

## مقایسه تاثیر پارامتر غیر محلی بر ارتعاشات نانوتیوب‌ها، بر اساس حل دقیق نظریه‌های اویلر، تیموشنکو و پوسته‌ی سندرز مرتبه اول

استاد، مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران  
 دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران  
 دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی اراک، اراک، ایران

شاهرخ حسینی هاشمی\*  
 محمدرضا ایلخانی  
 شهریار حسینی هاشمی

### چکیده

ارتعاشات نانوتیوب‌ها در مقالات بسیاری توسط نظریه‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است که حاکی از تفاوت‌های مشهودی در نتایج است. بنابراین در این مقاله، رفتار ارتعاشی نانوتیوب‌ها بر اساس دو نظریه تیرها، نظریه‌های اویلر و تیموشنکو، و همچنین نظریه پوسته استوانه ای مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور اعمال اثر مقیاس نیز از نظریه الاستیسیته غیر محلی استفاده شده است. معادلات بدست آمده برای هر سه نظریه به صورت دقیق برای شش ترکیب از شرط‌های مرزی کلاسیک حل شده است. صحت نتایج ضمن مقایسه آنها با سایر مراجع تصدیق شده است و اثر تغییر پارامتر مقیاس به همراه تغییر خصوصیات هندسی بر نتایج هر سه نظریه ارائه شده و مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در نهایت اثبات شده که حل دقیق معادلات نظریه سندرز مرتبه اول برای یک نانوتیوب کربنی منجر به پارامتر غیر محلی بسیار کوچکتری نسبت به سایر نظریه‌ها می‌گردد که حاکی از دقت مناسب این نظریه جهت تحلیل‌های مشابه می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات نانو تیوب، الاستیسیته غیر محلی، نظریه سندرز، نظریه تیموشنکو، نظریه اویلر.

## Comparison for Effect of Nonlocal Parameter on Vibrations of Nanotubes, Based on Exact Solutions of Euler, Timoshenko and Sanders Theories

Sh. Hosseini-Hashemi  
 M. R. Ilkhani  
 Sh. Hosseini-Hashemi

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran  
 School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran  
 Faculty of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Arak Branch, Tehran, Iran

### Abstract

Vibrational behavior of nanotubes is investigated in different papers based on different theories which our investigation shows that there is big difference in their results. So, in this paper, vibrational behavior of nanotubes is analyzed using Euler, Timoshenko beam theories and Sanders first order shear deformation shell theory. In order to considering effect of scale, nonlocal elasticity theory is combined with these three geometrical theories who are exactly solved for six combinations of classical boundary conditions. Results are compared with references and molecular dynamics results and validity and accuracy of presented methods are approved. It is approved that nonlocal Sanders first order shear deformation theory has the best accuracy and needs the lower scale parameter to predict natural frequencies.

**Keywords:** Nanotube vibrations, nonlocal elasticity, Sanders theory, Timoshenko theory, Euler theory.

### ۱- مقدمه

پاسخی مناسب برای ارتعاشات نانوتیوب‌ها بدست آید. هریک اثر پارامتر مقیاس را بررسی نموده و در مواردی یک پارامتر مقیاس برای نانوتیوب کربنی خاص ارائه شده است. اما در درجه اول فقدان یک تحقیق که نظریه‌های موجود را با یکدیگر مقایسه نماید مشخص است و همچنین معادلات غیرمحلی پوسته‌ها در تمامی تحقیقات موجود یا برای شرط مرزی ساده حل گردیده و یا بواسطه یک روش نیمه تحلیلی برای سایر شرایط مرزی تحلیل شده است. بنابراین در مقاله حاضر، سه روش نظریه تیر اویلر، به عنوان ساده‌ترین روش تحلیل نانوتیوب‌ها، نظریه تیر تیموشنکو به عنوان نظریه مناسب در این گروه و نظریه پوسته سندرز با در نظر گرفتن اثرات تنش برشی مرتبه اول با نظریه الاستیسیته غیر محلی ترکیب شده تا رفتار ارتعاشی نانوتیوب کربنی بررسی گردد. هر سه روش از جمله نظریه پوسته مرتبه اول سندرز با استفاده از یک روش دقیق برای هر ۶ ترکیب ممکن از شرایط مرزی کلاسیک حل شده است.

امروزه نانو تیوب‌ها مهم‌ترین بخش نانو داروهای هوشمند، نانو حسگرها و نانو عملگرها، نانو کامپوزیت‌ها و نانو ماشین‌ها هستند که که بخش گسترده‌ای از تحقیقات به آنها اختصاص دارد. تحقیقات بسیاری بر روی رفتار ارتعاشی نانوتیوب‌های کربنی انجام شده که جدول (۱) به منتخبی از آنها اشاره نموده است [۱-۱۵]. مقالات به ترتیب سال انتشار آنها مرتبط شده و روش تحلیل، خصوصیات هندسی به تفکیک ارائه شده است. علاوه بر مقالات اشاره شده در بالا تحقیقات ارائه شده توسط آرش و وانگ [۱۶] و همچنین مقدم و رفیعی [۱۷] خلاصه‌ای از تحلیل‌های موجود در حوزه نانوتیوب‌ها را ارائه نموده که مروری بر این مقالات نشان می‌دهد، در حوزه الاستیسیته غیر کلاسیک، انواع نظریه‌های گرادیانی مانند الاستیسیته غیر محلی با نظریه‌های مختلف تیرها مانند نظریه اویلر، تیموشنکو و ردی و همچنین نظریه پوسته‌های نازک استوانه‌ای مانند دائل و فلاگه ترکیب شده تا

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: shh@iust.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۲/۲۱

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۳/۰۱

## ۲- معادلات حرکت

### ۲-۲- نظریه تیر اویلر

به منظور مدل‌سازی نانوتیوب، یک تیر با سطح مقطع دایره‌ای با شعاع میانی  $R$  و ضخامت  $h$  مطابق آنچه که در شکل (۱) نشان داده شده در نظر گرفته شده است. معادله حرکت بر مبنای نظریه اویلر غیر محلی به فرم زیر است [۱۶]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho A (1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۱)$$

به منظور حل معادله، پاسخ زمانی هارمونیک در نظر گرفته شده و معادله برای شش ترکیب شرط مرزی کلاسیک به فرم معادله دیفرانسیل معمولی زیر حل شده است:

$$w(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z} + c_4 e^{\lambda_4 z} \quad (۲)$$

where:  $\lambda_i = \pm \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2^2}}{2}$

### ۲-۳- نظریه تیر تیموشنکو

در نظریه تیر تیموشنکو اثر تغییر فرم برشی و اینرسی دورانی لحاظ می‌شود. فرم غیر محلی معادله تیموشنکو به صورت زیر می‌باشد [۱۶]:

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \rho I (1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + kAG \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \psi \right) = 0;$$

$$kAG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \rho A (1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (۳)$$

با در نظر گرفتن پاسخ هارمونیک زمانی و پس از چند محاسبه جبری مقادیر دو تابع مجهول  $w$  و  $\psi$  به فرم زیر از یکدیگر جدا شده و به تنهایی قابل حل هستند:

$$w'''' + \left[ \frac{\omega(-Gk(\rho I \omega + A \mu \rho \omega) + \rho \omega(-EI + 2\mu \rho I \omega^2))}{(Gk - \mu \rho \omega^2)(-EI + \mu \rho I \omega^2)} \right] w'' + \left[ \frac{\rho \omega^2 (AGk - \rho I \omega^2)}{(Gk - \mu \rho \omega^2)(-EI + \mu \rho I \omega^2)} \right] w = 0$$

$$\psi'''' + \left[ \frac{\omega(-Gk(\rho I \omega + A \mu \rho \omega) + \rho \omega(-EI + 2\mu \rho I \omega^2))}{(Gk - \mu \rho \omega^2)(-EI + \mu \rho I \omega^2)} \right] \psi'' + \left[ \frac{\rho \omega^2 (AGk \pm \rho I \omega^2)}{(Gk - \mu \rho \omega^2)(-EI + \mu \rho I \omega^2)} \right] \psi = 0 \quad (۴)$$

هر دو معادله دیفرانسیل (۴) معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه چهار با ضرایب ثابت هستند که با اعمال شرایط مرزی قابل حل هستند.

### ۲-۴- نظریه پوسته سندرز مرتبه اول برشی

در این قسمت نیز، به جهت حفظ اختصار معادلات حرکت پوسته غیر محلی سندرز از مرجع [۱۶] به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

جدول ۱- تاریخچه مقالات موجود در حوزه ارتعاشات نانوتیوب کربنی

نسبت منظری	کابریالیتی	روش			سال	محققین
		روش ترکیبی	الاستیسیته غیر کلاسیک	دینامیک مولکولی		
۱۰ تا ۱۰۰	---	---	نظریه تیر تیموشنکو	---	۲۰۰۶	وانگ و همکاران [۱]
---	---	---	معادلات پوسته دانل	---	۲۰۰۷	سان و لیو [۲]
۱۵	مختلف	---	---	تابع ام ام ۳	۲۰۰۸	گوپتا و باترا [۳]
مختلف	زیگزاگ و آرمرچر	المان فنر خطی	---	---	۲۰۰۸	جیورتگانزینوس و همکاران [۴]
۱۰ تا ۴۰	---	---	تیر تیموشنکو و فون کارمن	---	۲۰۰۹	کی و همکاران [۵]
۱۵-۳	مختلف	---	المان محدود و پوسته ها	تابع ام ام ۳	۲۰۱۰	گوپتا و همکاران [۶]
۳۹,۰۱-۸,۰۳	(۸و۸)	---	نظریه اویلر و تیموشنکو	تابع پتانسیل ایرو	۲۰۱۲	انصاری و همکاران [۷]
---	مختلف	---	نظریه پوسته فلاگه	---	۲۰۱۲	قوانلو و فاضل زاده [۸]
---	---	---	نظریه میله‌ها	---	۲۰۱۲	آیدویوگدو [۹]
دو مورد	آرمرچر	---	---	تابع پتانسیل برنر	۲۰۱۲	انصاری و همکاران [۱۰]
---	---	---	نظریه تیر اویلر	---	۲۰۱۲	خسروزاده و حاج عباسی [۱۱]
مختلف	مختلف	---	معادلات متفاوت تیرها	کد نانوهیو	۲۰۱۲	انصاری و سهمانی [۱۲]
کمتر از ۱۰	---	---	معادلات اویلر و فون کارمن	---	۲۰۱۲	فانگ و همکاران [۱۳]
مختلف	زیگزاگ	---	معادلات پوسته نازک	---	۲۰۱۴	انصاری و ارژنگ پی [۱۴]
مختلف	مختلف	---	معادلات تیر و میله‌ها	---	۲۰۱۵	چنگ و همکاران [۱۵]

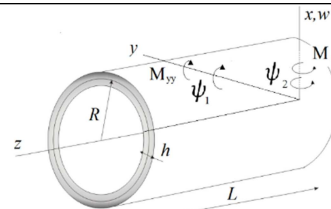
$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial M_6}{\partial x_2} = I_1 (1 - \mu^2 \nabla^2) \ddot{u} + I_2 (1 - \mu^2 \nabla^2) \dot{\psi}_1;$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2R} \frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{Q_2}{R} = I_1 (1 - \mu^2 \nabla^2) (\ddot{v}) + I_2 (1 - \mu^2 \nabla^2) (\dot{\psi}_2);$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{\partial x_2} - Q_1 = I_2 (1 - \mu^2 \nabla^2) \ddot{u} + I_3 (1 - \mu^2 \nabla^2) \dot{\psi}_1;$$

$$\frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = I_2 (1 - \mu^2 \nabla^2) (\ddot{v}) + I_3 (1 - \mu^2 \nabla^2) (\dot{\psi}_2);$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \frac{N_2}{R} = I_1 (1 - \mu^2 \nabla^2) (\ddot{w}) \quad (۵)$$



شکل ۱- هندسه نانوتیوب

بنابراین به عنوان یک جدول پایه، فرکانس طبیعی اول هر شش ترکیب شرایط مرزی با استفاده از هر سه نظریه اویلر، تیموشنکو و سندرز مرتبه اول بدست محاسبه شده و در جدول (۵) ارائه شده است. نتایج برای دو پارامتر مقیاس مختلف ارائه شده تا امکان بررسی اثر پارامتر مقیاس بر نتایج فراهم باشد. همانطوریکه در بالا نیز اشاره شد، افزایش پارامتر غیر محلی در تمامی شرایط مرزی تاثیر بیشتری بر روش سندرز داراست و مقادیر فرکانس را بیشتر جابجا می نماید.

بنابراین به عنوان یک جدول پایه، فرکانس طبیعی اول هر شش ترکیب شرایط مرزی با استفاده از هر سه نظریه اویلر، تیموشنکو و سندرز مرتبه اول بدست محاسبه شده و در جدول (۵) ارائه شده است. نتایج برای دو پارامتر مقیاس مختلف ارائه شده تا امکان بررسی اثر پارامتر مقیاس بر نتایج فراهم باشد. همانطوریکه در بالا نیز اشاره شد، افزایش پارامتر غیر محلی در تمامی شرایط مرزی تاثیر بیشتری بر روش سندرز داراست و مقادیر فرکانس را بیشتر جابجا می نماید. به عنوان آخرین مقایسه و به منظور درک هرچه بهتر اثر پارامتر غیر محلی بر نتایج نظریه‌های مذکور، مقادیر پارامتر غیر محلی مورد نیاز برای همسان-سازی نتایج الاستیسیته با نتایج شبیه‌سازی مولکولی در جداول (۶) و (۷) ارائه شده است. در جداول (۶) و (۷) مقادیر فرکانس طبیعی نانوتیوب‌های کربنی (۵و۵) و (۱۰و۱۰) با طول‌های مختلف که با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بدست آمده، ارائه شده است.

به منظور شبیه‌سازی مولکولی از نرم افزار لمپس استفاده شده است. شبیه‌سازی در دمای نزدیک به صفر کلویین و با استفاده از تابع پتانسیل ایریو با در نظر گرفتن اثر چرخش اتم‌ها انجام شده است. به منظور رسیدن به نتایج صحیح نانوتیوب اول به حداقل انرژی خود رسیده است. نانوتیوب با شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد شبیه‌سازی شده و به منظور مقید سازی، دو ردیف اتم‌های انتهایی نانوتیوب ثابت شده اند. قبل از انجام شبیه‌سازی ارتعاشی، تمامی نمونه‌ها ضمن انجام تست کشش خصوصیات مکانیکی آنها استخراج شده و از این مقادیر در نظریه‌ها استفاده شده است. به جهت انجام تست کشش یک نیروی افزایشنده به انتهایی نانولوله اعمال شده و تغییر طول متناظر داده برداری شده که منجر به شناسایی پارامتر  $Eh$  می گردد. به جهت استخراج فرکانس طبیعی، نانوتیوب با اعمال جابه‌جایی عرضی به یک ردیف از اتم‌های میانی و رها سازی آن، تحریک شده و مقادیر جابه‌جایی تعدادی از اتم-های تحریک نشده ذخیره شده است. در نهایت، با گرفتن تبدیل فوری از نتایج جابه‌جایی، مقادیر فرکانس طبیعی بدست آمده و در جداول (۶) و (۷) ارائه شده است. تمامی شبیه‌سازی‌ها با گام زمانی ۱ فمتو ثانیه انجام گرفته است. مقادیر فرکانس طبیعی نانو تیوب با استفاده از سه نظریه اویلر، تیموشنکو و سندرز نیز بدست آمده و در جداول (۶) و (۷) ارائه شده است. مقادیر پارامتر غیر محلی متناظر با هر نظریه نیز که منجر به نزدیک‌ترین پاسخ به نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی شده، با استفاده از یک الگوریتم بهینه سازی مشخص شده و در جدول ارائه شده است. جداول (۶) و (۷) نشان می‌دهند که نظریه سندرز

به منظور حل معادلات بالا، فرم هارمونیک در حوزه محیطی و زمان در معادلات اعمال شده و معادلات نهایی با استفاده از روش فضای حالت حل شده است. در این روش هر معادله مرتبه دو با تغییر متغیر زیر به دو معادله مرتبه یک تبدیل شده است. توضیحات مبسوط این روش در مرجع [۱۸] ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \{Z'\} &= [A]\{Z\}; \{Z'\} = \{Z'_{1m} \quad Z'_{2m} \quad \dots \quad Z'_{10}\}^T; \\ \{Z\} &= \{Z_{1m} \quad Z_{2m} \quad \dots \quad Z_{10m}\}; \end{aligned} \quad (۶)$$

### ۳- مقایسه و تفسیر نتایج

در اولین قدم، به منظور تایید صحت روش‌های استفاده شده برای حل معادلات، نتایج در جداول مختلف با نتایج تحقیقات سایرین مقایسه شده است. در اولین مقایسه، در جدول (۲) صحت نظریه‌های غیر محلی اویلر و تیموشنکو ضمن مقایسه با نتایج مرجع [۱۹] برای هندسه‌های مختلف و مقادیر پارامتر غیر محلی متفاوت، بررسی شده است. جدول (۲) قرابت و صحت نتایج را تایید می‌نماید. به عنوان دومین مقایسه، در جدول (۳) مقادیر فرکانس طبیعی یک نانو تیوب کربنی با مقادیر گزارش شده در مراجع [۲۰-۲۲] مقایسه شده است. مقادیر با استفاده از هر سه نظریه اویلر (EBT)، تیموشنکو (TBT) و پوسته مرتبه اول سندرز (S-FSDT) برای طول‌ها و شعاع‌های مختلف بدست آمده است. یک مقایسه میان نتایج حاضر با مراجع، صحت پاسخ‌ها را تایید می‌کند. البته همانطوریکه در جدول نیز مشخص است، نظریه‌های اویلر و تیموشنکو در نسبت طول به شعاع بزرگتر پاسخ‌های مناسبی را ارائه نماید. اما در مقایسه کلی، نظریه مرتبه اول سندرز توانسته نتایج خوبی را ارائه نماید

در سومین مقایسه، اثر پارامتر مقیاس در نظریه سندرز لحاظ شده و نتایج روش حاضر با سایر مراجع مقایسه شده است. جدول (۴) مقادیر شش فرکانس طبیعی cut-off یک نانوتیوب کربنی را ارائه نموده که با استفاده از نظریه مرتبه اول سندرز برای دو پارامتر غیر محلی متفاوت بدست آمده و با نتایج مرجع [۲۱] مقایسه شده است. همانطوریکه انتظار می‌رفت، روش حاضر توانسته با دقت مناسبی فرکانس‌ها را بدست آورد. همچنین، مقایسه نتایج با مرجع مذکور نشان می‌دهد که استفاده از نظریه مرتبه اول برشی به جای نظریه پوسته نازک اثر بخشی پارامتر غیر محلی را افزایش خواهد داد.

از جداول (۲) تا (۴) مشخص شد، اثر پارامتر غیر محلی بر روی فرکانس طبیعی نانو تیوب کربنی در هر نظریه متفاوت است. به منظور هر چه بهتر روشن شدن این تفاوت، در شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی یک نانو تیوب کربنی بر اثر افزایش پارامتر غیر محلی برای هر سه نظریه ترسیم شده است. محور عمودی نسبت فرکانس به فرکانس محلی  $\omega^*$  و در محور افقی پارامتر غیر محلی  $\mu$  ترسیم شده است. نتایج برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده به ترتیب در اشکال (۴-الف) و (۴-ب) ترسیم شده است. شکل (۴) نشان می‌دهد که برای هر دو شرط مرزی تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش پارامتر غیر محلی برای هر سه نظریه کاهش یافته است. اما افزایش پارامتر غیر محلی تاثیر بسیار بیشتری را در نظریه پوسته مرتبه اول برشی سندرز داراست. افزایش پارامتر غیر محلی نتایج نظریه‌های اویلر و تیموشنکو را تقریباً ۱۰ درصد کاهش داده اما نتایج نظریه سندرز بیشتر از ۵۰ درصد کاهش یافته‌اند. همانطوریکه در بالا مشخص گردید، نظریه غیر محلی در کنار هر نظریه هندسی قرار گیرد، تاثیر متفاوتی را بر نتایج ارائه می‌نماید.

جدول ۲- مقایسه فرکانس بی بعد  $\omega = \omega l^2 \left(\frac{\rho A}{EI}\right)^{0.5}$  نانو تیر بدست آمده از روش تیر اوپلر و تیموشنکو حاضر با نتایج مرجع [۱۹]

$E = 30 \times 10^6, v = 0.3, \rho = 1. l = 10, k_s = 5/6.$

$L/h$	$\mu$	اوپلر مرجع [۱۹]	اوپلر روش حاضر	تیموشنکو مرجع [۱۹]	تیموشنکو روش حاضر
۰	۰	۹۰۸۶۹۶	۹۰۸۶۹۶۰	۹۰۸۶۸۳	۹۰۸۶۷۹۳
۱۰۰	۲	۹۰۰۱۹۵	۹۰۰۱۹۴۸	۹۰۰۱۸۳	۹۰۰۱۷۹۵
۵	۵	۸۰۰۷۶۱	۸۰۰۷۶۰۶	۸۰۰۷۵۰	۸۰۰۷۴۷۰
۰	۰	۹۰۸۶۹۶	۹۰۸۶۹۶۰	۹۰۸۳۸۱	۹۰۸۳۸۰۸
۲۰	۲	۹۰۰۱۹۵	۹۰۰۱۹۴۸	۸۰۹۹۰۷	۸۰۹۹۰۶۷
۵	۵	۸۰۰۷۶۱	۸۰۰۷۶۰۶	۸۰۰۵۰۳	۸۰۰۵۰۲۷

است. بنابراین استخراج پارامتر غیر محلی بزرگتر از قطر نانوتیوب، به عنوان مثال روش اوپلر، حاکی از کافی نبودن دقت روش مدل سازی است. بنابراین نتایج جداول (۶) و (۷) حاکی از آن است که نظریه سنדרز در کنار حل دقیق ارائه شده که اثر خطای محاسباتی را در انتخاب پارامتر مقیاس کمتر می‌نماید، پاسخ بسیار مناسبی را نسبت به سایر نظریه‌ها داراست.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد نانوتیوب با استفاده از ترکیب سه نظریه اوپلر، تیموشنکو و سنדרز مرتبه اول برشی با نظریه الاستیسیته غیر محلی مورد بررسی قرار گرفت. برای اولین بار، از یک روش دقیق برای حل معادلات پوسته مرتبه اول غیر محلی برای هر ۶ ترکیب ممکن از شرایط مرزی کلاسیک استفاده شد. نتایج هر سه روش با نتایج سایر مراجع مقایسه شد و صحت روش‌ها تایید گردید. مشخص شد که نظریه پوسته سنדרز مرتبه اول دقیق‌ترین پاسخ را داراست. همچنین نظریه پوسته مرتبه اول بیشترین تاثیرپذیری را از پارامتر غیر محلی داراست. همچنین ضمن مقایسه نتایج هر سه روش با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی مشخص گردید که نظریه پوسته مرتبه اول مقدار پارامتر غیر محلی کمتری را نسبت به سایر روش‌ها نیاز دارد.

کمترین مقدار پارامتر غیر محلی را برای رسیدن به نتایج شبیه‌سازی نیاز دارد. به عنوان مثال در جدول (۶) میزان درصد اختلاف فرکانس‌های استخراج شده از نظریه اوپلر غیر محلی بسیار ۲ درصد بدست آمده که این مقدار نزدیک به درصد بدست آمده متناظر از نتایج روش سنדרز است. اما نکته قابل توجه آن است که مقدار پارامتر مقیاس بدست آمده برای روش اوپلر،  $1/0.59 \text{ nm}$  از قطر نانو تیوب نیر بزرگتر است. د مقابل نظریه سنדרز مقدار قابل قبول  $0/19 \text{ nm}$  را ارائه نموده است. با توجه به ماهیت نظریه غیر محلی کوچک‌تر بودن پارامتر غیر محلی به معنای وابستگی کمتر نتایج هر نقطه از هندسه به نقاط همسایه

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از نظریه های حاضر با مراجع (n=m=1) برای نانوتیوب کربنی با تکیه‌گاه ساده در هندسه‌های مختلف ( $\rho h = 0.7718 \times 10^{-6}, Eh = 360 \text{ J/m}^2, v = 0.2$ )

فرکانس (Hz)						
L/R	شعاع (nm)	مرجع [۲۲] پوسته نازک دائل	مرجع [۲۰] پوسته نازک فلاگه	مرجع [۲۱] پوسته نازک لاو و حل عددی	روش حاضر تیموشنکو	روش حاضر اوپلر
۰.۵	۰.۶۵	$8.16 \times 10^{12}$	$8.2028 \times 10^{12}$	$8.2334 \times 10^{12}$	$1.93 \times 10^{13}$	$1.047 \times 10^{14}$
۵		$1.04 \times 10^{12}$	$1.0427 \times 10^{12}$	$1.0427 \times 10^{12}$	$1.013 \times 10^{12}$	$1.047 \times 10^{12}$
۵۰		$1.047 \times 10^{10}$	$1.04691 \times 10^{10}$	$1.04691 \times 10^{10}$	$1.047 \times 10^{10}$	$1.047 \times 10^{10}$
۰.۵	۵	$6.78 \times 10^{11}$	$6.7789 \times 10^{11}$	$6.7789 \times 10^{11}$	$2.51 \times 10^{12}$	$1.91 \times 10^{13}$
۵		$1.3 \times 10^{11}$	$1.3543 \times 10^{11}$	$1.3544 \times 10^{11}$	$1.047 \times 10^{11}$	$1.047 \times 10^{11}$
۵۰		$1.91 \times 10^9$	$1.909 \times 10^9$	$1.9091 \times 10^9$	$1.91 \times 10^9$	$1.91 \times 10^9$

جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از نظریه سنדרز مرتبه اول برشی با مرجع [۲۱] برای نانوتیوب کربنی (۸ و ۸) با شرایط مرزی

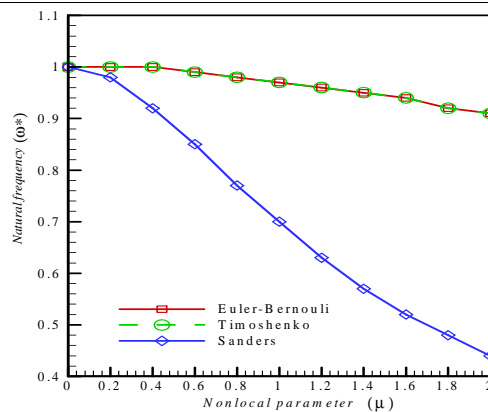
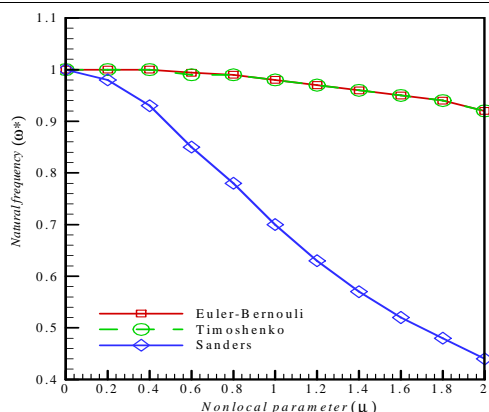
ساده-ساده

( $\rho h = 0.7718 \times 10^{-6}$  و  $Eh = \frac{360}{m^2}$  و  $v = 0.2$ )

$\mu = 0/2 \text{ nm}$				$\mu = 0/0 \text{ nm}$			
فرکانس Cut-off دوم		فرکانس Cut-off اول		فرکانس Cut-off دوم		فرکانس Cut-off اول	
مرجع [۲۰] پوسته نازک	حاضر	مرجع [۲۰] پوسته نازک	حاضر	مرجع [۲۰] پوسته نازک	حاضر	مرجع [۲۰] پوسته نازک	حاضر
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰
۱۲۸/۰۴۴	۱۲۸/۵۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۱۳۶/۴۹۵	۱۳۶/۹۵۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰
۲۱۹/۵۹۷	۲۲۰/۴۶۳	۱۶/۳۵۹۱	۱۶/۳۱۳	۲۷۲/۹۸۹	۲۷۳/۹۱۱	۲۰/۳۴۲	۲۰/۲۶۷
۲۷۴/۳۸۸	۲۷۵/۵۵۸	۳۸/۰۷۳	۳۸/۴۳۴	۴۰۹/۴۸۴	۴۱۰/۸۶۶	۵۶/۸۵۰	۵۷/۳۰۷
۳۰۶/۰۹۴	۳۰۷/۴۶۷	۶۰/۰۸۵	۶۱/۶۶۲	۵۴۵/۹۷۷	۵۴۷/۸۲۱	۱۰۷/۲۵۱	۱۰۹/۸۶۵
۳۲۵/۰۳۵	۳۲۶/۵۳۹	۸۰/۹۱۱	۸۴/۷۱۸	۶۸۲/۴۷۰	۶۸۴/۷۷۶	۱۷۰/۰۳۲	۱۷۷/۶۶۰
۰/۴۴		۵/۹۸		۰/۳۳		۵/۷۴	
				میانگین درصد اختلاف			

**جدول ۵- تغییرات فرکانس طبیعی اول (GHz) برای هر سه نظریه در شرایط مرزی مختلف در اثر تغییر پارامتر غیر محلی ( $\rho h=0.7718 \times 10^{-6}$ ,  $Eh=360J/m^2$ ,  $\nu=0.2$ )**

$\mu=1/0 \text{ nm}$			$\mu=0/0 \text{ nm}$			پارامتر غیر محلی
روش حاضر- سندرز	روش حاضر- تیموشنکو	روش حاضر- اویلر	روش حاضر- سندرز	روش حاضر- تیموشنکو	روش حاضر- اویلر	شرط مرزی/روش
۱۰۳/۱۸	۱۲۰/۲۰	۱۵۹/۲۹	۱۰۸/۱۰	۱۲۰/۷۹	۱۶۰/۱۳	گیردار-گیردار
۸۱/۵۲	۹۱/۴۸	۱۰۹/۸۱	۸۵/۴۰	۹۱/۹۲	۱۱۰/۳۵	گیردار-ساده
۶۰/۱۵	۶۴/۵۹	۷۰/۳۴	۶۲/۹۵	۶۴/۸۶	۷۰/۶۴	ساده-ساده
۲۲/۴۵	۲۴/۱۰	۲۵/۱۸	۲۳/۴	۲۴/۱۱	۲۵/۱۶	گیردار-آزاد
۸۹/۶۷	۹۶/۶۵	۱۰۹/۸۱	۹۳/۹۴	۹۷/۱۶	۱۱۰/۳۴	ساده-آزاد
۱۲۵/۱۸	۱۳۴/۷۱	۱۵۹/۲۹	۱۳۱/۲۹	۱۳۷/۵۷	۱۶۰/۱۳	آزاد-آزاد



**شکل ۴- مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی یک نانویوب کربنی با افزایش پارامتر غیر محلی برای سه نظریه اویلر، تیموشنکو و سندرز مرتبه اول برشی. الف) گیردار-گیردار، ب) ساده-ساده**

**جدول ۶- پارامتر مقیاس مناسب برای فرکانس طبیعی اول نانولوله کربنی (۵و۵) گیردار-گیردار (THz) بواسطه مقایسه نتایج روش‌های حاضر با نتایج شبیه سازی دینامیک مولکولی برای نسبت‌های منطری متفاوت ( $\rho h=0.7718 \times 10^{-6}$ ,  $kg/m^2$ ,  $Eh=325J/m^2$ ,  $\nu=0.2$ )**

نسبت منطری (L/R)	شبهه سازی مولکولی (MD)	روش حاضر L-EBT ( $\mu=0/0 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر NL-EBT ( $\mu=1/0.59 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر L-TBT ( $\mu=0/0 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر NL-TBT ( $\mu=0/0.5 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر L-FSDT ( $\mu=0/0 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر NL-FSDT ( $\mu=0/190 \text{ nm}$ )	Diff (%)
۹/۷۲	۱۰۰۶۸۱۲	۱/۵۹۸۷	۴۹/۶	۱/۰۷۱۶	۰/۳	۱/۱۲۰۴۰	۱۷/۵	۰/۹۰۸۳۲	۱/۷۵	۱/۰۸۰۰	۴/۶	۱/۰۷۲۰	۰/۳۶
۱۳/۳۴	۰۰۶۴۶۹۷	۰/۸۴۸۷۷	۳/۱	۰/۶۶۴۱۵	۲/۶	۰/۶۷۰۳۴	۹/۵	۰/۵۹۰۶۱	۹/۵	۰/۶۳۲۰	۳/۴	۰/۶۳۱۷	۲/۴
۱۶/۹۴	۰۰۴۳۳۲۵	۰/۵۲۶۲۵	۲/۱/۴	۰/۴۴۸۰۴	۳/۳	۰/۴۴۱۵۴	۶/۶	۰/۴۰۶۳۲	۶/۶	۰/۴۱۸۸	۱/۸	۰/۴۱۸۶	۳/۵
میانگین درصد اختلاف			۳۴/۰		۲/۰		۱۱/۲		۱۱/۲		۳/۲		۲/۰

**جدول ۷- پارامتر مقیاس مناسب برای فرکانس طبیعی اول نانولوله کربنی (۱۰و۱۰) یکسر گیردار (THz) بواسطه مقایسه نتایج روش‌های حاضر با نتایج شبیه سازی دینامیک مولکولی برای نسبت‌های منطری متفاوت ( $\rho h=0.7718 \times 10^{-6}$ ,  $kg/m^2$ ,  $Eh=325J/m^2$ ,  $\nu=0.2$ )**

نسبت منطری (L/R)	شبهه سازی مولکولی (MD)	روش حاضر L-EBT ( $\mu=0/0 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر NL-EBT ( $\mu=0/3 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر L-TBT ( $\mu=0/0 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر NL-TBT ( $\mu=0/3 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر L-FSDT ( $\mu=0/0 \text{ nm}$ )	Diff (%)	روش حاضر NL-FSDT ( $\mu=0/115 \text{ nm}$ )	Diff (%)
۴/۸۹	۰/۴۱۴۸	۰/۵۰۲۱۵	۲۱/۰	۰/۵۰۳۹۳	۲۱/۴	۰/۴۸۸۷	۱۵/۱	۰/۴۸۸۱	۱۵/۱	۰/۴۵۴۹	۱۵/۰	۰/۴۱۶۸	۰/۴۷
۱۰/۰۷	۰/۱۱۳۵	۰/۱۲۸۴۱	۱۳/۱	۰/۱۲۸۵۱	۱۳/۲	۰/۱۲۳۸	۸/۳	۰/۱۲۳۹	۸/۳	۰/۱۲۰۲	۸/۳	۰/۱۱۵۶	۱/۸
۱۵/۰۵	۰/۰۵۱۳۳	۰/۰۵۲۰۱	۳/۲	۰/۰۵۳۰۳	۳/۳	۰/۰۵۳۴۴	۵/۷	۰/۰۵۴۴۶	۵/۷	۰/۰۵۲۶۷	۵/۷	۰/۰۵۰۷	۱/۲
میانگین درصد اختلاف			۱۲/۴		۱۲/۶		۹/۷		۹/۶		۵/۶		۱/۱

- International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 76, pp. 9-20, 2013.
- [19] Reddy, J., Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
- [20] Fazelzadeh. S., Ghavanloo. E., Nonlocal anisotropic elastic shell model for vibrations of single-walled carbon nanotubes with arbitrary chirality, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, pp. 1016-1022, 2012.
- [21] Torkaman-Asadi. M. A., Rahmanian. M., Firouz-Abadi. R. D., Free vibrations and stability of high-speed rotating carbon nanotubes partially resting on Winkler foundations, *Composite Structures*, Vol. 126, pp. 52-61, 8//, 2015.
- [22] Wang. C., Ru. C., Mioduchowski. A., Applicability and limitations of simplified elastic shell equations for carbon nanotubes, *Journal of applied mechanics*, Vol. 71, No. 5, pp. 622-631, 2004.
- [1] Wang. C. M., Tan. V. B. C., Zhang. Y. Y., Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, No. 4-5, pp. 1060-1072, 7//, 2006.
- [2] Sun. C., Liu. K., Vibration of multi-walled carbon nanotubes with initial axial loading, *Solid State Communications*, Vol. 143, No. 4-5, pp. 202-207, 7//, 2007.
- [3] Gupta. S. S., Batra. R. C., Continuum structures equivalent in normal mode vibrations to single-walled carbon nanotubes, *Computational Materials Science*, Vol. 43, No. 4, pp. 715-723, 10//, 2008.
- [4] Georgantzinos. S. K., Giannopoulos. G. I., Anifantis. N. K., An efficient numerical model for vibration analysis of single-walled carbon nanotubes, *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 6, pp. 731-741, 2009/05/01, 2009.
- [5] Ke. L. L., Xiang. Y., Yang. J., Kitipornchai. S., Nonlinear free vibration of embedded double-walled carbon nanotubes based on nonlocal Timoshenko beam theory, *Computational Materials Science*, Vol. 47, No. 2, pp. 409-417, 12//, 2009.
- [6] Gupta. S. S., Bosco. F. G., Batra. R. C., Wall thickness and elastic moduli of single-walled carbon nanotubes from frequencies of axial, torsional and inextensional modes of vibration, *Computational Materials Science*, Vol. 47, No. 4, pp. 1049-1059, 2//, 2010.
- [7] Ansari. R., Gholami. R., Rouhi. H., Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 8, pp. 2985-2989, 12//, 2012.
- [8] Ghavanloo. E., Fazelzadeh. S. A., Vibration characteristics of single-walled carbon nanotubes based on an anisotropic elastic shell model including chirality effect, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 10, pp. 4988-5000, 10//, 2012.
- [9] Aydogdu. M., Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity, *Mechanics Research Communications*, Vol. 43, No. 0, pp. 34-40, 7//, 2012.
- [10] Ansari. R., Ajori. S., Arash. B., Vibrations of single- and double-walled carbon nanotubes with layerwise boundary conditions: A molecular dynamics study, *Current Applied Physics*, Vol. 12, No. 3, pp. 707-711, 5//, 2012.
- [11] Khosrozadeh. A., Hajabasi. M. A., Free vibration of embedded double-walled carbon nanotubes considering nonlinear interlayer van der Waals forces, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 3, pp. 997-1007, 3//, 2012.
- [12] Ansari. R., Sahmani. S., Small scale effect on vibrational response of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions based on nonlocal beam models, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, No. 4, pp. 1965-1979, 4//, 2012.
- [13] Fang. B., Zhen. Y. X., Zhang. C. P., Tang Y., Nonlinear vibration analysis of double-walled carbon nanotubes based on nonlocal elasticity theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 3, pp. 1096-1107, 2013.
- [14] Ansari. R., Arjangpay. A., Nanoscale vibration and buckling of single-walled carbon nanotubes using the meshless local Petrov-Galerkin method, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 63, pp. 283-292, 9//, 2014.
- [15] Li. C., Li. S., Yao. L., Zhu. Z., Nonlocal theoretical approaches and atomistic simulations for longitudinal free vibration of nanorods/nanotubes and verification of different nonlocal models, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 15, pp. 4570-4585, 8/1/, 2015.
- [16] Arash. B., Wang. Q., A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes, *Computational Materials Science*, Vol. 51, No. 1, pp. 303-313, 2012.
- [17] Rafiee. R., Moghadam. R. M., On the modeling of carbon nanotubes: A critical review, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 56, pp. 435-449, 2014.
- [18] Hosseini-Hashemi. S., Ilkhani. M. R., Fadaee. M., Accurate natural frequencies and critical speeds of a rotating functionally graded moderately thick cylindrical shell,