

## بررسی تحلیلی و اجزا محدود خواص الاستیک صفحات لانه زنبوری سلول بیضوی

مقداد غلامی\*

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

رضا اکبری آلاشتی

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

علیرضا فتحی

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

### چکیده

جامدهای سلولی به علت کم بودن شاخص وزن به مقاومت آنها که منجر به کاهش در وزن و مصرف سوخت می‌شود، امروزه به وفور در صنایع هوا فضا و زیرساخت‌های عمرانی استفاده می‌شوند. تعیین خواص مکانیکی این سازه‌ها جهت انجام طراحی سازه‌ای بسیار ضروری می‌باشد. در این مقاله محاسبه خواص الاستیسیته درون صفحه‌ای یک لانه زنبوری با ساختار سلول بیضوی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا ابتدا با استفاده از دیاگرام آزاد کوچکترین واحد تکرار شونده سلول، نیروها و گشتاورهای وارد شده بر سلول واحد به دست می‌آیند؛ سپس با استفاده از نظریه انرژی کرنشی و نظریه کاستیگلیانو ثوابت الاستیک درون صفحه‌ای به دست می‌آیند. برای اعتبار سنجی نتایج نظریه، با استفاده از نرم افزار المان محدود ABAQUS لانه زنبوری سلول بیضوی مدل سازی می‌شود و با استفاده از حالت‌های بارگذاری نرمال و برشی و به دست آوردن تنش‌ها و کرنش‌ها، ثوابت الاستیک محاسبه شده و با مقادیر نظریه مقایسه می‌شوند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که مدول‌های یانگ و برشی ماکروسکوپی با ضخامت دیواره سلول رابطه مستقیم و با شعاع بیضی رابطه عکس دارند. **واژه‌های کلیدی:** سازه لانه زنبوری، ثوابت الاستیسیته، نظریه کاستیگلیانو، انرژی کرنشی.

## Analytical and Finite Element Investigation of Elastic Properties of Elliptical Cell Honeycomb Plates

M. Gholami

Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University, Babol, Iran

R. Akbari Alashti

Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University, Babol, Iran

A. R. Fathi

Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University, Babol, Iran

### Abstract

Cellular solids are extremely used in aerospace industries and civil infrastructures due to their low weight/strength index that leads to decrease in total weight and fuel consumption. Determination of mechanical properties of these structures is absolutely essential for structural design fulfillment. In this paper the calculation of in-plane elasticity properties of elliptical cell honeycomb composite structure is investigated. In this regard at the beginning, by using free body diagram of the smallest repeating unit of cell, the forces and moments applied on unit cell are obtained; and then by using strain energy theory and Castigliano's theory, the in-plane elastic constants are obtained. For validation of theory results, by using the ABAQUS finite element program, the elliptical honeycomb is simulated and by using normal and shear loading conditions and obtaining stresses and strains, the elastic constants are calculated and compared with theory amounts. The results show that the relation of the macroscopic Young's modulus and the macroscopic shear modulus are directly proportional to the thickness of the cell wall and inversely proportional to the small diameter of the ellipse.

**Keywords:** Honeycomb, Elasticity properties, Castigliano's theorem, strain energy.

### ۱- مقدمه

جامدهای سلولی بوده و پیچیدگی کمتری نسبت به سازه‌های سلولی سه بعدی مانند فوم‌ها دارند.

در دهه‌های اخیر تحقیقات بسیار گسترده‌ای در مورد خواص مکانیکی جامدهای سلولی صورت گرفته است. چانگ و واس تحقیقاتی را در مورد خواص الاستیک درون صفحه‌ای لانه زنبوری‌های سلول دایروی و بیضوی انجام داده‌اند [۱]. در ادامه آنها تحقیقاتی را در مورد خواص ریز قطبی لانه زنبوری‌های سلول دایروی [۲] و همچنین ثوابت الاستیسیته زوج تنش لانه زنبوری سلول بیضوی گزارش داده‌اند [۳]. ضعف عمده تحقیقات چانگ و واس در زمینه خواص الاستیسیته درون صفحه‌ای این است که محل برخورد دو سلول به همدیگر ساده فرض شده است، اثر بارگذاری محوری و برشی در انرژی کرنشی ذخیره شده در هر سلول در نظر گرفته نشده است (هرچند این اثر معمولاً کم است) و ثابت‌های الاستیسیته برای لانه زنبوری‌هایی با خروج از مرکزی<sup>۵</sup>

سازه‌های سلولی<sup>۱</sup> به علت بالا بودن شاخص استحکام به وزن آنها امروزه به وفور در طراحی و اجرای سازه‌های سبک وزن و مقاوم استفاده می‌شوند. در این راستا مهندسين صنعت ساختمان نیز با الهام از سازه‌های لانه زنبوری<sup>۲</sup> طبیعی نظیر کندوی عسل، چوب و یا استخوان، نمونه‌هایی از سازه‌های لانه زنبوری مصنوعی ارائه داده‌اند. ساختار سازه‌های سلولی می‌تواند برحسب شکل و اندازه سلول‌ها و روشی که سلول‌ها پخش شده‌اند تغییر نماید. دامنه جامدهای سلولی<sup>۳</sup> شامل سازه‌های لانه زنبوری شش ضلعی<sup>۴</sup> زنبور عسل تا شبکه‌های بی‌نظم نظیر فوم‌ها می‌تواند باشد. از نظر ساختاری سازه‌های لانه زنبوری، شکل دو بعدی

<sup>1</sup> Cellular structure

<sup>2</sup> honeycomb

<sup>3</sup> Cellular solid

<sup>4</sup> Hexagonal cell honeycomb

<sup>5</sup> Eccentricity

کوچک و همچنین چگالی نسبی<sup>۱</sup> (چگالی ماکروسکوپی تقسیم بر چگالی ماده) پایین به دست آمده است. لین و همکاران مدول الاستیسیته درون صفحه ای، ضریب پواسون، مقاومت به ضربه و مقاومت تسلیم پلاستیک را برای لانه زنبوری های سلول دایروی با بر طرف کردن بعضی از ضعف های ذکر شده به دست آوردند [۴]. در یک کار مطالعاتی دیگر لین و هوانگ تحقیقاتی را در مورد خواص مکانیکی درون صفحه ای لانه زنبوری های سلول بیضوی انجام داده اند [۵]. در این تحقیقات، برخلاف تحقیق چانگ و واس از هندسه واقع بینانه تری برای سلول استفاده شده است و محل تماس سلول ها با یکدیگر ساده فرض نشده است. مزیت این تحقیقات نسبت به تحقیقات چانگ و واس این است که برای چگالی های نسبی بزرگتری این روابط محاسبه شده است. همچنین برای محاسبه انرژی کرنشی اثر نیروی محوری و برشی نیز در نظر گرفته شده است. با وجود اینکه در این مقالات روابط بر اساس چگالی نسبی بالاتری محاسبه شده است، اما این پارامتر محدود فرض شده که این خود یک ضعف است. ضعف دیگر این مقالات این است که روابط به دست آمده بر اساس خروج از مرکزی محدود محاسبه شده است. گیبسون و اشیی در کتاب خود تحقیقاتی را که در مورد خواص جامد های سلولی انجام داده اند، آورده اند [۶]. ژانگ و اشیی تغییر شکل بیرون صفحه ای و شکست لانه زنبوری های سلول شش ضلعی را بررسی کردند. آنها با استفاده از خواص الاستیک خطی بیرون صفحه ای، رفتار فروپاشی لانه زنبوری تحت بارگذاری برشی و فشاری ساده را بررسی کردند [۷]. محدودیت دیگری که در بعضی از مقالات مربوط به سازه های لانه زنبوری های سلول شش ضلعی مشاهده می شود این است که دیواره سلول کاملاً تخت فرض می شود. بالاوی و آبوت با در نظر گرفتن انحنای این سلول ها در انتهای هر ضلع، مدول الاستیک درون صفحه ای موثر لانه زنبوری های سلول شش ضلعی را محاسبه کرده اند [۸]. مورا و واس ثابت های ریزقطبی و لامه<sup>۲</sup> را برای لانه زنبوری های سلول دایروی پلی کرنبات با استفاده از المان محدود محاسبه کرده اند [۹].

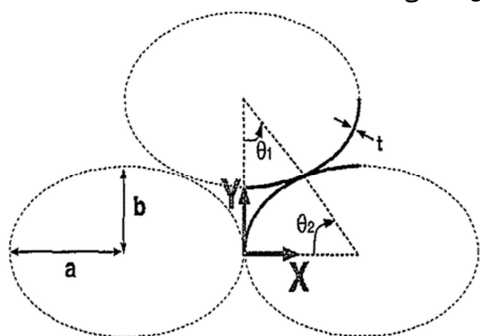
بخشی دیگر از تحقیقات در مورد تغییر شکل ها، مکانیزم تسلیم، طراحی و ساخت جامد های سلولی و غیره می باشند. هوانگ و چوانگ، سطح های تسلیم<sup>۳</sup> لانه زنبوری های سلول شش ضلعی را تحت بارگذاری دو محوری درون صفحه ای بدست آورده اند [۱۰]. جو و همکاران تحقیقاتی در مورد طراحی لانه زنبوری برای مدول ها و کرنش تسلیم<sup>۴</sup> در حالت برشی انجام داده اند [۱۱]. خیمنز و همکاران تحقیقاتی در مورد کمانش لانه زنبوری های مستطیلی و شش ضلعی تحت بارگذاری های ترکیبی محوری و برشی عرضی انجام داده اند [۱۲]. لین و همکاران، خزش لانه زنبوری های سلول دایروی و بیضوی را مورد تحقیق قرار داده اند [۱۳]. لین و همکاران تاثیر توزیع ماده را روی خواص الاستیک بیرون صفحه ای لانه زنبوری های سلول شش ضلعی بررسی کرده اند [۱۴]. همانطور که اشاره شد در اکثر تحقیقات موجود، خواص الاستیک درون صفحه ای لانه زنبوری های سلول بیضوی برای حالتی که سلول نزدیک به دایره (بیضی با خروج از مرکزی محدود) است، بدست آمده است. لذا لازم است تحقیقاتی در مورد لانه زنبوری های سلول بیضوی

بدون محدودیت خروج از مرکزی صورت گیرد. در این مقاله خواص الاستیک لانه زنبوری های سلول بیضوی بدون محدودیت در میزان خروج از مرکزیت محاسبه خواهند شد. دامنه تغییرات خروج از مرکزی سلول در این مقاله از صفر (دایره) تا ۰/۹۹ (نزدیک به خط راست) می باشد.

در قسمت ۲ ثوابت الاستیک لانه زنبوری به صورت نظریه و با استفاده از رابطه پارامتری بیضی، نظری انرژی کرنشی و نظریه کاستیگلیانو محاسبه خواهند شد؛ در قسمت ۳ با استفاده از تحلیل عددی به کمک نرم افزار ABAQUS و همچنین با استفاده از نتایج مقاله "خواص الاستیک درون صفحه ای لانه زنبوری های سلول دایروی و بیضوی [۱]"، نتایج نظری اعتبار سنجی<sup>۵</sup> (صحه گذاری) خواهند شد و در قسمت ۴ خلاصه مقاله و نتیجه گیری آن آورده خواهد شد.

## ۲- خواص درون صفحه ای لانه زنبوری های سلول بیضوی

با فرض قرار گرفتن همگن سلول های لانه زنبوری در صفحه  $x-y$ ، سازه های لانه زنبوری سلول بیضوی رفتار اورتوتروپیک از خود نشان می دهند. برای مدل سازی رفتار اورتوتروپیک به ۹ ثابت الاستیسیته مستقل برای مشخص کردن روابط تنش-کرنش نیاز است. با استفاده از کوچکترین واحد تکرار شونده سلول<sup>۶</sup> که به آن سلول واحد<sup>۷</sup> گفته می شود، می توان خواص ماکروسکوپی لانه زنبوری سلول بیضوی را محاسبه کرد. با تکرار سلول واحد در جهات مختلف لانه زنبوری سلول بیضوی شکل می گیرد. در شکل ۱، یک سلول واحد کامل لانه زنبوری سلول بیضوی نشان داده شده است. در این شکل، قطر بزرگ بیضی  $2a$  و قطر کوچک آن  $2b$  می باشد.



شکل ۱- یک سلول واحد کامل لانه زنبوری سلول بیضوی [۱]

با استفاده از بارگذاری های مختلف و همچنین رابطه پارامتری بیضی، می توان خواص الاستیک درون صفحه ای لانه زنبوری سلول بیضوی را به دست آورد. در شکل ۲، شکل هندسی بیضی به همراه معادله پارامتری نشان داده شده است.

<sup>5</sup> validation

<sup>6</sup> smallest repeating unit of cell

<sup>7</sup> perfect unit representative cell (PURC)

<sup>1</sup> Relative density

<sup>2</sup> Lamé

<sup>3</sup> Yield Surface

<sup>4</sup> Yield Strain

$$U = 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_1^2 R dS}{2E'I} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{M_2^2 R dS}{2E'I} \quad (4)$$

که در آن  $I$  گشتاور دوم سطح<sup>۲</sup> و  $E$  مدول الاستیسیته است [۱۰]. با فرض اینکه ماده استفاده شده در لانه زنبوری ایزوتروپیک باشد، رابطه تنش کرنش در حالت تنش صفحه ای برای لانه زنبوری به صورت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix};$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{(1-\vartheta^2)}; \quad Q_{12} = \frac{\vartheta E}{(1-\vartheta^2)}; \quad (5)$$

$$Q_{66} = \frac{E}{2(1+\vartheta)}$$

$$\rightarrow E' = \frac{E}{1-\vartheta^2} \rightarrow \hat{D} = E'I = \frac{E'c^3}{12} = \frac{Ec^3}{12(1-\vartheta^2)}$$

خواهد بود. در این رابطه  $c$  ضخامت سلول لانه زنبوری و  $\vartheta$  ضریب پواسون ماده می‌باشد. با توجه به رابطه پارامتری بیضی، پارامتر  $dS$  برابر خواهد بود با:

$$dS = a\sqrt{1-e^2(\cos t)^2} dt \quad (6)$$

در نتیجه انرژی کرنشی برابر خواهد بود با:

$$U = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_1^2(\theta_1) a \sqrt{1-e^2(\cos t)^2} dt}{\hat{D}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{M_2^2(\theta_2) a \sqrt{1-e^2(\cos t)^2} dt}{\hat{D}} \quad (7)$$

به علت ضمنی بودن، این انتگرال حل صریح نداشته و لذا برای حل آن از روش های انتگرال گیری عددی استفاده می‌شود. با استفاده از روش انتگرالی Simpson 1/3:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3n} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1, odd}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2, even}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (8)$$

حاصل انتگرال محاسبه خواهد شد. در این رابطه  $n$  تعداد تقسیم‌ها می‌باشد که باید زوج باشد. میزان جابجایی‌ها با استفاده از قضیه کاستیگلیانو به دست خواهند آمد:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \delta \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = \delta \quad \frac{\partial U}{\partial M_a} = 0 \quad (9)$$

مدول ینگ ماکروسکوپی در راستای  $x$  برای لانه زنبوری سلول بیضی برابر است با:

$$E_x^* = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}, \quad \sigma_x = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}b}, \quad \varepsilon_x = \frac{\delta}{a} \quad (10)$$

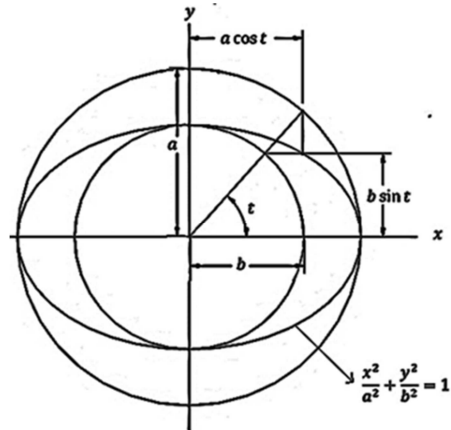
توجه شود که با توجه به معادله بیضی طول المان واحد در راستای  $x$  برابر  $a$  و در راستای  $y$  برابر  $\sqrt{3}b$  خواهد شد. با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱۰)، مدول الاستیسیته ماکروسکوپی برابر خواهد بود با:

$$E_x^* = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}\delta} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \quad (11)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه‌های (۱۱-۷) مقادیر  $P_1$ ،  $P_2$  و  $E_x^*$  به دست خواهند آمد:

$$P_1 = k_1 \frac{\delta Ec^3}{(1-\vartheta^2)b^3}, \quad P_2 = k_2 \frac{\delta Ec^3}{(1-\vartheta^2)b^3},$$

$$E_x^* = k \frac{Ec^3}{(1-\vartheta^2)b^3} \quad (12)$$



شکل ۲- شکل هندسی بیضی برای به دست آوردن معادله پارامتری

با توجه به شکل ۲ معادله پارامتری بیضی به این صورت بیان می‌شود که:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

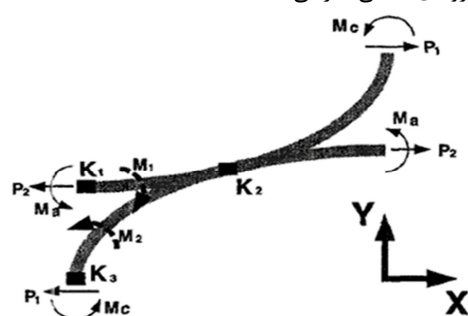
در این رابطه  $t$  خروج از مرکز نا متعارف<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. خروج از مرکز بیضی به این صورت تعریف می‌شود که:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (2)$$

### ۱-۲- لانه زنبوری سلول بیضی در معرض تنش

#### ماکروسکوپی $\sigma_x$

برای به دست آوردن مدول الاستیسیته در راستای  $x$ ، سلول واحد لانه زنبوری در معرض بارگذاری کششی ساده در این راستا قرار می‌گیرد. دیگرام آزاد سلول واحد یک لانه زنبوری سلول بیضی در معرض تنش ماکروسکوپی  $\sigma_x$  در شکل ۳ نشان داده شده است. در این شکل،  $P_1$  و  $P_2$  نیروهای اعمالی خارجی هستند.



شکل ۳- پیکره آزاد سلول واحد لانه زنبوری سلول بیضی استفاده شده برای محاسبه مدول الاستیک در راستای  $x$  [۱]

با استفاده از معادله پارامتری بیضی و معادله تعادل رابطه بین گشتاورهای خارجی و داخلی به دست خواهند آمد:

$$M_c = -M_a + \frac{\sqrt{3}}{2} P_1 b + P_2 b \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M_1 = M_a - P_2 b(1 - \sin t), \quad M_2 = -M_c + P_1 b \sin t \quad (3)$$

با استفاده از مفهوم نظریه کلاسیک خمش تیرها، رابطه انرژی کرنشی سلول واحد دایروی به دست خواهد آمد:

<sup>2</sup> moment of inertia (or second moment) of a plane

<sup>1</sup> Eccentric anomaly

$$\sigma_y = \frac{P}{a}, \varepsilon_y = \frac{\delta}{\sqrt{3}b} \quad (15)$$

$$\rightarrow E_y^* = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{\sqrt{3}Pb}{\delta a} = \frac{\sqrt{3}P}{\delta} \sqrt{1-e^2}$$

در نتیجه با انجام محاسبات مقادیر  $P$ ،  $H$  و  $E_y^*$  به دست خواهند آمد:

$$P = l_1 \frac{\delta E c^3}{(1-\theta^2)b^3}, H = l_2 \frac{\delta E c^3}{(1-\theta^2)b^3} \quad (16)$$

$$E_y^* = l \frac{E c^3}{(1-\theta^2)b^3}$$

در رابطه فوق  $l_1$ ،  $l_2$  و  $l$  ثوابتی هستند که مقادیر آنها بر حسب خروج از مرکزیت در جدول ۲ نشان داده شده است.

لازم به ذکر است، برای شکل تقریباً خط راست ( $e \approx 1$ ) مدول یانگ در راستای  $Y$  به سمت صفر میل می‌کند. دلیل آن این است که، شکل سلول واحد تبدیل به خط راست خواهد شد و لذا مساله یک بعدی می‌شود. در نتیجه مدول یانگ در راستای  $Y$  تاثیر خود را از دست می‌دهد و به سمت صفر میل می‌کند.

جدول ۲- مقادیر به دست آمده ثوابت  $l_1$ ،  $l_2$  و  $l$  برای مدول

الاستیک در راستای $Y$ لانه زنبوری سلول بیضوی			
$l$	$l_2$	$l_1$	$e$
۸/۳۲۹	۳/۴۶۰۴	۴/۷۸۶۵	۰
۸/۱۴	۳/۴۳۵۱	۴/۷۲۶	۰/۱
۷/۷۱	۳/۳۵۸۷	۴/۵۴۵۳	۰/۲
۷/۰۱	۳/۲۲۹۶	۴/۲۴۶۸	۰/۳
۶/۰۸	۳/۰۴۴۳	۳/۸۳۵	۰/۴
۴/۹۷	۲/۷۹۸	۳/۳۱۶۹	۰/۵
۳/۷۴	۲/۴۸۲۶	۲/۷۰۳۳	۰/۶
۲/۴۸	۲/۰۸۵۴	۲/۰۱۱	۰/۷
۱/۳۱	۱/۵۸۴۹	۱/۲۶۸۵	۰/۸
۰/۴	۰/۹۳۸۳	۰/۵۳۳۴	۰/۹
۰/۰۰۵	۰/۱۲۷۴	۰/۰۲۱۶	۰/۹۹

جدول ۲-۳ لانه زنبوری سلول بیضوی در معرض بارگذاری برشی خالص

با استفاده از بارگذاری برشی خالص مدول برشی سلول واحد لانه زنبوری به دست خواهد آمد. در شکل ۵ سلول واحد یک لانه زنبوری سلول بیضوی در معرض بارگذاری برشی خالص نشان داده شده است. در این شکل  $P_1$ ،  $P_2$  و  $H$  نیروی اعمالی خارجی می‌باشند.

با استفاده از شکل های ۲ و ۵ و همچنین معادله تعادل و معادله پارامتری بیضی، گشتاور ها به دست خواهند آمد:

$$M_1 = P_2 a \cos t, M_2 = H b \sin t - P_1 a (1 - \cos t) \quad (17)$$

$$H = \frac{P_1 + P_2 a}{\sqrt{3} b}$$

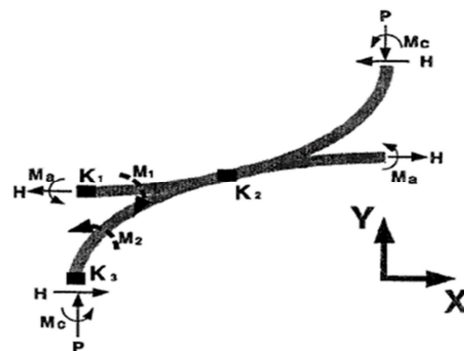
در این رابطه  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k$  ثوابتی می‌باشند که مقادیر آنها برای خروج از مرکز های مختلف در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱- مقادیر به دست آمده ثوابت  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k$  برای مدول

الاستیک در راستای $X$ لانه زنبوری سلول بیضوی			
$k$	$k_2$	$k_1$	$e$
۸/۳۲۹	۱۵/۶۳۵	-۱/۲۱۲۹	۰
۸/۳۳۴	۱۵/۵۷۳	-۱/۲۰۹۲	۰/۱
۸/۳۵۷	۱۵/۳۸	-۱/۱۹۷۶	۰/۲
۸/۳۹۶	۱۵/۰۵۱	-۱/۱۷۷۶	۰/۳
۸/۴۵۴	۱۴/۵۶۸	-۱/۱۴۷۷	۰/۴
۸/۵۳۱	۱۳/۹۰۳	-۱/۱۰۵۴	۰/۵
۸/۶۳۳	۱۳/۰۱	-۱/۰۴۶۷	۰/۶
۸/۷۶۶	۱۱/۸۰۸	-۰/۹۶۴۳۸	۰/۷
۸/۹۳۹	۱۰/۱۳۴	-۰/۸۴۳۷۴	۰/۸
۹/۱۷۰	۷/۵۷۱۲	-۰/۶۴۷۴۳	۰/۹
۹/۴۷۰	۲/۵۴۵۸	-۰/۳۳۱۷۷	۰/۹۹

جدول ۲-۲ لانه زنبوری سلول بیضوی در معرض تنش ماکروسکوپی  $\sigma_y$

با استفاده از بارگذاری فشاری در راستای  $Y$ ، مدول الاستیسته لانه زنبوری در این راستا بدست خواهد آمد. در شکل ۴، دیاگرام آزاد سلول واحد یک لانه زنبوری سلول بیضوی در معرض تنش ماکروسکوپی  $\sigma_y$  نشان داده شده است. در این شکل  $P$  نیروی اعمالی خارجی می‌باشد.



شکل ۴- پیکره آزاد سلول واحد یک لانه زنبوری سلول بیضوی استفاده شده برای محاسبه مدول الاستیک در راستای  $Y$  [۱]

با استفاده از معادله تعادل، روابط مربوط به گشتاور ها بدست خواهند آمد:

$$M_1 = M_a - H b (1 - \sin t)$$

$$M_2 = -M_c - H b \sin t + P a (1 - \cos t) \quad (13)$$

$$M_c = -M_a + H b (1 - \sqrt{3}) + \frac{P a}{2}$$

با استفاده از قضیه کاستیگلیانو میزان جابجایی ها در این حالت برابر خواهند بود با:

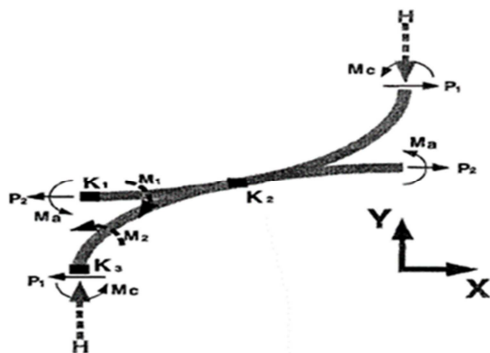
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta \quad \frac{\partial U}{\partial H} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial M_a} = 0 \quad (14)$$

با توجه به ابعاد سلول واحد، مدول یانگ ماکروسکوپی در راستای  $Y$  به این صورت به دست خواهد آمد که:

## ۲-۴- لانه زنبوری سلول بیضوی در معرض تنش

### ماکروسکوپی $\sigma_x$ و تنش مجازی ماکروسکوپی $\sigma_y$

با استفاده از تنش ماکروسکوپی  $\sigma_x$  و تنش مجازی  $\sigma_y$  که باعث ایجاد بار مجازی  $H$  می‌شود، ضریب پواسون  $\nu_{xy}^*$  سلول واحد بیضوی بدست خواهد آمد. دیاگرام آزاد سلول واحد یک لانه زنبوری سلول بیضوی برای محاسبه ضریب پواسون در شکل ۶ نشان داده شده است. در این شکل،  $P_1$  و  $P_2$  بارگذاری واقعی اعمال شده خارجی هستند و  $H$  بار مجازی خارجی اعمال شده می‌باشد.



شکل ۶- پیکره آزاد سلول واحد یک لانه زنبوری سلول بیضوی استفاده شده برای محاسبه ضریب پواسون در صفحه  $x-y$  [۱]

با استفاده از معادله تعادل و همچنین شکل ۶، روابط گشتاور ها به- دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_a - P_2 b(1 - \sin t) \\ M_2 &= -M_c + H a(1 - \cos t) + P_1 b \sin t \\ M_c &= -M_a + P_2 b \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} P_1 b + \frac{H a}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

با استفاده از رابطه های (۷) و (۲۳)، انرژی کرنشی  $U$  برحسب  $P_1$  و  $P_2$  و  $H$  به دست خواهد آمد. با استفاده از رابطه انرژی کرنشی و قضیه کاستیگلیانو، مقدار جابجایی ها بدست خواهند آمد:

$$\frac{\partial U}{\partial H} = -\Delta \quad \frac{\partial U}{\partial P_1} = \delta \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = \delta \quad \frac{\partial U}{\partial M_a} = 0 \quad (23)$$

ضریب پواسون  $\nu_{xy}^*$  در حالت ماکروسکوپی برای لانه زنبوری برابر است با:

$$\nu_{xy}^* = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (24)$$

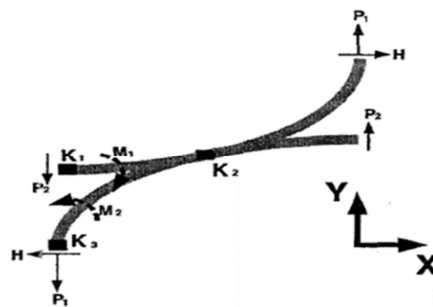
همچنین با توجه به شکل ۶ و جابجایی ها، کرنش ها برابر خواهند بود با:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{a}, \quad \epsilon_y = \frac{\Delta}{\sqrt{3}b} \quad (25)$$

در نتیجه رابطه ضریب پواسون با استفاده از رابطه های (۲۵) و (۲۶) برابر خواهد بود با:

$$\nu_{xy}^* = \frac{-\Delta}{\delta} \left(\frac{a}{\sqrt{3}b}\right) = \frac{-\Delta}{\sqrt{3}\delta} \times \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \quad (26)$$

با انجام محاسبات مقادیر  $P_1$  و  $P_2$  و  $H$  بر حسب  $\delta$  و  $\Delta$  به دست خواهند آمد. با میل دادن  $H$  به سمت صفر رابطه بین  $\delta$  و  $\Delta$  به دست خواهد آمد. با داشتن نسبت  $\Delta$  به  $\delta$  و همچنین مقدار خروج از مرکزی، ضریب پواسون  $\nu_{xy}^*$  از رابطه ۲۷ بدست خواهد آمد. در جدول نتایج مربوط به ضریب پواسون لانه زنبوری سلول بیضوی برای خروج از مرکزی های مختلف نشان داده شده است.



شکل ۵- پیکره آزاد سلول واحد یک لانه زنبوری سلول بیضوی استفاده شده برای محاسبه مدول برشی در صفحه  $x-y$  [۱]

با استفاده از رابطه ۷، معادله انرژی کرنشی برحسب  $P_1$  و  $P_2$  به دست خواهد آمد. با استفاده از قضیه کاستیگلیانو میزان جابجایی ها در این حالت برابر خواهند بود با:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \Delta, \quad \frac{\partial U}{\partial P_2} = \Delta \quad (17)$$

با اعمال قضیه کاستیگلیانو مقادیر  $P_1$  و  $P_2$  به دست خواهند آمد. مدول برشی در حالت ماکروسکوپی برای لانه زنبوری سلول بیضوی برابر است با:

$$G_{xy}^* = \frac{\tau}{\gamma} \quad (18)$$

با توجه به شکل ۵، تنش و کرنش برشی به دست خواهند آمد:

$$\tau = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}b}, \quad \gamma = \frac{\Delta}{a} \quad (19)$$

در نتیجه مدول برشی با استفاده از رابطه های (۱۹) و (۲۰) بدست خواهد آمد:

$$G_{xy}^* = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}\Delta} (\epsilon + 1) \quad (20)$$

با انجام محاسبات، مقادیر  $P_1$ ،  $P_2$  و  $G_{xy}^*$  به دست خواهند آمد:

$$P_1 = m_1 \frac{\Delta E c^3}{(1-\theta^2)b^3}, \quad P_2 = m_2 \frac{\Delta E c^3}{(1-\theta^2)b^3}, \quad (21)$$

در رابطه فوق  $m_1$ ،  $m_2$  و  $m$  ثابت هستند که مقادیر آنها در جدول ۳ نشان داده شده است. برای  $e \approx 1$  ملاحظه می‌شود که مدول برشی به سمت صفر میل می‌کند چون سلول واحد تبدیل به یک خط راست خواهد شد.

جدول ۳- مقادیر به دست آمده ثوابت  $m_1$  و  $m_2$  و  $m$  برای مدول

برشی لانه زنبوری سلول بیضوی			
$m$	$m_2$	$m_1$	$e$
۲/۳	-۰/۶۶۸	۴/۶۴۴۸	۰
۲/۲۸	-۰/۶۵۹۳	۴/۵۹۰۳	۰/۱
۲/۲۳	-۰/۶۳۳۵	۴/۴۲۷۲	۰/۲
۲/۱۵	-۰/۵۹۱	۴/۱۵۶۵	۰/۳
۲/۰۴	-۰/۵۳۲۴	۳/۷۸۰۶	۰/۴
۱/۸۹	-۰/۴۵۸۹	۳/۳۰۲۹	۰/۵
۱/۷	-۰/۳۷۲۳	۲/۷۲۹۱	۰/۶
۱/۴۴	-۰/۳۷۵۴	۲/۰۶۸۹	۰/۷
۱/۱۲	-۰/۱۷۲۴	۱/۳۴۰۶	۰/۸
۰/۶۸	-۰/۰۷۱۸	۰/۵۸۶۷	۰/۹
۰/۰۸	-۰/۰۰۲۸	۰/۰۲۴۵	۰/۹۹

### ۳-۱- اعتبار سنجی با استفاده از تحلیل عددی

برای انجام تحلیل عددی از لانه زنبوری با  $6 \times 9$  سلول ساخته شده از دو المان تیر درجه ۲ (تیموشنکو<sup>۱</sup> B22) و درجه ۳ (اولر-برنولی<sup>۲</sup> B23) استفاده شده است. به منظور اعتبار سنجی با استفاده از تحلیل عددی، می‌توان لانه زنبوری را در معرض شرایط مرزی جابجایی قرار داده و با محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها، ثابت‌های الاستیسیته را به دست آورد؛ سپس این نتایج را با مقادیر بدست آمده از تحلیل نظری مقایسه کرد.

با استفاده از دو بارگذاری کششی در راستای  $x$  و راستای  $y$  و به-دست آوردن تنش‌ها و کرنش‌ها در هر حالت، ۴ مجهول با استفاده از ۴ معادله تنش-کرنش محاسبه می‌شوند. همچنین مدول برشی لانه زنبوری با استفاده از بارگذاری برشی خالص به دست خواهد آمد. مجموع نیروهای عکس‌العمل در یک جهت خاص تقسیم بر ناحیه ماکروسکوپی که این نیروها بر آن عمل می‌کنند برابر تنش ماکروسکوپی خواهد بود. رابطه تنش-کرنش در حالت ماکروسکوپی برای لانه زنبوری به این صورت خواهد بود که:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x^*}{1 - \nu_{xy}^* \nu_{yx}^*} & \frac{\nu_{xy}^* E_y^*}{1 - \nu_{xy}^* \nu_{yx}^*} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}^* E_x^*}{1 - \nu_{xy}^* \nu_{yx}^*} & \frac{E_y^*}{1 - \nu_{xy}^* \nu_{yx}^*} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (28)$$

مشخصات هندسی در نظر گرفته شده لانه زنبوری سلول بیضوی برای تحلیل عددی به صورت جدول ۶ می‌باشد.

جدول ۶- ابعاد هندسی مربوط به لانه زنبوری  $6 \times 9$  سلول بیضوی برای

تحلیل عددی			
$t(mm)$	$b(mm)$	$a(mm)$	$e$
۰/۰۵	۲	۲	۰
۰/۰۵	۱/۹۹	۲	۰/۱
۰/۰۵	۱/۹۵۹	۲	۰/۲
۰/۰۵	۱/۹۰۷	۲	۰/۳
۰/۰۵	۱/۸۳۳	۲	۰/۴
۰/۰۵	۱/۷۳۲	۲	۰/۵
۰/۰۵	۱/۶	۲	۰/۶
۰/۰۵	۱/۴۲۸	۲	۰/۷
۰/۰۵	۱/۲	۲	۰/۸
۰/۰۵	۰/۸۷۱	۲	۰/۹
۰/۰۵	۰/۲۸۲	۲	۰/۹۹

با جای‌گذاری مشخصات هندسی جدول ۶ و خواص ماده پلی اتیلن در روابط تئوری به‌دست آمده، مقدار ثابت‌های الاستیک مربوط به تحلیل تئوری برای این شرایط خاص به‌دست خواهند آمد که مقادیر آن در جدول ۷ نشان داده شده است. نتایج مربوط به تحلیل عددی به صورت جدول ۸ و جدول ۹ برای دو المان B22 و B23 به‌دست آمده است.

برای خروج از مرکزی‌های بزرگتر از ۰/۷ مقادیر به‌دست آمده برای  $\nu_{xy}^*$  منفی می‌شوند. برای به‌دست آوردن مقادیر  $\nu_{xy}^*$  برای لانه زنبوری‌های سلول بیضوی با خروج از مرکزی بزرگتر از ۰/۷ از تحلیل عددی استفاده خواهد شد.

جدول ۴- ضریب پواسون به‌دست آمده  $\nu_{xy}^*$  برای لانه زنبوری سلول

بیضوی		
$e$	$\frac{\Delta}{\delta}$	$\nu_{xy}^*$
۰	-۱/۴	۰/۸۰۸
۰/۱	-۱/۳۸	۰/۸
۰/۲	-۱/۳۴۴	۰/۷۹
۰/۳	-۱/۲۷	۰/۷۷
۰/۴	-۱/۱۶۳	۰/۷۳۲
۰/۵	-۱	۰/۶۶
۰/۶	-۰/۷۵۹	۰/۵۴۸

برای یک ماده اورتوتروپیک از مقارن بودن ماتریس نرمی نتیجه می‌شود که:

$$E_x^* \nu_{yx}^* = E_y^* \nu_{xy}^* \quad (29)$$

با استفاده از جدول‌های ۱، ۲ و ۴ و همچنین رابطه ۲۸، ضریب پواسون  $\nu_{yx}^*$  را به‌دست خواهد آمد. در جدول ۵ مقادیر محاسبه شده ضریب پواسون  $\nu_{yx}^*$  در حالت ماکروسکوپی برای لانه زنبوری سلول بیضوی برحسب خروج از مرکز نشان داده شده است.

جدول ۵- نتایج مربوط به ضریب پواسون  $\nu_{yx}^*$  لانه زنبوری سلول

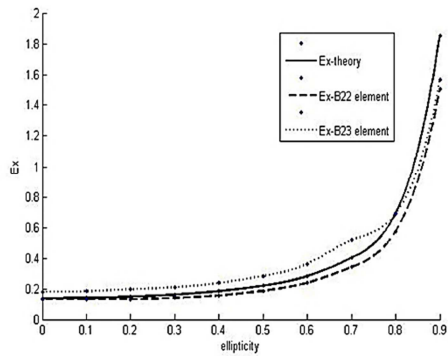
بیضوی	
$e$	$\nu_{yx}^*$
۰	۰/۸۰۸
۰/۱	۰/۸۱
۰/۲	۰/۸۵
۰/۳	۰/۹۲
۰/۴	۱/۰۱
۰/۵	۱/۱۳
۰/۶	۱/۲۶

### ۳- اعتبار سنجی

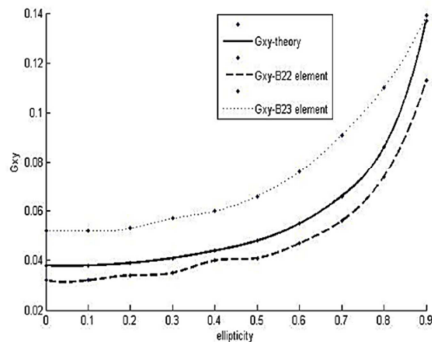
به منظور نشان دادن صحت نتایج به‌دست آمده از تحلیل عددی با استفاده از نرم افزار ABAQUS و همچنین مقاله "خواص الاستیک درون صفحه ای لانه زنبوری های سلول دایروی و بیضوی [۱]" استفاده خواهد شد. به منظور اعتبار سنجی، از خواص ماده پلی اتیلن با مدول الاستیسیته (GPa) ۰/۹ و ضریب پواسون ۰/۴ استفاده شده است. این ماده در ساخت لانه زنبوری‌ها به خاطر مقاومت در مقابل ضربه بالا، تغییر شکل موضعی خوب، مقاومت گرمایی مناسب، قیمت کم در مقابل عمر زیاد، وزن سبک و چند خاصیت دیگر کاربرد دارد.

<sup>1</sup> Timoshenko (quadratic) beam elements (B22, B32)

<sup>2</sup> Euler-Bernoulli (cubic) beams (B23, B33)



شکل ۷- نمودار  $E_x$  بر حسب خروج از مرکزی برای سه حالت نتایج تحلیل نظری، نتایج تحلیل عددی مربوط به المان B22 و نتایج تحلیل عددی مربوط به المان B23



شکل ۸- نمودار  $G_{xy}$  بر حسب خروج از مرکزی برای سه حالت نتایج تحلیل نظری، نتایج تحلیل عددی مربوط به المان B22 و نتایج تحلیل عددی مربوط به المان B23

جداول ۷-۹ و شکل های ۷ و ۸ نشان می دهند که نتایج تئوری به دست آمده با دقت خوبی درست است و همان طور که قابل پیشبینی بود دقت المان B22 بهتر از المان B23 است و نتایج به دست آمده برای این المان به نتایج تئوری نزدیک تر است. برای المان B22 کمترین درصد خطا در شکل ۷ برابر با ۶ درصد و در خروج از مرکزی های کوچک می باشد و بیشترین درصد خطا برابر با ۱۸ درصد و در خروج از مرکزی های بزرگ می باشد. برای المان B22 کمترین درصد خطا در شکل ۸ برابر با ۹ درصد می باشد و بیشترین درصد خطا برابر با ۱۷ درصد و در خروج از مرکزی های بزرگ می باشد. علت اختلاف (هرچند کم) نتایج نظری و عملی می تواند این باشد که در المان تئوری نقطه اتصال دو سلول ساده در نظر گرفته شده است و همچنین در محاسبه اثرژی کرنشی، اثرات نیروهای برشی و محوری در نظر گرفته نشده است. ضمن اینکه اگر المان تحلیل عددی را المانی با دقت بالاتر در نظر گرفت، احتمال نزدیک تر شدن پاسخ های عددی و تحلیلی وجود دارد. با توجه به اینکه ضرایب پواسون به دست آمده از نتایج عددی برای المان B22 بسیار به نتایج نظری نزدیک است می توان گفت که ضرایب پواسون برای لانه زنبوری های سلول بیضوی با خروج از مرکز بالاتر از ۰/۷ به صورت نشان داده شده در جدول ۸ خواهند بود.

جدول ۷- مقدار ثابت های الاستیک محاسبه شده با استفاده از نتایج نظری

$\theta_{yx}^*$	$\theta_{xy}^*$	$G_{xy}(MPa)$	$E_y(MPa)$	$E_x(MPa)$	$e$
۰/۸	۰/۸	۰/۰۳۸	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰
۰/۸۱	۰/۸	۰/۰۳۸	۰/۱۳۸	۰/۱۴۱	۰/۱
۰/۸۵	۰/۷۹	۰/۰۳۹	۰/۱۳۷	۰/۱۴۸	۰/۲
۰/۹۲	۰/۷۷	۰/۰۴۱	۰/۱۳۵	۰/۱۶۱	۰/۳
۱/۰۱	۰/۷۳	۰/۰۴۴	۰/۱۳۲	۰/۱۸۳	۰/۴
۱/۱۳	۰/۶۶	۰/۰۴۸	۰/۱۲۸	۰/۲۱۹	۰/۵
۱/۲۶	۰/۵۴	۰/۰۵۵	۰/۱۲۲	۰/۲۸۲	۰/۶
-	-	۰/۰۶۶	۰/۱۱۴	۰/۴۰۲	۰/۷
-	-	۰/۰۸۶	۰/۱۰۱	۰/۶۹۲	۰/۸
-	-	۰/۱۳۷	۰/۰۸	۱/۸۵۳	۰/۹
-	-	۰/۴۷۷	۰/۰۲۹	۵۶/۴۷	۰/۹۹

جدول ۸- مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون

ماکروسکوپی به دست آمده از تحلیل عددی برای المان B22

$\theta_{yx}^*$	$\theta_{xy}^*$	$G_{xy}(MPa)$	$E_y(MPa)$	$E_x(MPa)$	$e$
۰/۸	۰/۸	۰/۰۳۲	۰/۱۳	۰/۱۳	۰
۰/۸۱	۰/۸	۰/۰۳۲	۰/۱۱۸	۰/۱۳۲	۰/۱
۰/۸۲	۰/۷۸	۰/۰۳۴	۰/۱۱۸	۰/۱۳۲	۰/۲
۰/۸۸	۰/۷۴	۰/۰۳۵	۰/۱۱۸	۰/۱۴	۰/۳
۰/۹۵	۰/۶۹	۰/۰۴	۰/۱۱۸	۰/۱۵۶	۰/۴
۱/۰۶	۰/۶۲	۰/۰۴۱	۰/۱۰۸	۰/۱۸۶	۰/۵
۱/۲۳	۰/۵۴	۰/۰۴۷	۰/۱۰۴	۰/۲۳۹	۰/۶
۱/۵۲	۰/۴۳	۰/۰۵۶	۰/۰۹۷	۰/۳۴۱	۰/۷
۲/۱۲	۰/۳۲	۰/۰۷۴	۰/۰۸۶	۰/۵۷۵	۰/۸
۳/۹۱	۰/۱۷	۰/۱۱۳	۰/۰۶۶	۱/۵۰۶	۰/۹
۳۱/۵	۰/۰۲	۰/۴۰۷	۰/۰۲	۳۰/۱۹	۰/۹۹

جدول ۹- مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون

ماکروسکوپی به دست آمده از تحلیل عددی برای المان B23

$\theta_{yx}^*$	$\theta_{xy}^*$	$G_{xy}(MPa)$	$E_y(MPa)$	$E_x(MPa)$	$e$
۰/۷	۰/۷	۰/۰۵۲	۰/۱۸	۰/۱۸	۰
۰/۷۲	۰/۷	۰/۰۵۲	۰/۱۷۹	۰/۱۸۳	۰/۱
۰/۷۲	۰/۶۹	۰/۰۵۳	۰/۱۷۹	۰/۱۹۶	۰/۲
۰/۷۸	۰/۶۵	۰/۰۵۷	۰/۱۷۵	۰/۲۰۹	۰/۳
۰/۸۵	۰/۶۱	۰/۰۶	۰/۱۶۹	۰/۲۳۷	۰/۴
۰/۹۵	۰/۵۵	۰/۰۶۶	۰/۱۶۴	۰/۲۸۳	۰/۵
۱/۱	۰/۴۸	۰/۰۷۶	۰/۱۵۶	۰/۳۶۳	۰/۶
۱/۳۶	۰/۳۹	۰/۰۹۱	۰/۱۴۷	۰/۵۱۶	۰/۷
۱/۷۵	۰/۳۳	۰/۱۱	۰/۱۲۹	۰/۶۸۸	۰/۸
۳/۷۲	۰/۱۸	۰/۱۳۹	۰/۰۷۶	۱/۵۶۵	۰/۹
۳۱/۲۵	۰/۰۲	۰/۴۵	۰/۰۲	۳۰/۷۶	۰/۹۹

در شکل های ۷ و ۸ مقایسه نتایج مربوط به ثابت های الاستیسیته  $E_x$  و  $G_{xy}$  برای سه حالت نتایج تحلیل تئوری، نتایج تحلیل عددی مربوط به المان B22 و نتایج تحلیل عددی مربوط به المان B23 نشان داده شده است.

### ۳-۲- اعتبار سنجی با استفاده از مقاله معتبر علمی

برای اعتبار سنجی با استفاده از مقالات معتبر، نتایج نظری در این مقاله با نتایج مقاله "خواص الاستیک درون صفحه‌ای لانه زنبوری‌های سلول دایروی و بیضوی [۱]" مقایسه خواهند شد. مقدار ثابت‌های الاستیک محاسبه شده با استفاده از نتایج مقاله [۱] در جدول ۱۰ نشان داده شده است. با مقایسه جدول ۱۰ با نتایج نظری جدول ۷ مشاهده می‌شود که این نتایج با دقت بسیار خوبی با هم برابر هستند؛ البته در خروج از مرکزی‌های بالا کمی با هم اختلاف دارند که علت آن این است که در مقاله خواص الاستیک درون صفحه ای لانه زنبوری‌های سلول دایروی و بیضوی [۱]، ضرایب الاستیک با استفاده از چند ساده سازی و فرض، برای خروج از مرکزی‌های کوچک بدست آمده است. در نتیجه می‌توان گفت که نتایج نظری به‌دست آمده، نتایج درستی می‌باشد.

جدول ۱۰- مقدار ثابت‌های الاستیک محاسبه شده با استفاده از

نتایج مقاله [۱]				
$\theta_{yx}^*$	$G_{xy}(MPa)$	$E_y(MPa)$	$E_x(MPa)$	e
۰/۸۰۶	۰/۰۳۸	۰/۱۳۹	۰/۱۳۹	۰
۰/۸۱۳	۰/۰۳۸	۰/۱۳۹	۰/۱۴۱	۰/۱
۰/۸۳۸	۰/۰۴	۰/۱۳۷	۰/۱۴۸	۰/۲
۰/۸۸۲	۰/۰۴۱	۰/۱۳۵	۰/۱۶۲	۰/۳
۰/۹۵	۰/۰۴۴	۰/۱۳۲	۰/۱۸۳	۰/۴
۱/۰۵	۰/۰۴۹	۰/۱۲۸	۰/۲۱۷	۰/۵
۱/۲۲	۰/۰۵۵	۰/۱۲۱	۰/۲۷۵	۰/۶
۱/۵۲	۰/۰۶۷	۰/۱۱۴	۰/۳۷۸	۰/۷
۲/۱۱	۰/۰۸۸	۰/۰۹۴	۰/۵۷۲	۰/۸
۳/۸۸	۰/۱۴۶	۰/۰۶	۰/۵۹۶	۰/۹

### ۴- نتیجه گیری

ضعف عمده مقالات مربوط به ثابت‌های الاستیک لانه زنبوری سلول بیضوی این بود که برای خروج از مرکز های محدود این نتایج بدست آمده است. در این مقاله با استفاده از رابطه پارامتری بیضی، قضیه کاستیگلیانو، نظری انرژی کرنشی و انتگرال گیری به روش سیمپسون این ضعف برطرف شد و ثابت‌های الاستیک درون صفحه‌ای لانه زنبوری سلول بیضوی بدون هیچ محدودیتی برای خروج از مرکزی محاسبه شدند. مشاهده شد مدول یانگ و مدول برشی با توان سوم نسبت ضخامت سلول به شعاع کوچک بیضی، رابطه مستقیم دارد. همچنین مشاهده شد که ثوابت الاستیک به خروج از مرکزی بیضی وابسته می‌باشد. مقدار ثابت‌های مربوط به رابطه مدول یانگ در راستای x، با افزایش خروج از مرکزی (تغییر سلول از دایره به سمت خط راست) افزایش یافت ولی مقدار ثوابت مربوط به رابطه‌های مدول یانگ در راستای y و مدول برشی، با افزایش خروج از مرکزی کاهش یافته و به سمت صفر میل کرده است، چون سلول تبدیل به خط شده است و خواص خود را در راستایی که شعاع سلول کاهش یافته است (یعنی راستای y) از دست داده است. همچنین نشان داده شد، ضریب پواسون با خروج از مرکزی سلول رابطه دارد و با افزایش خروج از مرکز،  $\theta_{xy}^*$  افزایش و  $\theta_{yx}^*$  کاهش یافته است. در انتها با استفاده از تحلیل عددی با استفاده از نرم افزار ABAQUS و همچنین نتایج یک مقاله معتبر علمی صحت نتایج بررسی شد. با توجه به حل عددی و حل نظری مشاهده شد

که استفاده از رابطه پارامتری بیضی دقت حل را بسیار افزایش می‌دهد. همچنین با توجه به اینکه در این روش محدودیتی برای خروج از مرکزی وجود ندارد می‌توان گفت که این روش حل یک روش کامل می‌باشد.

### ۵- فهرست علائم

$\sigma$	تنش نرمال ( $Nm^{-2}$ )
$\tau$	تنش برشی ( $Nm^{-2}$ )
$\epsilon$	کرنش نرمال
$\gamma$	کرنش برشی
$E$	مدول یانگ ( $Nm^{-2}$ )
$G$	مدول برشی ( $Nm^{-2}$ )
$\nu$	ضریب پواسون

### ۶- مراجع

- [1] Chung J. and Wass A. M., The inplane elastic properties of circular cell and elliptic cell honeycombs, Acta Mech., Vol. 144, pp. 29-42, 2000.
- [2] Chung and Waas A. M., The micropolar elasticity constants of circular cell honeycombs, Proceedings of the Royal Society, Vol. 465, pp. 25, 2009.
- [3] Chung J. and Wass A. M., The inplane orthotropic couple-stress elasticity constants of elliptical cell honeycombs, International Journal of Engineering Science, Vol. 48, pp. 1123-1136, 2010.
- [4] Lin T. C., Chen T. J. and Huang J. S., In-plane elastic constants and strengths of circular cell honeycombs, Composites Science and Technology, Vol. 72, pp. 1280-1385, 2012.
- [5] Lin T. C. and Huang J. S., In-plane mechanical properties of elliptical cell honeycombs, Composite Structures, vol. 104, pp. 14-20, 2013.
- [6] Gibson L. J. and Ashby M. F., Cellular solids: Structure and properties, Second Edition, pp. 93-174, New York: Cambridge University Press, 1999.
- [7] Zhang J. and Ashby M. F., The out of plane properties of honeycombs, Int. J. Mech. Sci., Vol. 34, pp. 475-489, 1992.
- [8] Balawi S. and Abot J., A refined model for the effective in-plane elastic moduli of hexagonal honeycombs, Composite Structures, Vol. 84, pp. 147-158, 2008.
- [9] Mora R. J. and Waas A. M., Evaluation of the Micropolar elasticity constants for honeycombs, Acta Mechanica, Vol. 192, pp. 1-16, 2007.
- [10] Chuang C. H. and Huang J. S., Yield surfaces for hexagonal honeycombs with plateau borders under in-plane biaxial loads, Acta Mechanica, Vol. 159, pp. 157-172, 2002.
- [11] Ju J., Summers J. D., Ziegert J. and Fadel G., Design of Honeycombs for Modulus and Yield Strain in Shear, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 134, pp. 011002-1-15, 2012.
- [12] Jiménez F. L. and Triantafyllidis N., Buckling of rectangular and hexagonal honeycomb under combined axial compression and transverse shear, International Journal of Solids and Structures, Vol. 50, p. 3934-3946, 2013.
- [13] Lin C. L., Chen T. J. and Huang J. S., Creep-rupturing of elliptical and circular cell honeycombs, Composite Structures, Vol. 106, pp. 799-805, 2013.
- [14] Gere J. M., Mechanics of Materials, Sixth Edition, pp. 641-658, Belmont: Thomson Learning Inc., 2004.
- [15] Lin C. L., Yang M. Y. and Huang J. S., Effects of solid distribution on the out-of-plane elastic properties of hexagonal honeycombs, Composite Structures, Vol. 100, pp. 436-442, 2013.
- [16] Sadd M. H., Elasticity: Theory, Applications and Numerics, Second Edition, pp. 31-133, Burlington: Elsevier Inc., 2009.