

افزایش سرعت همگرایی معادلات تراکم پذیر با استفاده از روش چند شبکه همراه با پیش شرط

محمد غفاری

محمود پسندیده فرد*

علی توکلی صبور

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

محقق، مهندسی هوافضا، سازمان پژوهشی باقراعلوم، تهران، ایران

چکیده

در این تحقیق از روش چند شبکه غیر خطی همراه با پیش شرط جهت بهبود نرخ همگرایی و کاهش زمان محاسباتی معادلات حاکم بر جریان تراکم پذیر استفاده شده است. روش شبکه‌های چندگانه، به مجموعه‌ای از الگوریتم‌های محاسباتی گفته می‌شود که توسط سلسله مراتبی از گسسته سازی‌های متفاوت، بر روی شبکه‌های فیزیکی مختلف با ابعاد متفاوت، فرایند حل معادلات دیفرانسیل را تسریع می‌بخشند. زمانی که در فرایند حل معادلات جریان، از الگوریتم چند شبکه غیر خطی جهت کاهش خطاهای عددی استفاده می‌شود، انتخاب روشی مناسب جهت هموار کردن نوسانات در سطوح مختلف شبکه، نقش مهمی در بهبود عملکرد آن ایفا می‌کند. در این پژوهش، از روش‌های پیش شرط گذاری جهت کاهش ناپایداری‌های سیستم معادلات خطی که در هر تکرار تولید می‌شوند استفاده شده است. از جمله نتایج این کار تحقیقاتی می‌توان به انتخاب روش پیش شرط گذاری مناسب جهت ترکیب با روش چند شبکه، ارزیابی روش چند شبکه در برخورد با جریان‌های مغشوش، آرام و غیر لزج و همچنین بررسی الگوریتم‌های مختلف جابجایی بین شبکه‌ها (چرخه)، اشاره کرد. **واژه‌های کلیدی:** نرخ همگرایی، روش چند شبکه، جریان تراکم پذیر، پیش شرط گذاری، شبکه نامنظم.

Multigrid Convergence Acceleration of the Preconditioned Compressible flow Equations

M. Ghaffari

M. Pasandideh Fard

A. Tavakoli

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University, Mashad, Iran

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University, Mashad, Iran

Department of Aerospace, Bagher Al Olum Research Organization, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, the preconditioned nonlinear multigrid algorithm is used with aim of improving convergence rates and reducing CPU time for solving compressible flow equations. MultiGrid (MG) methods are a group of algorithms that are used for accelerating convergence of differential equations using a series of discretizations. This method is based upon the principle that explains when the global (low-frequency) error of a fine mesh is represented on a coarse mesh, it retains the same characteristics as of the local (high-frequency) error, thus the same method for removing high frequency errors is also applicable in such situation. When the nonlinear multigrid algorithm drives the external iterations, the choice of smoother on each grid level plays an important role in the performance. In this research, a preconditioning method has been used to reduce instabilities of the linear system that arise in each iteration. Some important results of this research are: choosing the best preconditioning scheme to be coupled with MG method, assessment of MG method performance in equations of turbulence, laminar and inviscid flows and analysis of different cycling schemes.

Keywords: Convergence rate, multigrid method, compressible flow, preconditioning, unstructured grid.

ترکیب تعدادی از این روشها بدست می‌آیند. در این تحقیق افزایش سرعت همگرایی با کمک روش‌هایی از دو دسته آخر (چند شبکه و استفاده از پیش شرط) مورد بررسی قرار گرفته است.

اکثر روش‌های مورد استفاده جهت افزایش سرعت همگرایی به نحوی، به طور مستقیم و یا غیر مستقیم، با ماتریس جاکوبی سیستم معادلات مسئله در ارتباط هستند، چرا که تقریباً استفاده از هر روشی برای گسسته سازی معادلات ناویر استوکس منجر به تولید یک سیستم معادلات خطی می‌شود. مدل سازی فیزیکی هر مسئله ای را پس از انتگرال گیری بر روی حجم کنترل، به شکل نیمه گسسته، می‌توان به صورت معادله (۱) نوشت (بر روی دامنه $\mathbb{R}^3 \subset \phi$)

$$\int_{\phi_l} \frac{\partial U}{\partial t} d\phi + R_l(U) = 0 \quad (1)$$

که در آن U بردار متغیرها بوده و $R_l(U)$ بردار باقیمانده‌ها است که نشان دهنده انتگرال تمام جملات مکانی در نقطه i می‌باشد. با گسسته سازی مشتقات زمانی به روش ضمنی می‌توان فرم گسسته شده

۱- مقدمه

پیشرفت‌های چشم گیر به وجود آمده در سال‌های اخیر در عرصه سخت افزارها، انگیزه محققین را برای توسعه و استفاده از الگوریتم‌های متنوع عددی، در زمینه حل جریان‌های آشفته پیچیده با کاربردهای صنعتی، افزایش داده است. کدهای عددی سه بعدی که بر اساس رویکردهای حجم محدود و المان محدود نوشته شده‌اند با مدل‌های متنوع آشفتگی ترکیب شده و برای حل پیچیده ترین مسائل واقعی مانند احتراق موتور جت، بررسی راکتور هسته ای و طراحی کامل یک هواپیما مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در طول سالیان متمادی روش‌های زیادی برای افزایش نرخ همگرایی معادلات حاکم بر جریان ابداع شده است. این روش‌ها را می‌توان به طور کلی به چهار دسته تقسیم بندی کرد: روش‌های مستقیم، روش‌های ضمنی تکراری، رویکرد پیش شرط گذاری، روش‌های چند شبکه [۱]. البته لازم به ذکر است که بیشتر الگوریتم‌های کامل از

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mahmoud.pasandideh@um.ac.ir

معادلات حاکم را بدست آورد. یکی از پرکاربردترین روشهای ضمنی برای معادلات پایا طرح عددی پس رو اوپلر است که در آن باقیماندهها از بردار جواب در زمان جدید U^{n+1} محاسبه می شوند. با اعمال این طرح بر روی معادله (۱) خواهیم داشت

$$|\varphi_i| \frac{\Delta U_i}{\Delta t_i} = -R_i(U^{n+1}) \quad (2)$$

که در آن زمان n مربوط به وضعیت فعلی بوده و زمان $n+1$ نشان دهنده وضعیت جدید است که پس از حرکت در یک گام زمانی (Δt) بدست می آید. به گونه ای که $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ و $\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n$. اما در این حالت باقیماندهها در زمان $n+1$ تابعی از بردار جواب غیر معلوم U^{n+1} هستند بنابراین نمی توان آنها را به طور مستقیم محاسبه کرد. برای اصلاح این موضوع از خطی سازی درجه یک نسبت به سطح زمانی n استفاده می شود

$$R_i(U^{n+1}) = R_i(U^n) + \sum_{j \in N(i)} \frac{\partial R_i(U^n)}{\partial U_j} \Delta U_j^n + O(\Delta t^2) \quad (3)$$

با قرار دادن معادله (۳) در (۲) سیستم معادلات (۴) بدست می آید که برای بروز رسانی جواب ها باید حل گردد

$$\left(\frac{|\varphi_i|}{\Delta t_i^n} \delta_{ij} + \frac{\partial R_i(U^n)}{\partial U_j} \right) \cdot \Delta U_j^n = -R_i(U^n) \quad (4)$$

به جمله $\frac{\partial R}{\partial U}$ ماتریس جاکوبی می گویند که نشان دهنده تغییر باقیمانده ها در یک نقطه نسبت به مقادیر جواب است.

با توجه به مطالب بیان شده دریافت می شود که افزایش سرعت همگرایی معادلات فیزیکی به نحوی به چگونگی حل دستگاه معادلات خطی وابسته است (چهار دسته اشاره شده در بالا به نوعی روشهایی برای حل دستگاه معادلات خطی نیز هستند) چرا که در هر تکرار معادلات ناویز استوکس، دستگاه معادلات (۴) تا تعداد مشخصی تکرار و یا رسیدن به یک حد همگرایی مشخص هموار می شود. بنابراین تعیین حل کننده خطی که کارآمد، قابل اطمینان و سریع باشد از اهمیت بالایی برخوردار است.

در روش مستقیم، ماتریس افزوده جاکوبی با استفاده از روشهایی مانند رویکرد حذفی گاوس معکوس می شوند. این روشها از لحاظ محاسباتی بسیار پر هزینه بوده و در برخورد با ماتریسهای کم پشت ناکارآمد هستند، همچنین معکوس سازی مستقیم ماتریس (روش مستقیم) برای مسائل واقعی عملاً غیر ممکن است. به جای اینکه ماتریس جاکوبی را در هر گام زمانی به طور مستقیم معکوس کنیم، سیستم خطی حاصل از معادله (۴) را می توان در هر گام زمانی به طور تقریبی با استفاده از روشهای تکراری حل کرد. این روشها نیز دارای دسته بندیهای مختلفی هستند که مهمترین آنها رویکردی موسوم به کريلوف می باشد. طبق این روش برای به روز رسانی جوابها از اطلاعات تولید شده در تکرار قبل استفاده می شود. این روش نیز دارای ویرایش های متفاوتی است، اما برای کاربرد های دینامیک سیالات محاسباتی عمدتاً از رویکردی به نام GMRES [۲] استفاده می شود. در این مقاله نیز برای حل دستگاه معادلات خطی از همین روش استفاده شده است. طبق این روش اگر دستگاه معادلات خطی (۵) را داشته باشیم

$$Ax = b \quad (5)$$

جوابها طبق الگوی (۶) به روز رسانی می شوند

$$x_k = x_0 + y_k \quad (6)$$

که در آن x_0 حدس اولیه و y_k بهترین تصحیح ممکن در فضای کريلوف $K_m = \text{span}[r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{k-1}r_0]$ می باشند که باقیماندهها را به کمترین مقدار خود می رسانند

$$\|r_k\| = \min_y \|r_0 + Ay\| \quad (7)$$

که در آن $r_0 = A_{x0} - b$ نشان دهنده باقیمانده اولیه است. بنابراین هر چه تعداد تکرارها افزایش پیدا کند، فضای کريلوف بزرگتر شده و جوابهای جدید به نتیجه نهایی نزدیکتر می شوند. در حقیقت، روش GMRES برای یک مسئله با n متغیر دقیقاً در n مرحله همگرا می شود.

روش دیگری برای افزایش سرعت همگرایی استفاده از پیش شرطها می باشد. پیش شرط سازی در واقع استفاده از یک نوع تغییر و تحول برای انتقال به سیستم اصلی است که طرح مورد نظر را برای استفاده در حل های عددی مناسب تر می کند [۳]. این موضوع معمولاً با کاهش تعداد شرطهای مسئله اصلی به وقوع می پیوندد. در زمینه محاسبات عددی، تعداد شرط های یک تابع، میزان تغییر خروجی یک تابع را نسبت به ایجاد اغتشاش در ورودی آن تعیین می کنند. پیش شرطها به عنوان یک حل کننده شناخته نمی شوند و فقط به منظور کاهش زمان همگرایی حل کنندههای خطی استفاده میشوند [۴]. در این تحقیق، چهار نوع روش پیش شرط گذاری مختلف جهت کمک به همگرایی دستگاه معادلات خطی و در نتیجه بالا بردن کارایی روش چند شبکه مورد بررسی قرار گرفته اند و در نهایت یکی از آنها به عنوان رویکرد بهینه برای انجام محاسبات انتخاب شده است. به دلیل جلوگیری از طولانی شدن مطلب، توضیحات مربوط به این چهار رویکرد به طور مختصر آورده شده و منابعی جهت مطالعه چگونگی اعمال آنها معرفی شده است. ایده اصلی در این روشها، جایگزینی معادله خطی (۵) با سیستم شرط گذاری شده زیر می باشد

$$PAx = Pb \quad (8)$$

که در آن P ماتریس پیش شرط نامیده می شود و مقدار A^{-1} را تقریب می زند و تعداد شرط های کمتری نسبت به ماتریس ضرائب دارد. روش های مختلفی که بر اساس این ایده بوجود آمده اند در انتخاب ماتریس P با یکدیگر اختلاف دارند. واضح است که ساده ترین انتخاب برای ماتریس پیش شرط خود A^{-1} می باشد که طبیعتاً محاسبه آن هزینه بالایی دارد. در ادامه چهار انتخاب مختلف برای P که منجر به تولید چهار روش استفاده شده در این تحقیق می باشند شرح داده می شوند.

الف) روش Jacobi: در این حالت قطر ماتریس ضرائب به عنوان ماتریس P انتخاب می شود ($P = \text{diag}(A)$) و در عمل یکی از ساده ترین روش ها در تعیین این ماتریس می باشد.

ب) روش Linelet: ایده اصلی این روش بر اساس رسم خطوط در جهت عمود بر کشش شبکه، پایه ریزی شده است [۵]. در این حالت ماتریس P از ترکیب اعضای قطری ماتریس ضرائب به همراه اعضای غیر قطری ردیفهایی که به خطوط ترسیم شده تعلق دارند، تشکیل می شود. اگر شماره گذاریها به درستی انجام شوند یک ماتریس سه قطری پدید می آید و سیستم معادلات پیش شرط شده می تواند به طور مستقیم با الگوریتم توماس معکوس شود. توجه شود در این روش، در مناطقی که خطوط توضیح داده شده رسم نشده اند از روش جاکوبی استفاده می شود.

ج) روش ILU^1 : این روش مکرراً در زمینه دینامیک سیالات محاسباتی استفاده شده است [۶]. این گروه از پیش شرطها از جداسازی ناقص ماتریس جاکوبی به روش LU (دو ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی) به وجود آمده‌اند. این جداسازی از آن جهت ناقص خوانده می‌شود که در طول این فرایند هر عضوی که خارج از حد غیر صفر از پیش تعیین شده، قرار گیرد بیرون از بازه حل قرار می‌گیرد. رایج ترین نوع جداسازی در این روش $ILU(0)$ می باشد که الگوی غیر صفر ماتریس جاکوبی را حفظ می کند. البته ویرایش‌های دیگری از این روش که به نحوی دیگر کار جداسازی $ILU(n) (n>0)$ را انجام می دهند نیز استفاده شده‌اند [۷] اما ما در این تحقیق به دلیل راحت تر بودن پیاده سازی روش $ILU(0)$ ، از آن استفاده می‌کنیم.

د) روش $LU-SGS^2$: این روش که در زمینه محاسبات عددی کاربردهای فراوانی دارد برای اولین بار توسط ناکاهاشی و همکاران [۸] بر روی شبکه نامنظم پیاده سازی شد. محاسبه و ذخیره سازی ماتریس جاکوبی در فرمول‌بندی این روش می تواند با در نظر گرفتن برخی از تقریبات در حلگر ضمنی به طور کامل حذف شود [۹]. این برتری روش مذکور را برای استفاده در مسائل غیر خطی در ابعاد بزرگ بسیار کارآمد می‌کند.

حل ضمنی معادلات خطی بر روی شبکه‌های نامنظم دارای پیچیدگی‌های فراوانی است چرا که در این حالت بر خلاف شبکه های منظم نمی‌توان از روش‌های معمول تکراری استفاده کرد. از آنجایی که معکوس سازی مستقیم ماتریس برای مسائل واقعی و حل کننده‌های جریان که از روش های گرادیان مزدوج^۳ استفاده می کنند دارای مشکلات متنوعی است معمولاً از روش های جایگزین مانند گاوس سایدل و ILU استفاده می‌شود. اگر چه این روش‌های جایگزین، به سرعت خطاهای محلی با فرکانس بالا را برطرف می کنند اما خطاهای کلی تر با فرکانس پایین را فقط با نرخی که با اندازه شبکه رابطه عکس دارد کاهش می دهند. این امر موجب می شود زمانی که فضای حل وسعت بالایی دارد حل کننده جریان دچار افت شدید شود و نرخ کاهش باقیمانده‌ها به شدت تقلیل پیدا کند.

با توجه به مطالب بیان شده بهترین راه کار جهت افزایش سرعت همگرایی معادلات غیر خطی استفاده از الگوریتم چند شبکه است. طبق این روش، مولفه‌های خطا با فرکانس بالا و پایین به ترتیب با فرایند هموار سازی و انتقال جواب به شبکه درشت تر از بین می‌روند. توضیحات کامل روش مذکور در بخش بعد ارائه می‌گردد.

در دهه شصت میلادی فدریکو [۱۱، ۱۰] اولین طرح شبکه‌های چندگانه را برای معادلات پویزن ارائه داد و پس از او بخوالو [۱۲] تحقیقاتی را در این مورد شروع کرد. بخوالو بر خلاف فدریکو که تحقیق در مورد نرخ همگرایی را فقط به مسائل گسسته مقدار مرزی مرتبه دو با ضرایب متغیر، محدود کرده بود، امکان ترکیب روش های تکرار لانه با روش چند شبکه را نیز مطرح کرد. کاربرد اصلی روش چند شبکه پس از انتشار مطالعات مربوط به برنت [۱۳] و هکباش [۱۴] مورد توجه قرار گرفت. از دهه هشتاد میلادی به بعد این روش توجه

محققان بسیاری را به خود جلب کرد به گونه ای که دو کنفرانس اختصاصی در اروپا^۴ و آمریکا^۵ صرفاً برای بررسی روش‌های چند شبکه شروع به کار کرده و هنوز هم ادامه دارند. در سالیان اخیر نیز محققین از این روش برای کاهش زمان محاسباتی استفاده کرده‌اند. کاگی و جیمسون [۱۵] روش چند شبکه را با استفاده از یک الگوریتم ضمنی بر روی معادلات ناویر استوکس در حالت دو بعدی پیاده سازی کردند. آنها در پژوهش خود از دو روش پیش شرط گذاری جهت هموار سازی معادلات بهره جستند. رضائی و همکاران [۱۶] این روش را بر روی معادله اولر سه بعدی پیاده سازی کرده و ترکیب آن را با روش های صریح و ضمنی مقایسه کردند. آنها نشان دادند که روش چند شبکه در ترکیب با روش های ضمنی نتایج بهتری ارائه می‌دهد. یانگ و همکاران [۱۷] نیز جریان اطراف پره‌های هلیکوپتر را بر مبنای معادلات ناویر استوکس بررسی کرده و از روش چند شبکه برای افزایش نرخ همگرایی استفاده کردند و در نهایت کاهش شدید تعداد تکرارهای مورد نیاز جهت حداقل نمودن باقیمانده ها را گزارش دادند.

با توجه به دانش نگارنده در هیچکدام از پژوهش هایی که تاکنون انجام گرفته است، اثر ترکیب چهار روش پیش شرط گذاری مختلف با روش چند شبکه و همچنین در قیاس با یکدیگر ارائه نشده است. همچنین در ادامه علاوه بر بررسی جامع روش چند شبکه در برخورد با معادلات مختلف جریان، مقایسه ای هم بین دو رویکرد مختلف در جابجایی بین شبکه ها صورت پذیرفته است که به نوع خود دارای نوآوری بوده، چرا که در اکثر مقالات تنها از یک روش استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم بر جریان

در این پژوهش معادلات کامل ناویر استوکس به عنوان معادلات حاکم بر جریان انتخاب شده‌اند. این معادلات را می توان در حالت تراکم پذیر به صورت زیر نوشت

$$\partial_t U + \nabla \cdot \vec{F}^c - \nabla \cdot \vec{F}^v = Q \quad (9)$$

که در آن $U = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \rho E)^T$ بردار متغیرهای بقا، ρ چگالی، E انرژی کل بر واحد حجم، $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ بردار سرعت جریان و Q جمله چشمه هستند که در اینجا مقدار آن برابر صفر است.

شار جابجایی و لزجت نیز به صورت زیر نوشته می شوند

$$\vec{F}_i^c = \begin{bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i v_1 + P \delta_{i1} \\ \rho v_i v_2 + P \delta_{i2} \\ \rho v_i v_3 + P \delta_{i3} \\ \rho v_i H \end{bmatrix}, \vec{F}_i^v = \begin{bmatrix} \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \\ v_j \tau_{ij} + \mu_{tot} C_p \partial_i T \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن P فشار استاتیکی، H انتالپی سیال، δ_{ij} تابع کرونوکر دلتا، C_p گرمای ویژه در فشار ثابت، T دما و R ثابت گازها هستند. تنش های لزج نیز به صورت معادله (۱۱) نوشته می شوند

$$\tau_{ij} = \mu_{tot} \left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{v} \right) \quad (11)$$

با توجه به رویکرد استاندارد مدل سازی جریان مغشوش، بر اساس فرضیه بوزینسک، تاثیر اغتشاش می تواند به صورت افزایش لزجت خود را نشان دهد، بنابراین لزجت کل به دو بخش آرام (μ_{dyn}) و مغشوش

¹ Incomplete Lower Upper

² Lower Upper Symmetric Gauss Seidel

³ Conjugate Gradient

⁴ European Multigrid Conference

⁵ Copper Mountain Conference

(μ_{tur}) تقسیم بندی شده است

$$\mu_{tot} = \mu_{dyn} + \mu_{tur} \quad (12)$$

در این تحقیق لزجت دینامیکی (آرام) فقط تابعی از دما در نظر گرفته شده و بوسیله قانون ساترلند [۱۸] محاسبه می شود. همچنین برای تعیین لزجت مغشوش از مدل اسپالارت - آلماراس [۱۹] استفاده شده است. معادلات جریان لایه‌ای و غیر لزج نیز به ترتیب با حذف مدل اغتشاشی و جملات لزجت از معادلات بیان شده قابل بازیابی هستند.

۳- توصیف روش چند شبکه

روش‌های چند شبکه با کمک ساخت دنباله ای از شبکه های درشت تر خطاهای کلی با فرکانس پایین را پوشش می‌دهند. این روش‌ها بر این اساس استوار هستند که خطاهای کلی موجود در یک شبکه بندی با ابعاد کوچک بر روی یک طرح شبکه ای درشت تر همان خواص خطاهای محلی را خواهند داشت. چرا که در این حالت به طور کلی تعداد المان کمتری وجود دارد و تصحیحات حوزه حل با سرعت بیشتری بین سلول‌ها انجام می گیرد. از آنجایی که در حین استفاده از شبکه های درشت تر هزینه محاسباتی به طور نمایی کاهش می‌یابد فرایند از بین رفتن خطاهای کلی طبق این روش بسیار کارآمد خواهد بود و هزینه محاسباتی و نرخ همگرایی را به شدت کاهش می دهد.

در این تحقیق از الگوریتم چند شبکه هندسی [۲۰] استفاده شده است. طبق این روش سلسله مراتبی از شبکه بندی های درشت تر ساخته شده و معادلات حاکم بر روی تمام این شبکه ها به طور جداگانه گسسته سازی و حل می‌شود. این روش برای حل مسائل غیر خطی مناسب تر است، چرا که در این حالت مشخصه های غیر خطی سیستم به وسیله شبکه‌های درشت تر پوشش داده می شوند. چگونگی پیاده سازی این روش در این قسمت توضیح داده می‌شود. مسئله غیر خطی (۱۳) را در نظر بگیرید:

$$L_h(u_h) = f_h \quad (13)$$

زیر نویس (h) نشان دهنده گسسته سازی این معادله پیوسته بر روی شبکه ای با اندازه h می باشد. نقطه شروع برای حل این معادله غیر خطی انتخاب یک هموار کننده (Jacobi, GMRES, ...) مناسب است. پس از گذشت تعدادی تکرار (احتمالا فقط یک تکرار، به جای حل کامل معادله گسسته شده) جواب تقریبی $\bar{u}_h$ بر روی شبکه اولیه بدست می‌آید. از آنجایی که $\bar{u}_h$ معادله (۱۳) را به طور کامل ارضاء نمی کند از جایگذاری آن در معادله اصلی خواهیم داشت

$$L_h(\bar{u}_h) - f_h = r_h \quad (14)$$

که در آن r_h باقیمانده مربوط به جایگذاری جواب تقریبی در معادله اصلی است. با کم کردن معادلات (۱۳) و (۱۴) از یکدیگر عبارت زیر بدست می آید که بر روی شبکه درشت تر تقریب زده می شود

$$L_h(u_h) - L_h(\bar{u}_h) = -r_h \quad (15)$$

که در آن جواب دقیق u_h می تواند به صورت جواب تقریبی به علاوه تصحیح کننده c_h نوشته شود

$$L_h(\bar{u}_h + c_h) - L_h(\bar{u}_h) = -r_h \quad (16)$$

هدف ما در انتهای این محاسبات پیاده سازی معادله (۱۶) بر روی یک شبکه درشت تر به فاصله H است. برای این کار، دو عملگر

انحصاری معرفی می شوند. یکی I_h^H که باقیمانده ها را از شبکه ریز تا درشت میان یابی می کند و دیگری $\bar{I}_h^H$ که عمل میان یابی جواب ها را بین دو شبکه انجام می‌دهد. برای انتقال معادله (۱۶) به شبکه درشت تر کافیت از عملگرهای گفته شده استفاده شود

$$L_H(\bar{I}_h^H \bar{u}_h + c_h) - L_H(\bar{I}_h^H \bar{u}_h) = -\bar{I}_h^H r_h \quad (17)$$

معادله بدست آمده، معادله اصلی روش GMG می‌باشد. در این معادله، طبق تعریف، جواب تقریبی بر روی شبکه بندی درشت با $\bar{u}_H = \bar{I}_h^H \bar{u}_h + c_h$ نشان داده می‌شود و همچنین باقیمانده حل r_h به صورت $L_h(\bar{u}_h) - f_h$ نوشته می‌شود. در نهایت معادله (۱۸) برای شبکه درشت بدست می آید.

$$L_H(\bar{u}_H) = L_H(\bar{I}_h^H \bar{u}_h) - I_h^H(L_h(\bar{u}_h) - f_h) \quad (18)$$

این عبارت را می توان به صورت معادله (۱۹) ساده کرد

$$L_H(\bar{u}_H) = f_H + \tau_h^H \quad (19)$$

که در آن جمله چشمه بر روی شبکه های درشت میان یابی می شود $f_H = I_h^H f_h$ (محاسبه نمی شود)، و یک متغیر جدید به عنوان تصحیح کننده باقیمانده‌ها از شبکه ریز به درشت به صورت

$$\tau_h^H = L_H(\bar{I}_h^H \bar{u}_h) - I_h^H L_h(\bar{u}_h) \quad (20)$$

تعریف می گردد. لازم به ذکر است که، بدون جمله τ_h^H معادله مربوط به شبکه درشت همان سیستم معادلات اصلی ارائه شده بر روی این شبکه نشان می‌دهد. در گام بعد، جواب‌های شبکه کوچک تر باید به روز رسانی شوند. برای این منظور، تصحیح کننده شبکه درشت C_H

با استفاده از فرمول زیر بر روی شبکه ریز میان یابی می شود

$$\bar{u}_h^{new} = \bar{u}_h^{old} + I_h^H(\bar{u}_h^{new} - \bar{I}_h^H \bar{u}_h^{old}) \quad (21)$$

که در آن I_h^H یک عملگر طولی است که وظیفه میان یابی از شبکه بزرگ تر به کوچک تر را بر عهده دارد. توجه شود که در این قسمت به جای جواب‌ها، تصحیحات محاسبه شده، با میان یابی بین شبکه ها منتقل شدند. در توصیف ارائه شده از روش چند شبکه فقط دو سطح مختلف از شبکه مد نظر قرار گرفته شد اما در مسائل واقعی، الگوریتم بیان شده بر روی سلسله مراتبی از شبکه های درشت تر پیاده سازی می شود تا طیف کلی فرکانسهای ناشی از خطای عددی از بین بروند.

۴- ساخت شبکه های درشت تر

مهمترین مسئله در استفاده از روش GMG جهت افزایش سرعت همگرایی مربوط به چگونگی تولید سلسله مراتبی از شبکه‌های درشت تر می‌باشد. این موضوع به خصوص زمانی که تولید شبکه‌های درشت تر، بر مبنای یک طرح نامنظم مد نظر باشد بسیار حائز اهمیت خواهد بود.

در طول سالیان متمادی محققین روش های متنوعی را برای تولید شبکه های درشت تر ارائه داده‌اند. از روش‌هایی که تلاش در تکثیر خاصیت لانه ای شبکه های منظم می کنند [۲۱] تا روش‌هایی که اجازه تولید شبکه های دلخواه (مثلثی، غیر مثلثی) را می‌دهند. روش‌های مختلف از نظر اطمینان الگوریتم مورد استفاده با یکدیگر فرق دارند. در این تحقیق از روش انباشتگی جهت تولید شبکه‌های درشت تر استفاده شده است. این روش در ابتدا توسط لاملند [۲۲] برای طرح های بر پایه گره معرفی شد و سپس به طور جداگانه توسط اسمیت [۲۳] برای طرح های سلول محور گسترش پیدا کرد. این روش بر

اساس گسسته سازی با رویکرد حجم کنترل بنا شده است، بنابراین می تواند بر روی هر دو طرح به خوبی پیاده سازی شود. با توجه به اینکه برای مسائل با هندسه پیچیده ادغام سلولهایی که در یک راس با هم مشترک هستند مناسب تر است [۱۶] در پژوهش حاضر روش انباشتی بر اساس طرح سلول محور پیاده سازی شده است.

۵- چرخه

در روش چند شبکه نوع چرخه تعیین کننده زمان و چگونگی جابجایی بین شبکه ها است. رویکرد چرخه را می توان به دو گروه تقسیم بندی کرد: چرخه ثابت و چرخه انطباق پذیر. روش چرخه انطباق پذیر با نظارت بر فرایند همگرایی زمان انتقال را تعیین می کند. طبق این روش زمانی که خطاهای با فرکانس بالا از بین می روند، کاهش شدیدی در نرخ همگرایی مشاهده می شود در این هنگام پرش به شبکه درشت تر اتفاق می افتد. اگرچه استفاده از این روش ممکن است مطلوب تر به نظر برسد اما ملاحظات عملی مانند سادگی و اطمینان الگوریتم مورد استفاده ما را به سمت روش ثابت سوق می دهد. در این روش، یک الگوی ثابت برای جابجایی بین شبکه ها در نظر گرفته شده است بنابراین الگوریتم پس از تعداد مشخصی تکرار عملیات انتقال را انجام می دهد. دو تا از شناخته شده ترین الگوهای ثابت چرخه های V و W هستند.

چرخه V از شبکه اولیه شروع کرده و یک گام زمانی بر روی آن پیش می رود. پس از آن جواب ها و مقادیر باقیمانده بدست آمده بر روی شبکه درشت بعدی میان یابی می شوند، جایی که یک گام زمانی دیگر اعمال می شود. این عمل آنقدر ادامه پیدا می کند تا به درشت ترین شبکه قابل دسترس برسد. در این قسمت تصحیحات شبکه درشت پله پله بروی شبکه های طی شده اجرا می شود تا دوباره به شبکه اولیه برگردد. چرخه W دارای رویکرد بازگشتی است و شبکه های درشت تری نسبت به چرخه V ایجاد می کند. در این مقاله اثر استفاده از هر دو الگوریتم بر روی عملکرد روش چند شبکه بررسی می شود.

۶- نتایج

به منظور بررسی قابلیت های روش چند شبکه در پوشش خطاهای عددی و در نهایت افزایش نرخ همگرایی، رویکرد مذکور برای مسائل سه بعدی در جریان های مغشوش، لایه ای و غیر لزج بر روی شبکه نامنظم پیاده سازی شده است. در بخش اول اعتبار نتایج ارائه شده به وسیله مقایسه با داده های تجربی موجود، سنجیده می شود. سپس در بخش دوم به بررسی چهار رویکرد مختلف پیش شرط گذاری جهت تعیین روشی مناسب می پردازیم. در سه قسمت انتهایی نیز، ارزیابی روش چند شبکه در برخورد با جریان های مغشوش، لایه ای و غیر لزج صورت پذیرفته و همچنین الگوریتم های مختلف جابجایی بین شبکه ها (چرخه) بررسی شده اند.

۶-۱- اعتبار سنجی

از دو هندسه شناخته شده RAE2822 و ONERA M6 به ترتیب در جریان های دو و سه بعدی برای مقایسه نتایج عددی ارائه شده با

داده های تجربی استفاده شده است. شرایط جریان آزاد برای هر دو هندسه در جدول ۱ نشان داده شده است. این دو نمونه به دلیل شرایط کاری ویژه و عدد رینولدز بالا از پیچیدگی های خاصی (موج ضربه ای، تقابل لایه مرزی و موج و جدایش جریان) برخوردار هستند، به همین دلیل عمدتاً در اعتبارسنجی و پیاده سازی روش های جدید از آن ها استفاده می شود. البته در بخش های آتی، جهت یکسان سازی شرایط مقایسه تمام محاسبات بر مبنای هندسه ONERA M6 صورت پذیرفته است.

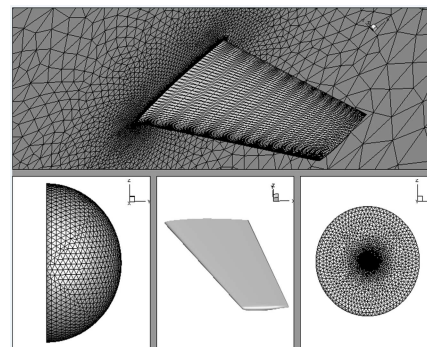
جدول ۱- شرایط محاسباتی RAE2822 و ONERA M6

مدل	عدد ماخ	عدد رینولدز	زاویه حمله
ONERAM6	۰.۸۳۹۵	$10^6 \times 117$	۳.۰۶
RAE 2822	۰.۷۲۹	$10^6 \times 65$	۲.۳۱

شبکه غیر منظم (با المانهای ترکیبی) اطراف بال ONERA M6 که شامل 220145 المان چهار وجهی، 107477 منشوری و 1431 هرمی می باشد همراه با هندسه اصلی در شکل ۲ نشان داده شده است. به دلیل وجود گرادیان های شدید در نزدیکی سطح بال و حفظ خواص لایه مرزی، فاصله اولین شبکه تا سطح در محدوده $1 < y^+ < 10$ قرار داده شده است. سطح بال با استفاده از شرط مرزی عدم لغزش از سایر حوزه محاسباتی جدا شده است. از شرط مرزی تقارن نیز در صفحه ریشه بال، به منظور منعکس کردن خواص جریان در صفحه $x-z$ و تولید نتایج بر مبنای یک بال کامل استفاده شده است. همچنین شرط مرزی دور دست بر روی سطح کروی (سطح خارجی) اعمال شده است.

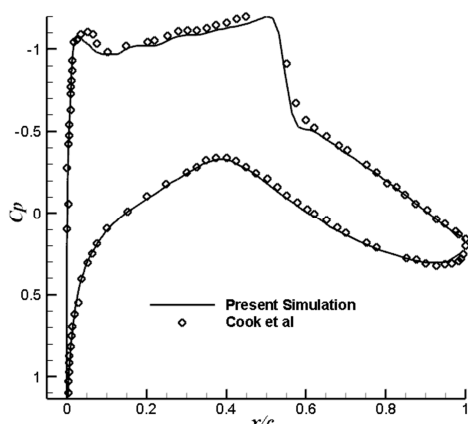
در شکل ۳ ضریب فشار بر روی سطح بال در سه مقطع مختلف $\frac{y}{b} = 0.2, 0.65, 0.85$ (ب طول بال) نشان داده شده است. به طور کلی، نتایج محاسبه شده با داده های آزمایشگاهی ارائه شده توسط اشمیت و همکاران [۲۴] همخوانی بسیار خوبی دارد. البته تقریباً در هر سه حالت مقداری اختلاف با داده های آزمایشگاهی بر روی قسمت فوقانی سطح بال مشاهده می شود که به دلیل استفاده از شبکه ای بسیار سبک (کمتر از 100000 گره) جهت پوشش ناحیه محاسباتی است. با این وجود امواج ضربه ای تشکیل شده بر روی بال به خوبی در نتایج عددی شبیه سازی شده اند (هر چه به سمت انتهایی بال حرکت کنیم از شدت این موج کاسته می شود).

همچنین برای ایرفویل RAE2822 مقایسه ای بین نتایج بدست آمده و داده های تجربی ارائه شده توسط کوک و همکاران [۲۵] انجام شده است. در این حالت از یک شبکه O شکل با 23000 سلول محاسباتی استفاده شده است. حوزه جریان توسط المان های ترکیبی پوشش داده شده اند و به دلیل بالا بودن عدد ماخ در این حالت نزدیک سطح ایرفویل از شبکه چهارگوش با دقت بالا استفاده شده است. ضریب فشار بدست آمده بر روی سطح بالا و پایین ایرفویل توسط حل عددی با نتایج تجربی در شکل ۴ مقایسه شده اند. همانطور که مشاهده می شود نتایج در تمام نقاط به خوبی بر یکدیگر منطبق هستند و فقط در ناحیه تشکیل موج ضربه ای اختلاف کوچکی دیده می شود. لازم به ذکر است که از شرایط محاسباتی و شبکه استفاده شده در این بخش برای سایر قسمت ها نیز استفاده شده است.



شکل ۲- سه نما از شبکه استفاده شده برای هندسه ONERA M6 به

همراه هندسه اصلی بال



شکل ۴- ضریب فشار بر روی سطح RAE2822، مقایسه نتایج حاضر با داده های تجربی

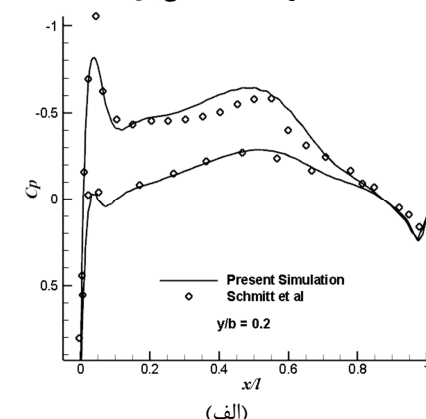
در ادامه اثر استفاده از روش چند شبکه همراه با پیش شرط بر نرخ و سرعت همگرایی معادلات مختلف بررسی شده است. از آنجایی که یکی از مهمترین پارامترهای مورد بررسی در شبیه سازی های عددی زمان صرف شده جهت انجام محاسبات می باشد، تمام نتایج ارائه شده در این پژوهش بر روی یک سیستم سخت افزاری واحد تولید شده اند. جدول ۲ مشخصات رایانه پردازش گر استفاده شده برای شبیه سازی حاضر را نشان می دهد.

جدول ۲- مشخصات سیستم محاسباتی

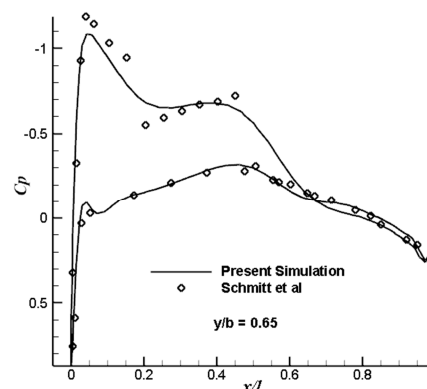
مشخصات	سخت افزار
Intel Core i5 – 2410M 2.9GHz	پردازش گر
4 GB	حافظه

۲-۶- بررسی روش های پیش شرط گذاری

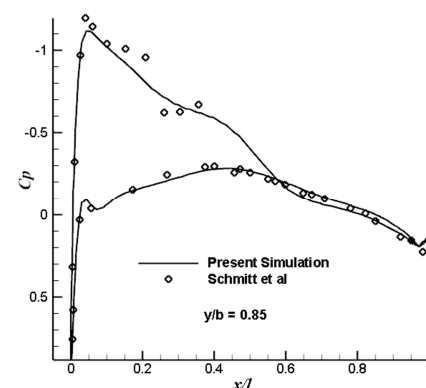
در هنگام حل دستگاه معادلات خطی به روش GMRES استفاده از روشی مناسب برای اعمال پیش شرط در ماتریس جاکوبی بسیار حائز اهمیت است. در اینجا از چهار روش مختلف $ILU0$, $Linlet$, $Jacobi$ و $LU-SGS$ جهت پیش شرط گذاری برای حل معادلات تراکم پذیر مغشوش در اطراف هندسه ONERA M6 استفاده شده است. روش های مختلف پیش شرط گذاری تأثیری بر نتیجه نهایی نداشته و فقط در روند حل دستگاه معادلات خطی اثر گذار هستند. بنابراین بهترین پارامتر جهت مقایسه روش های مذکور، تعداد تکرار دستگاه معادلات خطی برای رسیدن به حد همگرایی و همچنین زمان طی شده جهت همگرایی می باشد. در شکل ۵ تعداد تکرار روش GMRES برای حل دستگاه معادلات خطی به ازای حد همگرایی 10^{-6} نسبت به یک گام زمانی (یکبار تکرار غیر خطی) نشان داده شده است. همچنین زمان سپری شده جهت همگرایی برای روش های مذکور نیز در جدول ۳ آورده شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳- ضریب فشار بر روی سطح ONERA M6 در سه مقطع مختلف

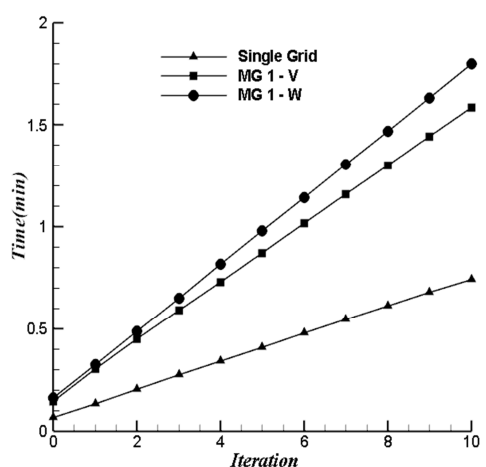
در طول بال (الف) $y/b = 0.2$ ، (ب) $y/b = 0.65$ ، (ج) $y/b = 0.85$ ، مقایسه نتایج حاضر با داده های تجربی

۳-۶- جریان مغشوش

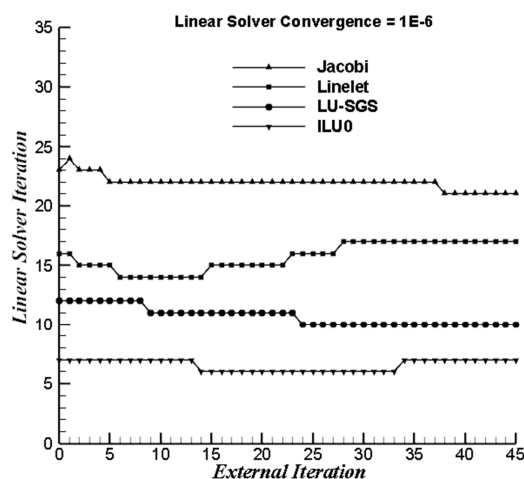
به عنوان اولین نمونه، کارایی روش چند شبکه در جریان مغشوش مورد تحلیل و ارزیابی قرار می‌گیرد. توجه به این نکته حائز اهمیت است که، نشان دادن تغییرات ایجاد شده در نرخ همگرایی به تنهایی قابل اعتنا نیست چرا که استفاده از روش چند شبکه به دلیل فرایند رفت و برگشتی که بین شبکه‌های مختلف جهت هموار کردن خطاها انجام می‌دهد موجب افزایش بار محاسباتی در هر تکرار می‌شود. با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌شود که زمان صرف شده بین هر دو تکرار (فقط ۱۰ تکرار اول نشان داده شده‌اند) در حین استفاده از روش چند شبکه (هر دو چرخه W و V) تقریباً $2/5$ برابر وقتی است که مسئله فقط بر روی شبکه اولیه حل می‌شود. بنابراین در هر بخش مدت زمان کل همگرایی نیز به عنوان یکی از نتایج مهم جهت مقایسه آورده شده است.

شکل ۷ نتایج مربوط به تعداد تکرارها و مدت زمان همگرایی معادلات را نشان می‌دهد. در بخش‌های دیگر نیز مشابه همین شکل دو قسمتی جهت ارائه داده‌ها استفاده شده است. لازم به ذکر است که در اشکال عبارت $MG \#$ به معنی استفاده از $\#$ سطح از شبکه‌های درشت تر نسبت به شبکه اولیه می‌باشد.

با توجه به نمودار (الف) در شکل ۷ مشاهده می‌شود که، استفاده از یک سطح شبکه درشت تر با چرخه V موجب کاهش 55% تعداد تکرارها تا رسیدن به حد همگرایی یکسان شده است. همچنین در ادامه مشاهده می‌شود که اگر فرایند جابجایی بین همین یک شبکه و شبکه اصلی را با استفاده از الگوریتم W طی کنیم 15% دیگر از تعداد تکرارها کم خواهد شد، اما استفاده از این الگوریتم طبق نمودار (ب) شکل ۷ کمی طولانی تر خواهد بود که اختلاف قابل توجهی نیست. بهترین حالت در بین موارد بررسی شده در جریان مغشوش مربوط به نمونه $MG3 - W$ می‌باشد، که توانسته است تعداد تکرارها را تا 81% نسبت به حالت اولیه کاهش دهد. همچنین زمان همگرایی نیز در این حالت به مقدار حداقل خود رسیده و در حدود نصف حالت اولیه (تک شبکه) می‌باشد.



شکل ۶- زمان صرف شده برای ۱۰ تکرار اول در جریان مغشوش



شکل ۵- مقایسه روش‌های پیش شرط گذاری مختلف در حد همگرایی 10^{-6}

با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که، با استفاده از روش Jacobi دستگاه معادلات خطی نیاز به تکرار بیشتری تا رسیدن به حد همگرایی دارد. با این وجود طبق جدول ۳، مدت زمان همگرایی حل گر خطی در یک گام زمانی برای این روش کمتر از سایر روش‌ها است که علت آن سادگی فرایند پیاده سازی روش Jacobi است، چرا که با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش مقدمه روش مذکور، برای تشکیل ماتریس پیش شرط فقط از اعضای قطری ماتریس ضرائب استفاده می‌کند. البته هر چقدر ابعاد دستگاه معادلات خطی بزرگ تر شود استفاده از این روش هزینه بیشتری خواهد داشت بنابراین بهتر است از روش‌هایی استفاده شود که تعداد تکرار کمتری دارند.

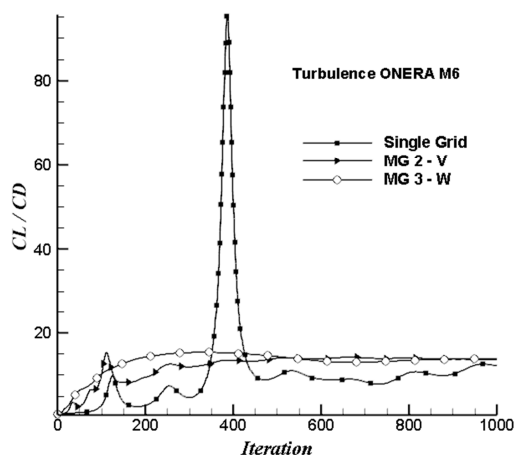
از بین روش‌های بررسی شده دو رویکرد ILU0 و LU-SGS دارای بیشترین بازده از لحاظ تعداد تکرار هستند. اما زمان صرف شده جهت همگرایی برای روش ILU0 تقریباً دو برابر روش LU-SGS می‌باشد. طبیعتاً زمانی که تعداد تکرارها بالا باشد استفاده از روش ILU0 بسیار کم هزینه تر خواهد بود. بنابراین در ادامه این تحقیق از این روش جهت پیش شرط گذاری استفاده می‌شود.

جدول ۳- مدت زمان صرف شده جهت همگرایی حل گر خطی تا حد همگرایی 10^{-6} به ازای استفاده از پیش شرط‌های متفاوت

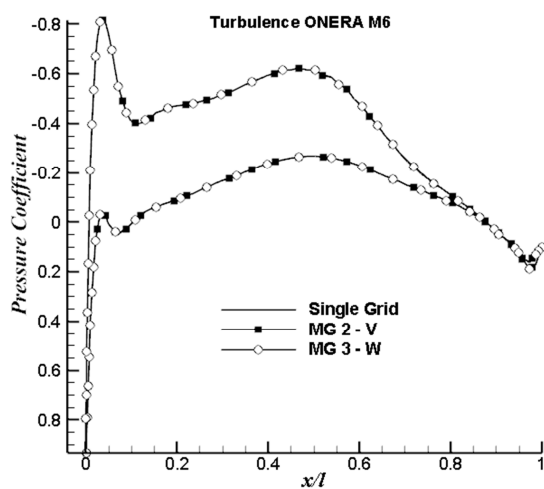
روش	زمان تا همگرایی (ثانیه)
Jacobi	۲۲۵
Linlet	۲۶۸
LU-SGS	۲۳۸
ILU0	۴۴۰

از آنجایی که یکی از اهداف این تحقیق بررسی عملکرد روش چند شبکه همراه با پیش شرط، در برخورد با معادلات مختلف جریان می‌باشد، روش مذکور بر روی سه دسته جریان مغشوش، لایه‌ای و غیر لزج پیاده سازی شده است. به منظور بالا بردن دقت این مقایسه برای هر سه معادله از هندسه (ONERA M6) و جریان (جدول ۱) یکسان استفاده شده و فقط شبکه بندی در حالت غیر لزج با دو مورد قبل فرق دارد که در بخش مخصوص به خود توضیح داده می‌شود.

محاسبات می‌باشد، بیانگر کاربرد بالای روش چند شبکه برای این دسته از معادلات است. با توجه به نتایج در بهترین حالت، با ایجاد دو سطح مختلف از شبکه های درشت تر و استفاده از الگوریتم W تنها ۲۰٪ حالت اولیه تکرار برای رسیدن به حد همگرایی مطلوب نیاز است. همانطور که در نمودار (ب) این شکل مشاهده می شود زمان محاسبات نیز ۳۴٪ کاهش پیدا کرده است.

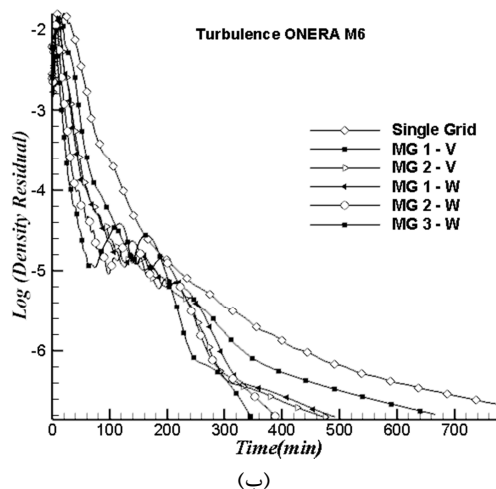
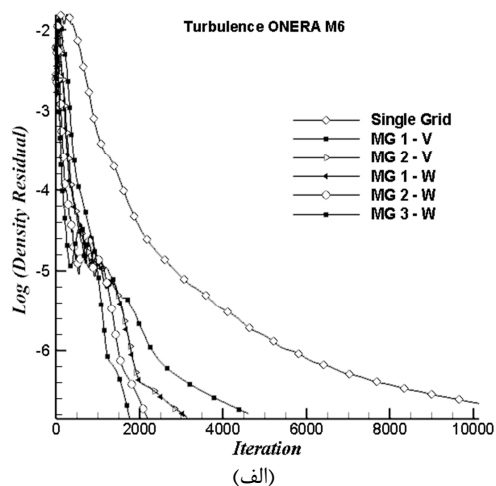


شکل ۸- تغییرات ضریب برا بر پسا در فرایند حل جریان مغشوش



شکل ۹- تاثیر استفاده از روش چند شبکه بر نتایج عددی (ضریب فشار)

لازم به ذکر است که در این حالت اضافه کردن یک مرحله به تعداد سطوح شبکه علاوه بر اینکه تغییری در تعداد تکرارها نسبت به سطح ۲ ایجاد نمی کند، زمان همگرایی را نیز افزایش می دهد، چرا که سیستم معادلات مربوط به هر شبکه توسط گسسته سازی بدست آمده که شامل محاسبه شارها و تشکیل ماتریس جاکوبی هم می شود، بنابراین هزینه محاسباتی با افزایش تعداد سطوح شبکه افزایش می یابد (با درشت کردن شبکه تا سطح دو، این افزایش بار محاسباتی کمتر از افزایش نرخ همگرایی است). همچنین افزایش تعداد سطوح از مرحله سه به بعد به دلیل افزایش خطاهای گسسته سازی و خطاهای ناشی از انتقال داده ها بین سلول ها موجب واگرا شدن فرایند حل می شود. تغییرات ضریب پسا بر روی بال، برای جریان لایه‌ای در شکل ۱۱



شکل ۷- نرخ همگرایی در جریان مغشوش به ازای استفاده از شبکه های مختلف بر حسب تعداد تکرارها (الف) و زمان محاسبات (ب)

در شکل ۸ نیز تغییرات ضریب برا بر پسا در طول فرایند حل نشان داده شده است. برای جلوگیری از شلوغ و ناخوانا شدن شکل فقط حالت‌های بهینه روش چند شبکه به همراه حالت تک شبکه نشان داده شده‌اند. با توجه به این شکل مشاهده می شود استفاده از روش چند شبکه نوسانات حل را با سرعت بالایی کاهش داده و جواب را به سمت حالت پایا پیش می برد.

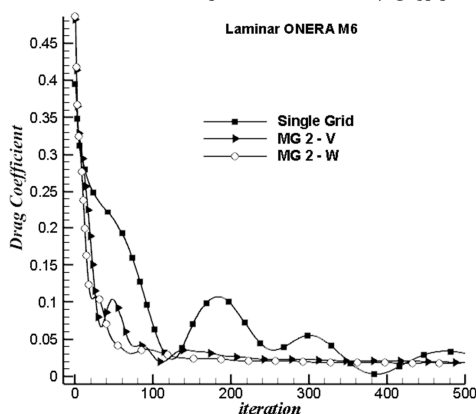
تاثیر استفاده از روش چند شبکه بر تغییرات ضریب فشار بر روی سطح بال در مقطع $y/b = 0.2$ در شکل ۹ نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که استفاده از روش چند شبکه همراه با پیش شرط مناسب هیچ تغییری در نتایج ایجاد نمی‌کند و با توجه به اینکه رویکرد تک شبکه در قسمت اعتبارسنجی با داده های تجربی تطبیق داده شده است، این عدم تغییر به نحوی درستی الگوریتم پیاده سازی شده را نیز اثبات می کند.

۴-۶- جریان لایه‌ای

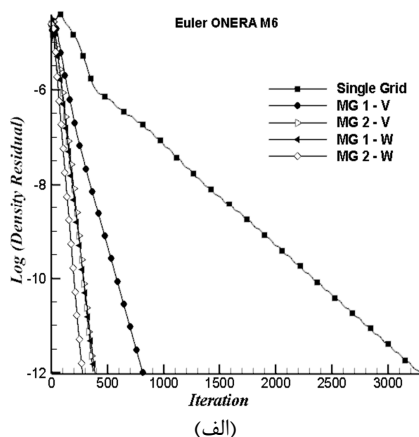
همانطور که در قسمت های گذشته بیان شد معادلات جریان های لایه‌ای و غیر لزج، همانند جریان مغشوش، بر روی هندسه ONER M6 پیاده سازی شده‌اند. شکل ۱۰ که نشان دهنده تعداد تکرارهای مورد نیاز جهت حل کامل معادلات جریان لایه‌ای و زمان انجام

۷- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله، اثر استفاده از روش چند شبکه همراه با پیش شرط بر سرعت همگرایی معادلات تراکم پذیر بر روی شبکه نامنظم سه بعدی به طور کامل بررسی شد. روش مذکور توانست با موفقیت بسیار بالایی نرخ همگرایی معادلات حاکم بر جریان های مغشوش، آرام و غیر لزج را کاهش دهد. با توجه به بررسی های انجام گرفته روش LU-SGS به عنوان بهترین مکمل برای حل دستگاه معادلات خطی انتخاب شد. نتایج مربوط به بهترین طرح استفاده شده برای هر سه معادله به صورت یکجا در جدول ۴ آورده شده اند. با توجه به نتایج بهترین انتخاب برای جابجایی اطلاعات بین شبکه ها، برای هر سه معادله، استفاده از الگوریتم W می باشد. همچنین دریافت می شود که پیاده سازی روش چند شبکه بر روی معادلات غیر لزج بازده بالاتری نسبت به سایر معادلات داشته است. در تمام موارد بررسی شده، نهایتاً تا سه مرحله امکان ساخت شبکه درشت تر وجود داشت، پیش روی بیشتر موجب افزایش شدید تعداد تکرارها شده و یا در بهترین حالت نتایج بدون تغییر باقی می ماند. چرا که اگر دستگاه معادلات بر روی درشت ترین شبکه به خوبی و با دقت بالا حل نشود، خطاهای با فرکانس پایین از بین نرفته و به شبکه اصلی منتقل می شوند بنابراین در این حالت تعداد تکرار بیشتری حتی نسبت به حالت تک شبکه نیاز است تا معادلات به حد همگرایی مطلوب برسند. همچنین باز به ذکر است که هر چقدر شبکه پایه ابعاد کوچکتری داشته باشد می توان از سطوح بیشتری در روش چند شبکه استفاده کرد.



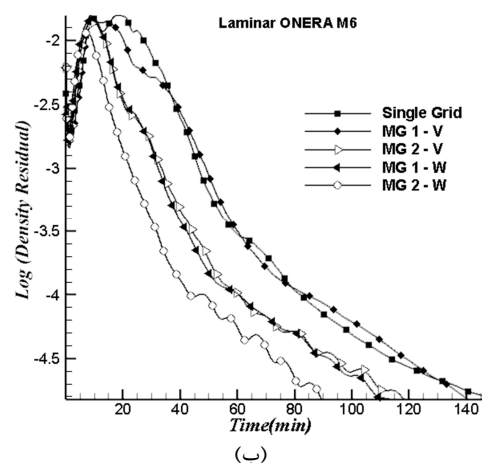
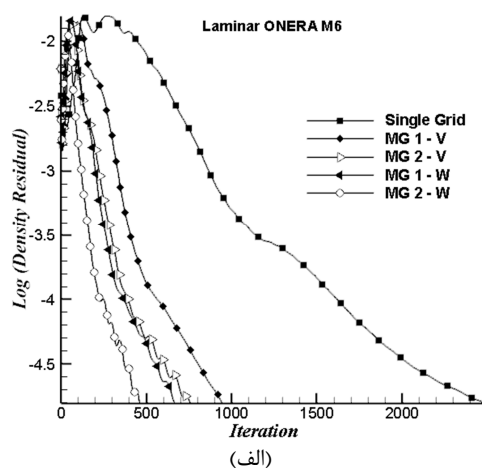
شکل ۱۱- تغییرات ضریب پسا در فرایند حل جریان لایه ای



نشان داده شده است. مشاهده می شود که در صورت انجام محاسبات بر روی یک شبکه (شبکه اصلی) فرایند حل به شکل نوسانی به سمت همگرایی پیش می رود. برای جبران این رفتار نوسانی باید تعداد تکرار بیشتری تا رسیدن به حد همگرایی انجام شود. روش چند شبکه با انتقال خطاهایی با فرکانس پایین به شبکه های درشت تر، مانع از به وجود آمدن نوسان در فرایند حل معادلات شده و تعداد تکرارها را تا حد زیادی کاهش می دهد. طبق شکل مشاهده می شود که با جابجایی جواب ها ما بین سه شبکه (MG 2) طبق الگوریتم W ، در هر تکرار، نوسانات حل تقریباً به طور کامل برطرف شده اند.

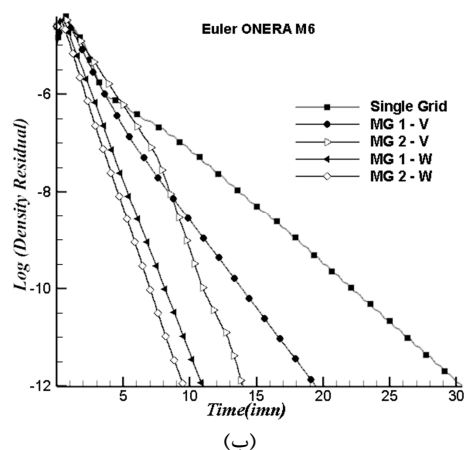
۵-۶- جریان غیر لزج

در این حالت از شبکه ای با حجم کمتر که از ۱۴۰۰۰۰ المان چهار ضلعی تشکیل شده، استفاده شده است. با پیاده سازی روش چند شبکه بر روی معادلات جریان غیر لزج، همانند بخش های قبلی، شاهد افزایش شدید در نرخ همگرایی هستیم. با توجه به شکل ۱۲ تعداد تکرارها و زمان همگرایی معادلات اولیور با استفاده از روش چند شبکه به ترتیب ۹۱٪ و ۶۹٪ کاهش پیدا کرده اند. در شکل ۱۳ تغییرات ضریب حاصل از حل این نمونه نشان داده شده است. در اینجا نیز از بین رفتن نوسانات حل به خوبی قابل رویت است.

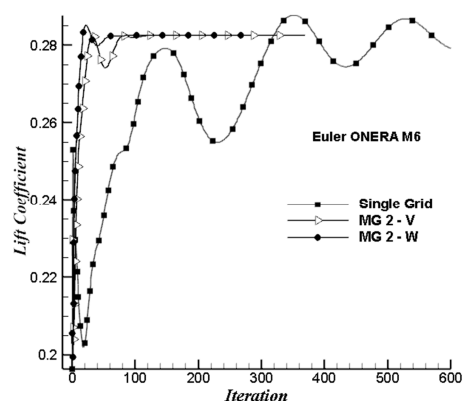


شکل ۱۰- نرخ همگرایی در جریان لایه ای به ازای استفاده از شبکه های مختلف بر حسب تعداد تکرارها (الف) و زمان محاسبات (ب)

- [6] Venkatakrishnan V., Mavriplis D. J., Implicit solvers for unstructured meshes, *Journal of computational Physics*, Vol. 105, No. 1, pp. 83-91, 1993.
- [7] Puyero A., Zingg D., An efficient Newton-GMRES solver for aerodynamic computations, In *AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 13 th, Snowmass Village, CO, pp. 712-721, 1997.
- [8] Sharov D., Nakahashi K., Low speed preconditioning and LUSGS scheme for 3D viscous flow computations on unstructured grids, AIAA paper, 614, 1998.
- [9] Kou J., Li Y., A uniparametric LU-SGS method for systems of nonlinear equations, *Applied mathematics and computation*, Vol. 189, No. 1, pp. 235-240, 2007.
- [10] Fedorenko R. P., A relaxation method for solving elliptic difference equations, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 1, No. 4, pp. 1092-1096, 1962.
- [11] Fedorenko R. P., The speed of convergence of one iterative process, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 4, No. 3, pp. 227-235, 1964.
- [12] Bakhvalov N. S., On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 6, No. 5, pp. 101-135, 1966.
- [13] Brandt A., Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems, In *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, pp. 82-89. Springer Berlin Heidelberg, 1973.
- [14] Hackbusch W., A multi-grid method applied to a boundary problem with variable coefficients in a rectangle, *Institut Fur Angewandte Mathematik, Universitat Koln*, Vol. 17, 1977.
- [15] David C., Jameson A., Fast preconditioned multigrid solution of the Euler and Navier-Stokes equations for steady, compressible flows, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 43, No. 5, pp. 537-553, 2003.
- [16] Ramezani A., Mazaheri K., Multigrid convergence acceleration for implicit and explicit solution of Euler equations on unstructured grids, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 62, No. 9, pp. 994-1012, 2010.
- [17] Yang A., Yang X., Multigrid acceleration and chimera technique for viscous flow past a hovering rotor, *Journal of aircraft*, Vol. 48, No. 2, pp. 713-715, 2011.
- [18] White F. M., Corfield I., *Viscous fluid flow*: McGraw-Hill New York, 2006.
- [19] Spalart P. R., Allmaras S. R., A one equation turbulence model for aerodynamic flows, *AIAA journal*, Vol. 94, 1992.
- [20] Hülsemann F., Kowarschik M., Mohr M., Rüd U., Parallel geometric multigrid, in *Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers*, Eds., pp. 165-208: Springer, 2006.
- [21] Parthasarathy V., Kallinderis Y., New multigrid approach for three-dimensional unstructured, adaptive grids, *AIAA journal*, Vol. 32, No. 5, pp. 956-963, 1994.
- [22] Lallemand M.-H., Dervieux A., A multigrid finite element method for solving the two-dimensional Euler equations, *Proceeding of the Third Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, pp. 337-363, 1987.
- [23] Smith W. A., Multigrid solution of transonic flow on unstructured grids, *Recent Advances and Applications in Computational Fluid Dynamics*, pp. 93-103, 1990.
- [24] Schmitt V., Charpin F., Pressure distributions on the ONERA-M6-wing at transonic Mach numbers, *Experimental data base for computer program assessment*, Vol. 4, 1979.
- [25] Cook P., Firmin M., McDonald M., Aerofoil RAE 2822: pressure distributions and boundary layer and wake measurements: RAE, 1977.



شکل ۱۲- نرخ همگرایی در جریان غیر لزج به ازای استفاده از شبکه های مختلف بر حسب تعداد تکرارها (بالا) و زمان محاسبات (پایین)



شکل ۱۳- تغییرات ضریب برآ در فرایند حل جریان لایه‌ای

جدول ۴- میزان بهبود نرخ همگرایی برای هر سه نوع جریان

نوع جریان (معادله)	بهترین طرح	درصد کاهش تعداد تکرار	درصد کاهش زمان همگرایی
مغشوش	MG3 - W	۸۱	۵۱
لایه‌ای	MG2 - W	۸۰	۳۴
غیر لزج	MG2 - W	۹۲	۶۹

۸- مراجع

- [1] Mavriplis D. J., on convergence acceleration techniques for unstructured meshes, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, 1998.
- [2] Saad Y., Schultz M. H., GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving non symmetric linear systems, *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, Vol. 7, No. 3, pp. 856-869, 1986.
- [3] Pierce N. A., Giles M. B., Preconditioned multigrid methods for compressible flow calculations on stretched meshes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, No. 2, pp. 425-445, 1997.
- [4] Van Der Vorst H., Bi-CGSTAB, a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, Vol. 13, pp. 631-644, 1992.
- [5] Soto O., Löhner R., Camelli F., A linelet preconditioner for incompressible flow solvers, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 13, No. 1, pp. 133-147, 2003.