل ۵ مسیرهای چرخشی دیسک d_1 ، طیف توان x_2 و مقطع پوانکاره دیسک d_1 در $U=0.08$ و $P=1.05$ نشان داده شده است که بیانگر رفتار شبه‌تناوبی سیستم می‌باشد.

شکل ۶ نمودارهای دوشاخه‌ای پاسخ دیسک‌های d_1 و d_2 را با تغییر پارامتر کنترلی U ، در بهره‌های کنترل مشتقی بدون بعد $D=0.03$ ، $D=0.04$ و $D=0.05$ نشان می‌دهد. به ازای پارامتر بهره کنترل مشتقی $D=0.03$ ، حرکت تناوبی در محدوده $U=[0.04 \sim 0.1083]$ قابل دستیابی است. نمودار دوشاخگی شدن، در محدوده $U=[0.1084 \sim 0.1157]$ دارای رفتار شبه‌تناوبی است. سپس رفتار دینامیکی سیستم در $U=0.1158$ وارد حرکت با دوره تناوب $2T$ می‌شود و تا $U=0.1189$ ادامه پیدا می‌کند. چنانچه باز هم پارامتر کنترلی را افزایش دهیم، در $U=0.1190$ رفتار سیستم وارد حرکت تناوبی می‌شود. رفتار سیستم در $U=[0.1236 \sim 0.1578]$ مجدداً دچار حرکت شبه‌تناوبی شده و در

مجزاء در نمودار مقطع پوانکاره، حرکت فوق را کاملاً تأیید می‌کند.

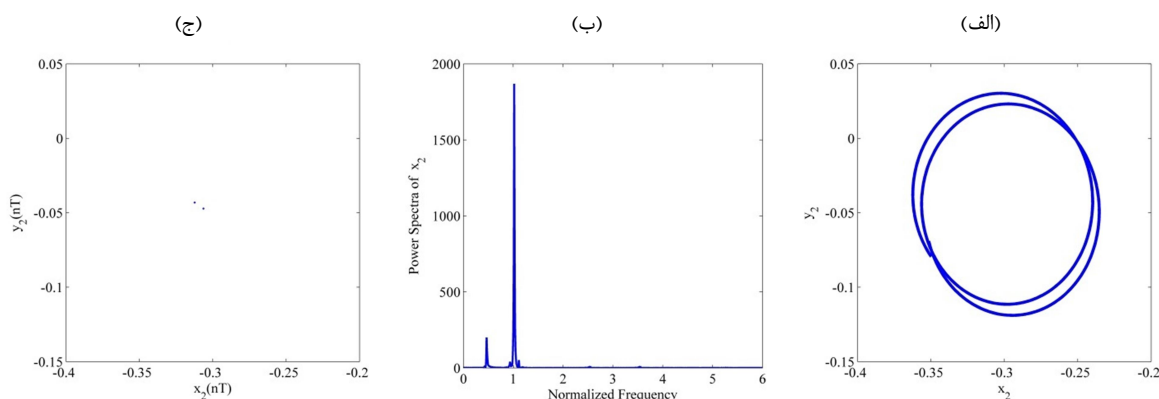


شکل ۵- پاسخ دیسک d_1 : الف) مسیرهای مداری ب) طیف توان ج) مقطع پوانکاره در $U=0.08$ و $P=1.05$



شکل ۶ نمودارهای دوشاخگی $x_2(nT)$ و $x_4(nT)$ با تغییر پارامتر نابالانسی U برای $S_1=8.062$, $\zeta_1=0.49 \times 10^{-4}$, $n_2=4.761$, $n_1=0.5$, $W=0$, $\Omega=-1$, $S=1.9$

$P=1.1$ و $\alpha_3=0.55$, $\alpha_2=0.045$, $\alpha_1=0.333$, $\alpha=0.24$, $S_3=1.688$, $S_2=0.3$



شکل ۷- پاسخ دیسک d_1 : الف) مسیره‌های مداری ب) طیف توان ج) مقطع پوانکاره در $U=0.1584$ و $D=0.03$

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل دینامیک غیرخطی یک سیستم روتور هم‌محور مجهز به دو AMB و دو یاتاقان کمکی، انجام شد. سیستم مورد نظر، با ده درجه آزادی در دو صفحه طولی عمود بر هم مدل‌سازی شد. در این مدل، انعطاف‌پذیری محور داخلی، کوپلینگ ارتعاشات عرضی بین محور داخلی و محور خارجی، ممان‌های ژيروسکوپی دیسک‌ها و کوپلینگ هندسی بین قطب‌های AMB، در نظر گرفته شده است. مسیره‌های مداری، طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخگی برای تحلیل رفتار غیرخطی سیستم به کار گرفته شدند. نتایج نشان داد که نابالانسی و بهره‌های کنترلی اثرات قابل ملاحظه‌ای را روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم روتور هم‌محور - AMB دارند. رفتارهای غیرخطی متنوعی نیز از جمله حرکات با دوره تناوب $2T$ ، شبه‌تناوبی و پدیده پرش، برای سیستم آشکار شد. همچنین نتایج به دست آمده نشان داد که با افزایش پارامتر بهره کنترل تناسبی P می‌توان وقوع رفتار شبه-تناوبی را به تأخیر انداخت و محدوده وسیع‌تری از پاسخ تناوبی را برای سیستم ایجاد نمود. با افزایش پارامتر بهره کنترل مشتقی D اگرچه نوع رفتار سیستم تحت تأثیر قرار می‌گیرد ولی روی تأخیر در وقوع رفتار شبه‌تناوبی، نمی‌توان اثر مشخصی را مشاهده نمود. نکته دیگری که می‌توان به آن اشاره نمود این است که سیستم روتور هم‌محور با AMB و یاتاقان‌های کمکی، با افزایش نابالانسی، دارای یک قابلیت خود-کنترلی^۱ برای گذر از حالت شبه‌تناوبی به تناوبی می‌باشد

۶- نمادها

مؤلفه افقی نیروی تماس در یاتاقان کمکی D	F_{Cx_3}
مؤلفه قائم نیروی تماس در یاتاقان کمکی A	F_{Cy_1}
مؤلفه قائم نیروی تماس در یاتاقان کمکی D	F_{Cy_3}
مؤلفه افقی نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسیس فعال A	F_{Mx_1}
مؤلفه افقی نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسیس فعال D	F_{Mx_3}
مؤلفه قائم نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسیس فعال A	F_{My_1}
مؤلفه قائم نیروی الکترومغناطیسی در یاتاقان مغناطیسیس فعال D	F_{My_3}
مؤلفه شعاعی نیروی تماس در یاتاقان کمکی A	f_{n_A}
مؤلفه مماسی نیروی تماس در یاتاقان کمکی A	f_{t_A}
ثابت گرانشی $\left(\frac{m}{s^2}\right)$	g
لقی شعاعی یاتاقان‌های مغناطیسی فعال (m)	g_0
لقی شعاعی یاتاقان‌های کمکی (m)	g_1
تابع هویساید	$H(\blacksquare)$
ممان اینرسی سطح مقطع محور داخلی حول تار خنثی (m^4)	I
جریان اولیه سیم‌پیچ‌ها (A)	I_0
جریان کنترلی در قطب‌های افقی یاتاقان مغناطیسی فعال (A)	i_{x_1}
جریان کنترلی در قطب‌های افقی یاتاقان مغناطیسی فعال (A)	i_{x_3}
جریان کنترلی در قطب‌های قائم یاتاقان مغناطیسی فعال (A)	i_{y_1}
جریان کنترلی در قطب‌های قائم یاتاقان مغناطیسی فعال (A)	i_{y_3}
سختی یاتاقان‌های کمکی $\left(\frac{N}{m}\right)$	k_a
سختی یاتاقان واسطه $\left(\frac{N}{m}\right)$	k_c
طول محور داخلی (m)	L
جرم متمرکز در نقطه A (kg)	m_1
جرم دیسک d_1 (kg)	m_2
جرم متمرکز در نقطه D (kg)	m_3

^۱ Auto Controlling

- [12] Ferraris G., Maisonneuve V., and Lalanne M., Prediction of the dynamic behavior of non-symmetric coaxial co or counter-rotating rotors. *J Sound Vibr*, Vol. 195, No. 4, pp. 649-666, 1996.
- [13] Ebrahimi R., Ghayour M., Khanlo H. M., Chaotic vibration analysis of a coaxial rotor system in active magnetic bearings and contact with auxiliary bearings. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. , pp. , 2016.
- [14] Jenkins G. M., and Watt D. G., *Spectral analysis and its applications*, Holden-Day, Michigan, 1969.
- [15] Moon F. C., *Chaotic vibration, an introduction for applied scientists and engineers*, John Wiley, New Jersey, 2004.
- [16] Chen Y., *Bifurcation and chaos in engineering*, Springer, 1998.

جرم دیسک d_2 (kg)	m_4
تعداد دور سی‌پی‌جی‌ها	N
بهره کنترلر تناسبی بدون بعد	P
بهره کنترلر تناسبی $\left(\frac{A}{m}\right)$	$\bar{P}$
شعاع دیسک d_1 (m)	r_1
شعاع داخلی دیسک d_2 (m)	r_{i2}
شعاع خارجی دیسک d_2 (m)	r_{o2}
پارامتر سرعت	S
پارامتر نابالانسی	U
پارامتر وزن	W
موقعیت محوری نقطه B (m)	z_B
موقعیت محوری نقطه C (m)	z_C
موقعیت محوری دیسک d_2 (m)	z_{d2}
پارامتر کوپلینگ مغناطیسی	α
نسبت موقعیت دیسک d_1 به طول محور داخلی	α_1
ضریب اصطکاک یاتاقان‌های کمکی	μ
ضریب تراوایی مغناطیسی خلاء	μ_0
نسبت سرعت دو محور	Ω

۷- مراجع

- [1] Schweitzer G., Maslen E., Bleuler H., Traxler A., Cole M., and Keogh P., *Magnetic bearings: theory, design, and application to rotating machinery*, Springer, 2009.
- [2] Chiba A., Fukao T., Ichikawa O., Oshima M., Takemoto M., and Dorrell DG., *Magnetic bearings and bearingless drives*, Elsevier, London, 2005.
- [3] Nayfeh, A.H., and Balachandran, B., *Applied non-linear dynamics: analytical, computational and experimental methods*, Wiley, New York, 1995.
- [4] Ji J. C., Yu L., and Leung A. Y. T., Bifurcation behavior of a rotor supported by active magnetic bearings. *J Sound Vibr*, Vol. 235, No. 1, pp. 133-151, 2000.
- [5] Yang X. D., An H. Z., Qian Y. J., Zhang W., and Yao M. H., Elliptic motions and control of rotors suspending in active magnetic bearings. *J Comput and Nonlinear Dynam*, Vol. 11, pp. 1-8, 2016.
- [6] Ji J. C., and Hansen C. H., Nonlinear oscillations of a rotor in active magnetic bearings. *J Sound Vibr*, Vol. 240, No.4, pp. 599-612, 2001.
- [7] Inayat-Hussain J. I., Nonlinear dynamics of a magnetically supported rigid rotor in auxiliary bearings. *Mech Mach Theory*, Vol. 45, pp. 1651-1667, 2010.
- [8] Inayat-Hussain J. I., Chaos via torus breakdown in the vibration response of a rigid rotor supported by active magnetic bearings. *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 31, pp. 912-927, 2007.
- [9] Jang M.J., and Chen C. K., Bifurcation analysis in flexible rotor supported by active magnetic bearings. *Int J Bifurcat Chaos*, Vol. 11, No. 8, pp. 2163-2178, 2001.
- [10] Payyoor N., Tiwari M., and Gupta K., Nonlinear dynamics, instability and chaos of two spool aero gas turbine rotor system. *Proc. of ASME, Gas Turbine India Conference*, Bangalore, Karnataka, DC, 5, 2013.
- [11] Chiang H. W. D., Hsu C. N., and Tu S. H., Rotor-bearing analysis for turbo machinery single- and dual-rotor systems. *J Propul Power*, Vol. 20, No. 6, pp. 1096-1104, 2004.