

تحلیل سه بعدی تنش در ورق کامپوزیتی با لایه گذاری متعامد تحت بارگذاری خمشی با استفاده از نظریه لایه‌ای

عیسی احمدی*
دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران
ندا عطایی
کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده

ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد که از لایه‌های ارتوتروپیک تشکیل شده است و تحت بارگذاری خمشی قرار دارد مدلسازی شده و تنش‌های سه بعدی و مخصوصاً میدان سه بعدی تنش در نواحی نزدیک به لبه مورد بررسی قرار گرفته است. برای مدلسازی ورق کامپوزیتی، ابتدا میدان جابجایی متناسب برای ورق در نظر گرفته شده است که در آن جملات مربوط به پاسخ کلی و موضعی ورق از هم تفکیک شده است. سپس برای فرمولبندی مساله از نظریه لایه‌ای جابجایی محور استفاده شده است و معادلات تعادل کلی و موضعی ورق و شرایط لبه‌ای در نظریه لایه‌ای با استفاده از روش حداقل انرژی پتانسیل کل به دست آمده است. معادلات حاکم بر ورق در نظریه لایه‌ای شامل تعداد زیادی معادله دیفرانسیل کوپل بر حسب جابجایی‌ها می‌باشد. با حل این معادلات، میدان جابجایی برای ورق کامپوزیتی متعامد به دست آمده است. برای افزایش دقت استخراج تنش‌های برون‌صفحه‌ای، تنش‌های بین لایه‌ای با دو روش استخراج شده است. برای صحت‌گذاری بر نتایج نظریه لایه‌ای از مدلسازی المان محدود استفاده شده است و ملاحظه شده است که نتایج با نتایج حل لایه‌ای با دقت بالایی انطباق دارد. سپس توزیع تنش‌های بین لایه‌ای در ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد که تحت ممان خمشی قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. **واژه‌های کلیدی:** ورق کامپوزیتی، لایه‌گذاری متعامد، تنش‌های بین لایه‌ای، بارگذاری خمشی، نظریه لایه‌ای.

Stresses Analysis in the Cross-ply Composite Plate Subjected to Bending Load Using Layerwise Theory

I. Ahmadi
N. Atace

Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran
Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran

Abstract

In this paper a composite plate with cross-ply lamination subjected to bending moment is analyzed and the 3D stress state in the plate is investigated. The interlaminar stresses in composite plates may lead to delamination of composite plies near the edges. An appropriate displacement field is employed for the cross-ply plate in which the global and local response of the plate to the loading is separated. The layerwise theory (LWT) is employed for formulation of the problem. The governing equations of the plate include several coupled differential equations which are related to the global and local equilibrium equations of the plate. The governing equations are solved and the displacement field in the plate is obtained. In order to increase the accuracy, 3 approach is used for calculation of the interlaminar stresses in the plate. A finite element solution is used to verify the results of the LWT and it is seen that the prediction of LWT is in good agreement by the finite element analysis. In the numerical results, the interlaminar stress state in the cross-ply composite plate which is subjected to bending load is studied.

Keywords: Composite plate, Cross-ply lamination, Interlaminar stresses, Bending load, Layer-wise theory.

۱-مقدمه

استحکام در راستای الیاف بسیار پایین‌تر است. تنش‌های بین لایه‌ای عمودی و برشی که در ضخامت سازه کامپوزیتی بوجود می‌آید در سطح اتصال لایه‌های مختلف افزایش می‌یابد و با توجه به پایین بودن استحکام اتصال لایه‌ها و استحکام جانبی این تنش‌ها ممکن است باعث ایجاد خرابی موضعی و یا لایه-لایه شدن شود. به علت اختلاف خواص مکانیکی لایه‌های مختلف، تمایل آنها به تغییر شکل‌های جانبی در اثر بارگذاری متفاوت است که منجر به ایجاد تنش‌های بین لایه‌ای نسبتاً بزرگ در نزدیکی لبه‌های آزاد این سازه‌ها می‌شود که این تنش‌ها را تنش‌های لایه مرزی می‌گویند. با توجه به ضعیف بودن اتصال بین لایه‌ها، تنش‌های بین لایه‌ای به وجود آمده در نزدیکی لبه‌های سازه ممکن است باعث خرابی و لایه-لایه شدن زود هنگام این سازه‌ها در نزدیکی لبه شود. با توجه به اینکه نظریه‌های تک لایه معادل قابلیت تحلیل این تنش‌ها را ندارد و به علت اهمیت این تنش‌ها در سازه‌های کامپوزیتی، هدف اصلی این مقاله محاسبه دقیق میدان تنش و مخصوصاً تنش‌های بین لایه‌ای در محل اتصال لایه‌ها و در نزدیکی

گسترش روز افزون صنایع مختلف و مخصوصاً صنایع پیشرفته در دهه‌های اخیر نیاز به سازه‌هایی با قابلیت بالای تحمل بارهای مکانیکی را افزایش داده است. علاوه بر قابلیت تحمل بارهای مکانیکی، پایین بودن وزن سازه یک فاکتور مهمی برای سازه‌هایی است که در صنایع مختلف استفاده می‌شود و این مساله بخصوص در سازه‌های هوافضا و صنایع حمل و نقل دارای اهمیت اساسی است و در سایر صنایع مانند صنایع ساختمان نیز اهمیت این موضوع رو به فزونی است. برای دستیابی به این دو پارامتر در طراحی و ساخت سازه‌های پیشرفته، استفاده از الیاف پیشرفته و ساخت کامپوزیت‌های الیافی رونق یافته است. از طرف دیگر برای تحمل بارهای مختلف استفاده از سازه‌های کامپوزیتی با ساختار چند لایه‌ای و یا ساختار ساندویچی مطرح شده و تولید و استفاده از این سازه‌ها در دهه‌های اخیر گسترش پیدا کرده است. مساله مهمی که در سازه‌های کامپوزیتی مطرح است استحکام اتصال لایه‌ها به یکدیگر و استحکام جانبی لایه‌ها می‌باشد که نسبت به

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: i_ahmadi@znu.ac.ir

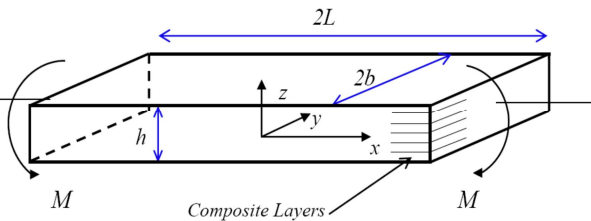
لیه‌های آزاد در ورق‌های کامپوزیتی می‌باشد. از طرف دیگر با توجه به اینکه سازه‌های کامپوزیتی اکثراً تحت بار خمشی هستند لذا ورق کامپوزیتی تحت بار خمشی مورد بررسی قرار گرفته است.

در زمینه محاسبه تنش‌ها در سازه‌های کامپوزیتی تحقیقات زیادی توسط محققان انجام شده است که در ذیل به بعضی از مهمترین آنها اشاره شده است. در سال ۱۹۷۰ پایپ و پاگانو [۱] با استفاده از شکل کاهش یافته‌ی معادلات الاستیسیته و روش تفاضلات محدود، نتایج عددی برای تنش بین لایه‌ای در ورق‌های کامپوزیتی تحت بار کششی ارائه کردند. تانگ و لوی [۲] با استفاده از نظریه لایه مرزی برای ورق‌های دارای لایه‌گذاری متقارن تحت کشش به بررسی تنش بین لایه‌ای پرداختند. سی‌جان و همکارانش [۳] حل تحلیلی برای تنش‌های برون‌صفحه‌ای در یک پوسته استوانه‌ای دو لایه تقویت شده با الیاف ارائه کردند. مورتی و چامسین [۴] با استفاده از المان محدود تنش بین لایه‌ای در ورق‌های کامپوزیتی با پهنای مختلف را بررسی کردند. ونگ و چو [۵] تنش‌های سه بعدی حرارتی گذرا را در ورق‌های کامپوزیتی که مرزهای آن تحت تغییر ناگهانی دما قرار گرفته است را مطالعه کردند و مشاهده نمودند تنش‌ها در نزدیکی مرزهای آن به اندازه قابل توجهی بزرگتر از سایر مناطق است. کانت و منون [۶] با استفاده از فرمولبندی المان محدود C^0 و روش تفاضلات محدود به محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای در پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با الیاف پرداختند. لی و لیو [۷] با استفاده از المان‌های هرمیتی که امکان پیش‌بینی پیوسته کرنش‌ها و تنش‌های بین لایه‌ای را دارد به مطالعه و تحلیل تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های ضخیم و نازک پرداختند. همچنین لو و لیو [۸] نظریه پیوسته‌ای برای تنش برشی بین لایه‌ای در ورق‌های ضخیم و نازک کامپوزیتی ارائه کردند و نتایج نظریه خود را با حل الاستیسیته پاگانو مقایسه کردند. وو و کو [۹] و وو و یین [۱۰] یک نظریه المان محدود برای تحلیل تنش‌های بین لایه‌ای و تحلیل ورق‌های ضخیم کامپوزیتی ارائه کردند و از آن برای تحلیل ورق تحت بار جانبی سینوسی استفاده نمودند. مورتور و وبر [۱۱] یک حل تحلیلی برای محاسبه تنش‌های لبه آزاد در ورق‌های لایه‌ای تحت بار حرارتی و مکانیکی ارائه کردند و امکان خرابی در لبه را با استفاده از معیار خرابی مطالعه نمودند. کیم و آتلوری [۱۲] یک روش تقریبی برای بررسی تنش بین لایه‌ای در نزدیکی لبه‌های آزاد در ورق کامپوزیتی تحت خمش برشی خارج از صفحه را توسعه دادند. بویتنوت و همکاران [۱۳] با استفاده از نظریه مرتبه اول برشی به تخمین تنش‌های برون‌صفحه‌ای و بررسی شکست در پانل‌های استوانه‌ای با شرایط مرزی گیردار که تحت فشار داخلی قرار گرفته‌اند پرداختند. آنها از تغییرات در راستای طول صرف‌نظر کرده و مساله را به‌صورت یک بعدی حل نمودند. دینگ و بشیر [۱۴] برای تحلیل تنش بین لایه‌ای مبانی نظری برای نظریه لایه‌ای دو بعدی شامل کرنش برشی و نرمال ارائه کردند. کارا [۱۵] با استفاده از نظریه لایه‌ای پیچیده به تجزیه و تحلیل صفحات کامپوزیتی چند لایه پرداخت. شو و همکارش [۱۶] توزیع تنش در لایه‌ی کامپوزیتی با لایه گذاری متقارن را تحت لبه‌های مرزی متفاوت بررسی کردند. پای و پالاروتو [۱۷] با استفاده از نظریه لایه‌ای مرتبه بالا برای یک المان چهار گره‌ای پاسخ دینامیکی صفحات ساندویچی را بررسی کردند، ونگ و همکاران [۱۸] به بررسی تنش‌های بین لایه‌ای دینامیکی در ورق‌های کامپوزیتی تحت ارتعاشات آزاد و

بارگذاری حرارتی پرداختند. چاکراباتی و شیخ [۱۹] با استفاده از نظریه ورق‌ها با پیوستگی تنش برشی بین لایه‌ای به مطالعه ورق‌های ساندویچی پرداختند.

طهانی و نثیر [۲۰] تنش‌های بین لایه‌ای در ورق متعامد کامپوزیتی تحت بار کششی را با استفاده از نظریه لایه‌ای محاسبه نمودند. زو و همکاران [۲۱] تنش‌های حرارتی در استوانه کامپوزیتی که تحت بارگذاری حرارتی قرار دارد را با استفاده از مدلسازی المان محدود سه بعدی با المان ۳۲ گره‌ای بررسی کردند. پلاگیاناکوس و ساروانوس [۲۲] با استفاده از نظریه لایه‌ای مرتبه بالا تنش‌های برشی در ورق‌های کامپوزیتی و ساندویچی را مورد مطالعه قرار دادند. نثیر و مالکی [۲۳] تنش‌های بین لایه‌ای را در ورق کامپوزیتی تحت بارگذاری کششی با استفاده از حل الاستیسیته و همچنین نظریه لایه‌ای به دست آوردند. عسگری و اخلاقی [۲۴] توزیع تنش‌های سه بعدی حرارتی در استوانه با طول محدود را با روش المان محدود به دست آوردند. طهانی و میرزابابایی [۲۵] با ارائه یک حل تحلیلی به بررسی اثر کوپلینگ الکترومکانیکی بر تنش‌های برون‌صفحه‌ای در نزدیکی لبه‌های آزاد چند لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. همچنین اندخشیده و طهانی [۲۶] با استفاده از روش کانتروپج تنش‌های بین لایه‌ای در ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری دلخواه تحت بار درون‌صفحه‌ای را محاسبه نمودند. افشین و همکاران [۲۷] با استفاده از نظریه لایه‌ای تنش‌های بین لایه‌ای در پانل کامپوزیتی را که تحت بار گسترده جانبی قرار دارد مورد مطالعه قرار دادند. مانتری و همکارش [۲۸] نظریه تغییر شکل برشی جدیدی برای صفحات کامپوزیتی ارائه کردند. کروزر و همکاران [۲۹] تنش‌های برون‌صفحه‌ای در تیرهای کامپوزیتی ساندویچی تحت خمش را تحت تغییر شکل‌های بزرگ محاسبه نمودند. یانگ و همکارانش [۳۰] تنش‌های بین لایه‌ای در صفحه‌ای در معرض کرنش محوری یکنواخت را با استفاده از ترکیب نظریه برشی مرتبه اول و نظریه لایه‌ای محاسبه نمودند. رائو و همکارانش [۳۱] با استفاده از روش تغییرات، تنش‌های بین لایه‌ای را در پنل‌های ساندویچی با هسته لانه زنبوری پیش‌بینی کردند. کاپور و همکاران [۳۲] با استفاده از فرمولبندی المان محدود و المان ایزوپارامتریک خطی و المان مرتبه بالا تنش‌های برون‌صفحه‌ای را در ورق‌های کامپوزیتی به دست آوردند. رضوانی و قاسمی قلعه‌بهنم [۳۳] تنش‌های بین لایه‌ای در ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری متقارن تحت بار کششی یکنواخت را محاسبه نمودند. احمدی [۳۴] تنش‌های بین لایه‌ای در پنل‌های کامپوزیتی که تحت بارگذاری کششی قرار دارد را با استفاده از نظریه لایه‌ای محاسبه نمود.

همان‌گونه که ملاحظه شد مطالعه منابع نشان می‌دهد که مطالعه تنش‌های بین لایه‌ای و برون‌صفحه‌ای در ورق‌های تحت بار مکانیکی به‌طور عمده در رابطه با بارگذاری کششی یکنواخت طولی (کرنش طولی یکنواخت) و یا بار جانبی می‌باشد و تحلیل تنش‌های برون‌صفحه‌ای و لایه‌مرزی در سازه‌های کامپوزیتی که تحت ممان خمشی و کوپل پیچشی قرار دارد کمتر پرداخته شده است و نتایج عددی از توزیع و مقدار تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌های آزاد و سایر مناطق ورق‌های کامپوزیتی تحت بار خمشی در منابع یافته نشده است. همچنین در تحقیقات قبلی که از نظریه لایه‌ای برای پیش‌بینی تنش‌های بین لایه‌ای استفاده کرده است از ترکیبی از نظریه لایه‌ای و نظریه مرتبه اول برشی استفاده شده است که از نظریه مرتبه اول برشی



شکل ۱- ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد، محورهای مختصات، ابعاد و بارگذاری

با توجه به نوع بارگذاری، برای این ورق که طول آن نسبت به عرض و ضخامت آن بسیار بزرگ است می‌توان استنباط کرد که در نواحی دورتر از نقاط بارگذاری در $x = \pm L$ کرنش و تنش نسبت به طول ورق یکنواخت است و در همه مقاطع عمود بر محور x یکسان بوده و لذا میدان کرنش در ورق کامپوزیتی تابعی از مختصه x نمی‌باشد. در این حالت با مستقل بودن مؤلفه‌های کرنش ورق نسبت به مختصه x با حذف انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های رابطه کرنش-جابجایی و با حذف جملات‌های مربوط به جابجایی‌های صلب و دوران‌های صلب و همچنین در نظر گرفتن تقارن‌های موجود در مساله نسبت به صفحه‌های مختصات، می‌توان نشان داد که میدان جابجایی برای ورق طویل تحت بارگذاری فوق به صورت رابطه زیر به دست می‌آید [۳۵].

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= C_5 x z + C_6 x + u(y, z) \\ u_2(x, y, z) &= -C_3 x z + v(y, z) \\ u_3(x, y, z) &= -\frac{1}{2} C_5 x^2 + C_3 x z + w(y, z) \end{aligned} \quad (1)$$

که در رابطه فوق $u_1(x, y, z)$ ، $u_2(x, y, z)$ و $u_3(x, y, z)$ جابجایی ورق در راستای x ، y و z برای نقطه‌ای در ورق است که قبل از تغییر شکل در نقطه (x, y, z) قرار دارد. همان‌گونه که در رابطه (۱) ملاحظه می‌شود میدان جابجایی ورق دارای جملات‌های مختلف است که جملات‌های دارای ضرایب C_3 ، C_5 و C_6 نشان دهنده پاسخ کلی ورق نسبت به بارگذاری می‌باشد و از طرف دیگر میدان جابجایی دارای توابع مجهول $u(y, z)$ ، $v(y, z)$ و $w(y, z)$ می‌باشد که تابعی از مختصه y و z بوده وابسته به مختصه طول نیستند. با دقت در میدان جابجایی مشاهده می‌شود که C_6 کرنش عمودی صفحه میانی ورق در راستای x است. همچنین $C_5 x$ مقدار چرخش صفحه‌های (مقاطع) عمود بر محور x ورق حول محور y در جهت منفی و $C_3 x$ مقدار زاویه پیچیده شدن مقاطع ورق که عمود بر محور x می‌باشند. همچنین توابع $u(y, z)$ ، $v(y, z)$ و $w(y, z)$ توابع جابجایی هستند که در تمام مقاطع عمود بر محور x دارای مقدار یکسان هستند که این توابع جابجایی، رفتار موضعی ورق را در برابر بارگذاری نشان می‌دهد که منجر به ایجاد تنش‌های برون‌صفحه‌ای و پدیده لایه‌مرزی در ورق می‌شود. از طرف دیگر در مطالعات و بررسی‌های متعدد نشان داده شده است که نظریه‌های کلاسیک و مرتبه اول برشی می‌توانند رفتار کلی ورق (نازک) را با دقت قابل قبولی پیش‌بینی کنند لذا در نظریه لایه‌ای هدف اصلی به دست آوردن رفتار موضعی ورق مانند تنش‌های برون‌صفحه‌ای و حالت سه بعدی تنش در لایه مرزی در نزدیکی لبه‌ها می‌باشد. لذا در نظریه لایه‌ای هدف اصلی به دست آوردن میدان جابجایی موضعی ورق در کنار رفتار کلی آن می‌باشد. با قرار دادن میدان جابجایی در روابط

برای به دست آوردن پاسخ کلی ورق مانند کرنش یکنواخت طولی در اثر نیروی کششی خارجی استفاده شده است و تنها پاسخ موضعی ورق با استفاده نظریه لایه‌ای استخراج شده است. در این تحلیل‌ها اثر رفتار موضعی در پیش‌بینی پاسخ کلی نادیده گرفته می‌شود که باعث به وجود آمدن خطا می‌گردد. در این مقاله ورق کامپوزیتی بلند با لایه گذاری متعامد که تحت بار مکانیکی خمشی قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. فرمولبندی مساله بر اساس نظریه لایه‌ای جابجایی ردی^۱ انجام شده است. میدان جابجایی ورق بر اساس نظریه لایه‌ای نوشته شده است و سپس میدان کرنش با استفاده از رابطه کرنش-جابجایی استخراج شده است. با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل معادلات تعادل کلی و معادلات تعادل موضعی ورق و شرایط مرزی لبه‌ای متناسب در لبه‌های ورق بر حسب منته‌های تنش استخراج شده است و سپس بر حسب توابع جابجایی نوشته شده است. معادلات تعادل ورق به صورت ماتریسی نوشته شده است و با تعویض متغیر، جواب تحلیلی برای معادلات تعادل موضعی استخراج شده است. سپس با اعمال شرایط مرزی لبه آزاد و با استفاده از معادلات تعادل کلی ثابت‌های انتگرال‌گیری و ثابت مربوط به پاسخ کلی ورق به دست آمده است و حل مساله در نظریه لایه‌ای کامل شده است. از دو روش برای استخراج تنش‌های برون‌صفحه‌ای استفاده شده است و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شده است. در روش اول تنش‌های بین لایه‌ای با استفاده از رابطه تنش-کرنش از روی کرنش‌ها استخراج شده است و برای به دست آوردن کرنش از روش مشتق‌گیری پیش‌رونده استفاده شده است. در حالت دیگر از روش مشتق‌گیری پس‌رونده استفاده شده است و نتایج با همدیگر مقایسه شده است. ملاحظه شده است که مقدار متوسط به دست آمده از دوروش انطباق و دقت بالایی دارد و لذا از مقدار متوسط استفاده شده است. در قسمت نتایج عددی مقدار و توزیع تنش‌ها بین لایه‌ای در ورق کامپوزیتی متعامد که تحت ممان خمشی قرار دارد محاسبه و ارائه شده است.

۲- مدل‌سازی

یک ورق با ساختار کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد مطابق شکل (۱) در نظر گرفته شده است که در راستای طول ورق طویل می‌باشد به این معنی که طول آن نسبت به پهنا و ضخامت آن خیلی بزرگتر است. ضخامت ورق برابر با h ، پهنای آن برابر با $2b$ و طول آن برابر با $2L$ می‌باشد. محورهای مختصات x, y, z در مرکز ورق قرار گرفته است به طوری که محورهای x و y موازی لبه‌های ورق بوده، محور x در راستای طول، محور y در راستای پهنا و محور z در راستای ضخامت ورق و عمود بر سطوح تحتانی و فوقانی است و مبدأ مختصات در مرکز ورق قرار دارند به طوری که لبه‌های ورق در مختصات $x = \pm L$ و $y = \pm b$ قرار دارد و سطوح فوقانی و تحتانی ورق در مختصات $z = \pm h/2$ قرار دارد. ورق در لبه‌های خود در $x = \pm L$ تحت بار مکانیکی ممان خمشی M قرار گرفته است.

¹ Reddy Layer-wise theory

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_6 + C_5 z, & \varepsilon_{xy} &= U'_k \Phi_k - C_3 z, \\ \varepsilon_y &= V'_k \Phi_k, & \varepsilon_{xz} &= U_k \Phi'_k + C_3 y, \\ \varepsilon_z &= W'_k \Phi'_k, & \varepsilon_{yz} &= V_k \Phi'_k + W'_k \Phi_k \end{aligned} \quad (5)$$

که در روابط فوق علامت پریم روی Φ_k نشان دهنده مشتق نسبت به z و علامت پریم روی U_k, V_k, W_k نشان دهنده مشتق نسبت به y می‌باشد. برای استخراج روابط حاکم بر ورق از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استفاده شده است. با توجه به اینکه کرنش‌ها و تنش‌ها وابسته به مختصه x نمی‌باشند انرژی کرنشی ورق به صورت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\delta U = 2L \int_{-b-h/2}^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dz dy \quad (6)$$

که σ_{ij} تنش و $\delta \varepsilon_{ij}$ تغییرات کرنش می‌باشد. همچنین کار انجام شده ناشی از ممان خمشی خارجی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\delta W = 2ML \delta C_5 \quad (7)$$

با بهره‌گیری از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل [۳۶] و با استفاده از روابط (۶) و (۷)، معادلات تعادل حاکم بر ورق شامل ۳ معادله تعادل کلی و $3(N+1)$ معادله تعادل موضعی به دست می‌آید. سه معادله تعادل کلی ورق به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-b-h/2}^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz dy \\ M &= \int_{-b-h/2}^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz dy \\ 0 &= \int_{-b-h/2}^b \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz} y - \sigma_{xy} z) dz dy \end{aligned} \quad (8)$$

همچنین تعداد $(3N+1)$ معادله تعادل موضعی حاکم بر ورق با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} M_{xy,y}^k - Q_x^k &= 0, \\ M_{y,y}^k - Q_y^k &= 0, & k &= 1, 2, \dots, N+1 \\ R_{y,y}^k - N_z^k &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

که در رابطه (۹) منته‌های تنش در نظریه لایه‌ای به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{aligned} (M_y^k, M_{xy}^k, R_y^k) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}) \Phi_k dz \\ (Q_x^k, Q_y^k, N_z^k) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z) \Phi'_k dz \end{aligned} \quad (10)$$

همچنین شرایط مرزی حاکم بر ورق در لبه‌های آن در $y = \pm b$ با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}U_k &= 0, \text{ or } M_{xy}^k = 0, \\ \mathcal{S}W_k &= 0, \text{ or } M_y^k = 0, & k &= 1, 2, \dots, N+1 \\ \mathcal{S}W_k &= 0, \text{ or } R_y^k = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

مربوط به کرنش-جابجایی‌های کوچک میدان کرنش در ورق به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_6 + C_5 z, & \varepsilon_y &= v_{,y}, \\ \varepsilon_z &= w_{,z}, & \varepsilon_{xy} &= u_{,y} - C_3 z, \\ \varepsilon_{xz} &= u_{,z} + C_3 y, & \varepsilon_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} \end{aligned} \quad (2)$$

۲-۱- نظریه لایه‌ای

برای فرمولبندی مساله از نظریه لایه‌ای ردی^۲ استفاده شده است. برای حل مساله بر اساس نظریه لایه‌ای باید جملات مربوط به جابجایی موضعی ورق شامل $u(y,z), v(y,z), w(y,z)$ به شکل میدان جابجایی مورد استفاده در نظریه لایه‌ای نوشته شود. در نظریه لایه‌ای ردی فرض می‌شود که ورق از تعداد نسبتاً زیادی لایه فرضی تشکیل شده است که خواص مادی در هر لایه یکسان است و به این لایه‌ها، لایه عددی^۳ گفته می‌شود. به سطح مشترک بین این لایه‌های عددی، سطح عددی^۴ گفته می‌شود. اگر ضخامت ورق کلاً به N لایه عددی تقسیم شود در این صورت $N+1$ سطح عددی در ورق وجود خواهد داشت که از سطح پایین تا بالای ورق به ترتیب از سطح I تا $N+1$ شماره‌گذاری می‌شود. در نظریه لایه‌ای توابع مجهول در ضخامت ورق بر اساس مقدار آن تابع در روی این سطوح عددی درونیابی می‌شود. اگر فرض کنیم مقدار این جابجایی‌های موضعی در روی سطح عددی k ام در راستای x, y, z به ترتیب برابر با U_k, V_k, W_k باشد در این صورت مقدار این توابع جابجایی را در درون لایه‌ها می‌توان به صورت رابطه زیر درونیابی کرد که در آن توابع $\Phi_k(z)$ توابع درون یاب لاگرانژی هستند.

$$\begin{aligned} u_1 &= C_5 x z + C_6 x + U_k(y) \Phi_k(z) \\ u_2 &= -C_3 x z + V_k(y) \Phi_k(z) \\ u_3 &= -\frac{1}{2} C_5 x^2 + C_3 x z + W_k(y) \Phi_k(z) \end{aligned} \quad (3)$$

توابع درون یاب لاگرانژی خطی برای سطح عددی k ام به نحوی است که مقدار آن از I بر روی سطح عددی مربوطه (k ام) شروع می‌شود و به صورت خطی تا مقدار صفر در سطح عددی پایینی و بالایی آن سطح کاهش می‌یابد. لذا تابع درون یاب به صورت رابطه (۴) قابل بیان است.

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} \frac{1}{t_{k-1}}(z - z_{k-1}), & z \leq z_{k-1} \\ \frac{1}{t_k}(z_{k+1} - z), & z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ 0, & z \leq z_{k-1} \text{ or } z \geq z_{k+1} \end{cases} \quad (4)$$

که در رابطه فوق t_k ضخامت لایه عددی k ام و z_k مختصات سطح عددی k ام می‌باشد. با جایگذاری از میدان جابجایی نظریه لایه‌ای (۳) در روابط کرنش-جابجایی (۲)، میدان کرنش ورق در نظریه لایه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید.

^۲Reddy Layer-wise Theory

^۳Numerical Layer

^۴Numerical Surface

$$D_{66}^{kj} U_j'' - A_{55}^{kj} U_j = A_{55}^k C_3 y, \quad (16)$$

$$D_{22}^{kj} V_j'' + (B_{23}^{kj} - B_{44}^{jk}) W_j' - A_{44}^{kj} V_j = 0$$

$$D_{44}^{kj} W_j'' + (B_{44}^{kj} - B_{23}^{jk}) V_j' - A_{33}^{kj} W_j = \tilde{A}_{13}^k C_5 + A_{13}^k C_6$$

که معادلات فوق شامل $3(N+I)$ معادله است. همچنین معادلات تعادل کلی ورق که در رابطه (۸) آمده است. به صورت زیر بر حسب توابع جابجایی قابل بیان است.

$$0 = 2b\bar{A}_{11} C_6 + 2b\bar{A}_{11} C_5 + \int_{-b}^b (B_{12}^k V_k' + A_{13}^k W_k) dy \quad (17)$$

$$M = 2b\bar{A}_{11} C_6 + 2b\bar{A}_{11} C_5 + \int_{-b}^b (\bar{B}_{12}^k V_k' + \bar{A}_{13}^k W_k) dy \quad (18)$$

$$0 = (2b\bar{A}_{66} + \frac{2}{3}b^3\bar{A}_{55})C_3 + \int_{-b}^b (A_{55}^k U_k - \bar{B}_{66}^k U_k') dy \quad (19)$$

ملاحظه می‌شود که تعداد $3(N+I)$ معادله دیفرانسیل و 3 معادله انتگرالی به عنوان روابط حاکم بر مساله به دست می‌آید.

۳- حل معادلات حاکم

اگر فرض کنیم که نیروی و ممان‌های خارجی وارده بر ورق معلوم است در این صورت مشاهده می‌شود که این معادلات شامل $3(N+I)$ تابع مجهول و 3 ثابت مجهول است. با دقت در رابطه (۱۶) ملاحظه می‌شود که معادله دوم و سوم رابطه (۱۶) دارای جملات W_k و V_k می‌باشد و با همدیگر کوپل می‌باشند درحالی که معادله اول رابطه (۱۶) فقط دارای جملات U_k است و با دو معادله دیگر کوپل نیست. لذا معادله دوم و سوم رابطه (۱۶) باید به صورت همزمان و همراه با در نظر گرفتن معادلات (۱۷) و (۱۸) حل شود درحالی که معادله اول رابطه (۱۶) همراه با معادله (۱۹) به طور مستقل قابل حل شدن است. برای به دست آوردن یک حل تحلیلی برای معادلات حاکم بر ورق، این معادلات به صورت ماتریسی نوشته می‌شوند. برای این منظور ماتریس ستونی $\{X_1\}$ و $\{X_2\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{X_1\} = \{\{U\}^T, \{U'\}^T\}^T \quad (20)$$

$$\{X_2\} = \{\{V\}^T, \{V'\}^T, \{W\}^T, \{W'\}^T\}^T$$

که به طور مثال ماتریس $\{U\}$ یک ماتریس ستونی است که $N+I$ مؤلفه جابجایی U_k را شامل می‌شود و به صورت زیر تعریف شده است.

$$\{U\} = \{U_1, U_2, \dots, U_{N+1}\}^T \quad (21)$$

اکنون معادلات تعادل ورق در رابطه (۱۶) بر حسب ماتریس‌های $\{X_1\}$ و $\{X_2\}$ نوشته می‌شوند. با استفاده از این متغیرهای ماتریسی معادله اول رابطه (۱۶) به صورت ماتریسی زیر قابل نوشتن است.

$$\{X_1\}' = [C_1]\{X_1\} + \{F_3\}C_3 y \quad (22)$$

همچنین معادله دوم و سوم رابطه (۱۶) نیز به صورت ماتریسی به صورت زیر قابل نوشتن می‌باشد.

$$\{X_2\}' = [C_2]\{X_2\} + \{F_5\}C_5 + \{F_6\}C_6 \quad (23)$$

۲-۲- روابط نوابر حرکت در نظریه لایه‌ای

برای حل مساله، معادلات حاکم بر ورق بر حسب توابع جابجایی فرمولبندی می‌شود. ورق کامپوزیتی در راستای ضخامت طوری به لایه‌های عددی تقسیم بندی می‌شود که هر لایه فقط از یک جنس (ماده) تشکیل شده است به عبارت دیگر هر لایه فیزیکی به تعداد مشخصی لایه عددی تقسیم می‌شود. برای لایه‌گذاری متعامد که در آن الیاف در راستای طول یا پهنای (عرض) ورق قرار دارند کوپل کششی-برشی در رابطه ساختاری وجود ندارد و لذا روابط تنش-کرنش در لایه عددی k ام در ورق با لایه‌گذاری متعامد به صورت زیر قابل نوشتن است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

که در آن \bar{C}_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی برای لایه عددی k ام می‌باشد که از روی ثوابت مهندسی قابل محاسبه است. اگر کرنش‌های نظریه لایه‌ای از رابطه (۵) در رابطه (۱۲) قرار داده شود و نتایج حاصل در روابط (۱۰) قرار داده شود آنگاه نتیجه‌های تنش در نظریه لایه‌ای بر حسب میدان جابجایی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$M_{xy}^k = D_{66}^{kj} U_j' - \bar{B}_{66}^k C_3$$

$$M_y^k = B_{12}^k C_6 + \bar{B}_{12}^k C_5 + D_{22}^{kj} V_j' + B_{23}^{kj} W_j$$

$$N_z^k = A_{13}^k C_6 + \bar{A}_{13}^k C_5 + B_{23}^{jk} V_j' + A_{33}^{kj} W_j \quad (13)$$

$$Q_x^k = A_{55}^{kj} U_j + A_{55}^k C_3 y$$

$$Q_x^k = A_{44}^{kj} V_j + B_{44}^{jk} W_j'$$

$$R_y^k = B_{44}^{kj} V_j + D_{44}^{kj} W_j'$$

که در روابط فوق ماتریس‌های صلبیت در نظریه لایه‌ای به صورت رابطه (۱۴) و (۱۵) تعریف شده است.

$$(A_{pq}^{kj}, B_{pq}^{kj}, D_{pq}^{kj}) = \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} (\Phi_k' \Phi_j', \Phi_k \Phi_j', \Phi_k \Phi_j) dz \quad (14)$$

$$(A_{pq}^k, B_{pq}^k) = \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} (\Phi_k', \Phi_k) dz \quad (15)$$

$$(\bar{A}_{pq}^k, \bar{B}_{pq}^k) = \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} (\Phi_k', \Phi_k) z dz$$

با قرار دادن توابع درون یاب از رابطه (۴) در روابط فوق، درایه‌های ماتریس‌های صلبیت در نظریه لایه‌ای بر حسب درایه‌های ماتریس سفتی و همچنین ضخامت لایه‌های عددی محاسبه شده است که نتایج و جزئیات مربوطه در پیوست آمده است. حال با قرار دادن نتیجه‌های تنش از روابط (۱۳) در (۹)، معادلات تعادل موضعی ورق در نظریه لایه‌ای بر حسب ثوابت میدان جابجایی و توابع جابجایی موضعی به صورت روابط زیر به دست می‌آید.

که در روابط (۲۲) و (۲۳) ماتریس‌های ضرایب $[C_1]$ ، $[C_2]$ ، $\{F_3\}$ ، $\{F_5\}$ و $\{F_6\}$ در پیوست آمده است. حال اگر $[U_1]$ و $[A_1]$ ماتریس بردارهای ویژه و ماتریس مقادیر ویژه ماتریس $[C_1]$ باشند و $[U_2]$ و $[A_2]$ ماتریس بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس $[C_2]$ باشند آنگاه می‌توان نشان داد که پاسخ معادلات (۲۲) و (۲۳) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\{X_1\} = [U_1] \exp([A_1]y) \{K_1\} - [C_1]^{-1} (\{F_3\}y + [C_1]^{-1} \{F_3\}) C_3 \quad (24)$$

$$\{X_2\} = [U_2] \exp([A_2]y) \{K_2\} - [C_2]^{-1} (\{F_5\}C_5 + \{F_6\}) C_6 \quad (25)$$

که در روابط فوق $\{K_1\}$ بردار ستونی شامل $2(N+I)$ ثابت نامعلوم انتگرال گیری و $\{K_2\}$ بردار ستونی شامل $4(N+I)$ ثابت نامعلوم انتگرال گیری می‌باشند که به شرایط مرزی بستگی دارد. همچنین سه ثابت نامعلوم C_3 ، C_5 و C_6 نیز در رابطه (۲۴) و (۲۵) وجود دارد که هنوز محاسبه نشده است. این ثوابت مجهول با اعمال شرایط مرزی در لبه‌های $y = \pm b$ به همراه در نظر گرفتن معادلات تعادل کلی که بار اعمالی به ورق را نشان می‌دهد به دست می‌آید. اعمال شرایط مرزی در لبه‌های آزاد ورق شامل اعمال روابط زیر در لبه‌های $y = \pm b$ می‌باشد.

$$M_{xy}^k = D_{66}^{kj} U_j' - \tilde{B}_{66}^k C_3 \quad (26)$$

$$R_y^k = B_{44}^{kj} V_j + D_{44}^{kj} W_j' \quad k = 1, 2, \dots, N+1$$

واضح است که معادله اول رابطه (۲۶) تنها شامل مشتق $\{U\}$ و C_3 است. لذا با جایگذاری از (۲۴) در معادله اول رابطه (۲۶) به تعداد $2(N+I)$ معادله جبری خطی بر حسب $\{K_1\}$ به دست می‌آید. این معادلات همراه با رابطه (۱۹) که معادله‌ای بر حسب جایجایی $\{U\}$ است برای به دست آوردن مجهولات انتگرال گیری در $\{K_1\}$ و ضریب C_3 بکار می‌رود به طوری که $2(N+I)+I$ مجهول موجود در رابطه (۲۴) با حل این معادلات جبری به دست می‌آید. همچنین با جایگذاری از رابطه (۲۵) در معادلات دوم و سوم از رابطه (۲۶) به تعداد $4(N+I)$ معادله جبری بر حسب مقادیر مجهول $\{K_2\}$ حاصل می‌شود که با استفاده از این معادلات و همراه با معادلات (۱۷) و (۱۸) ثوابت انتگرال گیری در $\{K_2\}$ و همچنین C_5 و C_6 به دست می‌آید. با دست آوردن این ثوابت حل معادلات ناویر کامل می‌شود.

بعد از به دست آوردن جایجایی‌ها روش متداول برای استخراج تنش‌ها استفاده از روابط تنش- کرنش است. با توجه به اینکه در نظریه لایه‌ای میدان جایجایی در سطوح عددی دارای پیوستگی C^0 است لذا پیوستگی کرنش‌های برون صفحه‌ای در سطوح عددی (سطح مشترک دولایه عددی) تضمین شده نیست. از این رو تنش‌های برون صفحه‌ای که از روابط تنش- کرنش به دست می‌آید نیز لزوماً در سطوح عددی پیوسته نخواهد بود و این موضوع در سطح مشترک دولایه که خواص مکانیکی متفاوت دارند بیشتر آشکار می‌شود و از طرف دیگر اهمیت مقدار تنش‌های برون صفحه‌ای در این سطوح بیشتر است. لذا در سطح مشترک بین دو لایه عددی، دو مقدار برای تنش‌های برون صفحه‌ای قابل محاسبه است. تنشی که در سطح مشترک دو لایه و با استفاده از لایه عددی بالایی به دست می‌آید و با σ^+ نشان داده می‌شود و مقدار تنشی که در سطح مشترک دولایه ولی با استفاده از لایه پایینی به

دست می‌آید و با σ^- نشان داده می‌شود و متوسط این دو مقدار با $\sigma^{avg} = 0.5(\sigma^- + \sigma^+)$ نشان داده می‌شود.

با توجه به روابط ذکر شده روند حل مساله به صورت ذیل می‌باشد.

الف- ثوابت هندسی و خواص مکانیکی و ترتیب لایه‌ها و سایر مشخصات ورق مشخص می‌شود.

ب) با انتخاب تعداد لایه‌ی عددی برای حل مساله، ضخامت لایه‌های عددی به دست می‌آید و سپس ماتریس‌های صلبیت مورد نیاز برای حل مساله به دست می‌آید.

پ) ماتریس بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس‌های $[C_1]$ و $[C_2]$ به دست می‌آید و با اعمال شرایط مرزی و بارگذاری ماتریس $\{K_1\}$ و $\{K_2\}$ و ثابت C_3 ، C_5 و C_6 محاسبه می‌شود.

ت) مؤلفه‌های میدان جایجایی از روابط (۲۴) و (۲۵) استخراج می‌شود و سپس تنش‌ها از روابط (۵) و (۱۲) به دست می‌آید.

۴- نتایج عددی

با توجه به اهمیت و گسترش کاربرد سازه‌های کامپوزیتی در صنایع مختلف، ورق‌های کامپوزیتی با لایه گذاری متعامد از جنس شیشه- اپوکسی مورد بررسی قرار گرفته است. ورق‌های کامپوزیتی به‌طور عمده برای تحمل بارهای خمشی طراحی می‌شوند خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیتی شیشه- اپوکسی در جدول ۱ آمده است. ضخامت کل ورق برابر h و ضخامت همه لایه‌های فیزیکی موجود در ورق با هم برابر در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی لایه‌های شیشه- اپوکسی [۳۷]

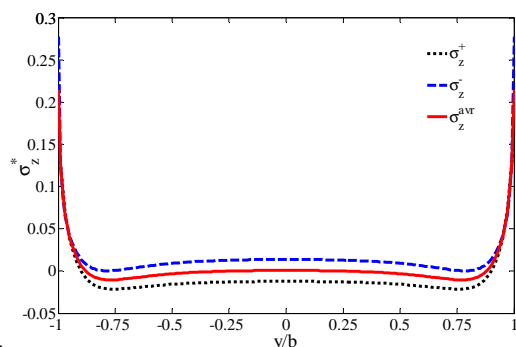
E_1 (GPa)	$E_2=E_3$ (GPa)	$G_{12}=G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)	$\nu_{12}=\nu_{13}$	ν_{23}
50	15.2	4.7	3.28	0.25	0.42

۴-۱- صحنه‌گذاری بر نتایج

برای صحنه‌گذاری بر نتایج حاصل از فرمولبندی و حل ارایه شده بر مبنای نظریه لایه‌ای و بررسی دقت و صحت آن، نتایج عددی حاصل از حل مساله ورق کامپوزیتی تک‌سو که با نظریه لایه‌ای به دست آمده است با نتایج حاصل از حل مساله ورق با روش المان محدود [۳۸] مقایسه می‌شود. برای این منظور یک ورق کامپوزیتی به‌صورت $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ که ضخامت آن h و پهنا $2b=3h$ می‌باشد و تحت نیروی کشش F قرار دارد مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حل مساله با روش لایه‌ای هر لایه فیزیکی به ۱۸ لایه عددی تقسیم شده است. در اثر بار کششی اعمال شده به ورق، تنش برشی درون صفحه‌ای σ_{xy} و تنش برشی برون صفحه‌ای σ_{xz} در ورق به وجود می‌آید. تنش بی‌بعد برای بارگذاری نیروی کششی به‌صورت $\sigma^* = 2bh\sigma/F$ تعریف شده است. توزیع تنش برون صفحه‌ای σ_z نسبت به ضخامت ورق در فواصل مختلف تا لبه ورق در راستای خطوط $y=0.94b$ ، $y=0.98b$ ، $y=0.99b$ و همچنین در لبه $y=b$ در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل نتایج به دست آمده از حل نظریه لایه‌ای و نتایج حاصل از حل المان محدود آمده است. در شکل ۲ ملاحظه می‌شود که انطباق بسیار خوبی بین نتایج حاصل از حل ارایه شده در این پژوهش و حل المان محدود (Ansys) [۳۸] وجود دارد. در سطوح آزاد بالا و پایین

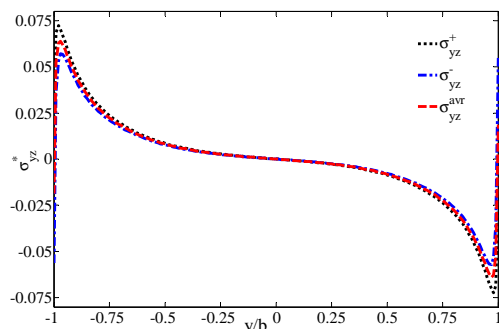
لایه‌های کامپوزیتی با هم برابر و برابر با $0.25h$ می‌باشد. همچنین پهناى ورق 2.5 برابر ضخامت ورق در نظر گرفته شده است. سطح میانی ورق $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ با $z=0$ ، سطح تماس لایه اول و دوم با $z=-0.25h$ ، سطح تماس لایه سوم و چهارم با $z=0.25h$ و سطح آزاد داخلی و خارجی ورق با $z=\pm 0.5h$ نشان داده می‌شود. در حل مساله با نظریه لایه‌ای ضخامت هر لایه فیزیکی به 16 لایه عددی تقسیم شده است. در این قسمت توزیع تنش در ورق کامپوزیتی تحت ممان خمشی مورد بررسی قرار گرفته است. توزیع تنش در ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری متقارن $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ که ضخامت هر لایه کامپوزیتی برابر با $0.25h$ می‌باشد، و پهناى آن 2.5 برابر ضخامت می‌باشد و تحت ممان خمشی M در دو انتهای آن قرار دارد در شکل‌های ۴ تا ۷ آمده است. برای ورق که تحت ممان خمشی M قرار دارد تنش بی‌بعد به صورت $\sigma^* = 2bh^2\sigma/M$ تعریف شده است.

همان‌گونه که گفته شد، تنشی که با استفاده از رابطه هوک و از طریق لایه عددی فوقانی سطح مربوطه به دست می‌آید را با σ^+ و تنشی که از لایه عددی تحتانی سطح مربوطه به دست می‌آید را با σ^- نشان می‌دهیم و متوسط آن را با $\sigma_z^{avr} = 0.5(\sigma_z^- + \sigma_z^+)$ نشان می‌دهیم. شکل ۴ و ۵ این سه مقدار تنش را برای تنش برون صفحه‌ای عمودی σ_z و برشی σ_{yz} در سطح مشترک $0^\circ/90^\circ$ در $z=0.25h$ نشان داده و با هم مقایسه می‌کند. ملاحظه می‌شود همان‌گونه که انتظار می‌رود مقدار $savr$ برای تنش عمودی در نواحی دور از لبه به صفر میل می‌کند که درست‌تر می‌باشد و لذا ملاحظه می‌شود که σ^{avr} دقت بالاتری دارد و در محاسبه تنش‌ها مقدار متوسط استفاده شده است.



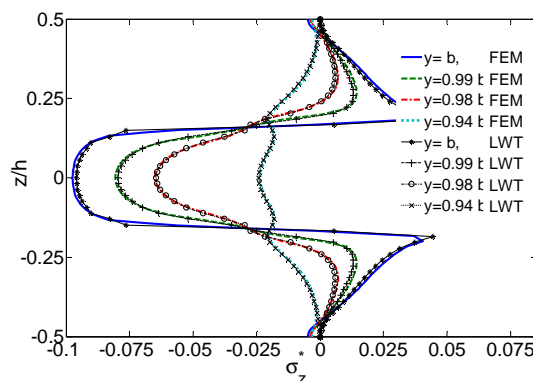
شکل

۴- توزیع تنش عمودی σ_z پیش‌بینی شده در ورق متقارن $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ تحت خمش $(z=0.25h)$



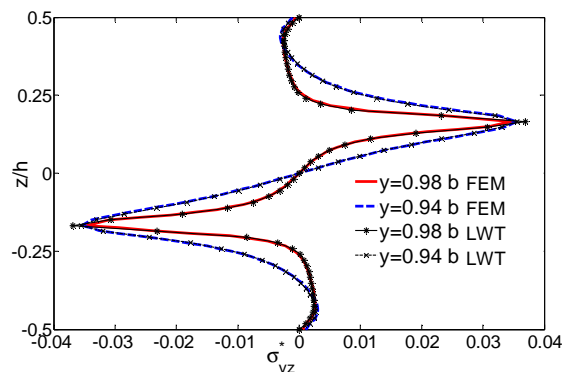
شکل ۵- توزیع تنش برشی σ_{yz} پیش‌بینی شده در ورق متقارن $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ تحت خمش $(z=0.25h)$

ورق $z=\pm 0.5h$ روش لایه‌ای مقدار تنش عمودی را صفر پیش‌بینی کرده است ولی پیش‌بینی المان محدود صفر نمی‌باشد. با نزدیک شدن به لبه آزاد مقدار تنش σ_z افزایش یافته است. این تنش در لایه‌های بالا و پایین کششی و در لایه وسطی این ورق فشاری است و تغییرات سریع تنش در سطح مشترک لایه‌ها دیده می‌شود. توزیع تنش نسبت به سطح میانی $z=0$ متقارن است.



شکل ۲- نتایج روش لایه‌ای و حل المان محدود [۳۸] در پیش‌بینی توزیع تنش σ_z در ورق

همچنین توزیع تنش برشی برون صفحه‌ای σ_{yz} در شکل ۳ نشان داده شده است و نتایج روش لایه‌ای با نتایج روش المان محدود [۳۸] مقایسه شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود تنش برشی برون صفحه‌ای σ_{yz} در سطوح پایین و بالای ورق در $z=\pm h/2$ برابر با صفر است. مقدار تنش برشی σ_{yz} در $z=0$ برابر با صفر است و دارای توزیع پاد متقارن می‌باشد. در شکل ۳ نیز انطباق بسیار خوبی بین نتایج حاصل از حل با نظریه لایه‌ای و حل المان محدود وجود دارد. از شکل‌های ۲ و ۳ استنباط می‌شود حل ارائه شده صحت و دقت بالایی برای پیش‌بینی تنش‌های بین‌لایه‌ای در ورق‌های کامپوزیتی دارد.

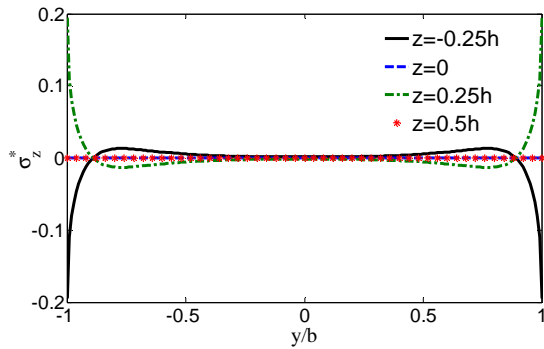


شکل ۳- نتایج روش لایه‌ای و حل المان محدود [۳۸] در پیش‌بینی توزیع تنش برشی σ_{yz}

۲-۴ نتایج عددی

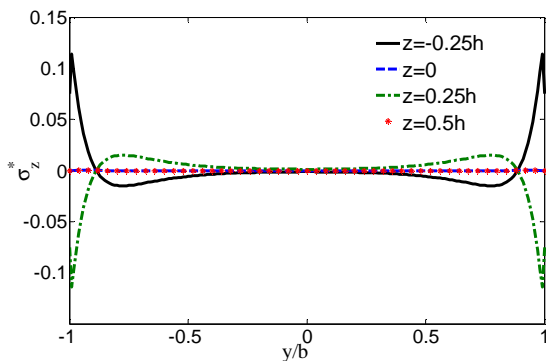
ورق کامپوزیتی با لایه گذاری متعامد و متقارن به صورت $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ در نظر گرفته شده است. ترتیب بیان لایه‌ها از چپ به راست، ترتیب چینش لایه‌های ورق از سطح تحتانی ورق $z=-h/2$ به سمت فوقانی آن را نشان می‌دهد و زاویه صفر راستای طول ورق و زاویه 90° راستای پهناى ورق را نشان می‌دهد. در این ورق ضخامت

لبه‌ها به وجود می‌آید می‌تواند نقش مهمی در خرابی زودهنگام ورق‌های کامپوزیتی تحت خمش و ایجاد جدایش لایه‌ها در لبه‌های آزاد ورق و یا خرابی موضعی داشته باشد. دقیقه در لبه آزاد $v=b$ ، مقدار تنش عمودی بی‌بعد در سطح مشترک لایه‌های 0° و 90° برابر با 0.2 است. همان‌گونه که انتظار می‌رود در بارگذاری خمشی علامت تنش σ_z نسبت به سطح میانی قریب است.

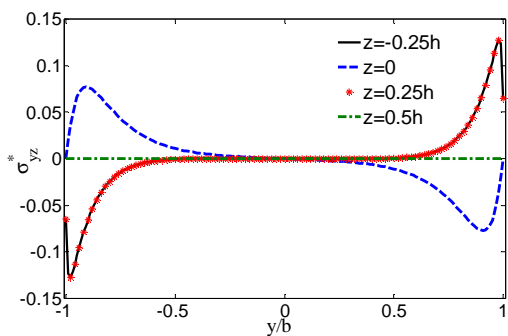


شکل ۷- توزیع تنش برون‌صفحه‌ای عمودی σ_z در سطوح مختلف ورق متقارن $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ تحت ممان خمشی

توزیع تنش برون‌صفحه‌ای عمودی σ_z و برشی σ_{yz} نسبت به پهناى ورق در سطوح مشترک بین لایه‌های محوری و جانبی و همچنین در سطح میانی در ورق متقارن $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ در شکل ۸ و ۹ آمده است.



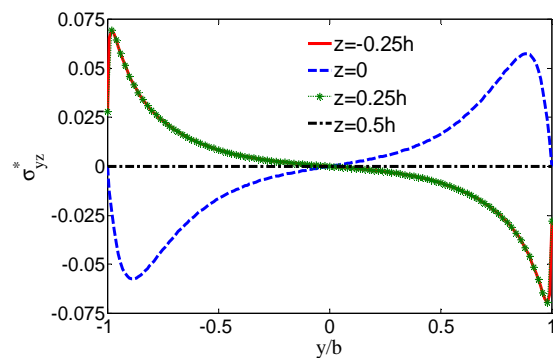
شکل ۸- توزیع تنش عمودی σ_z در ضخامت ورق متقارن $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ تحت بار خمشی



شکل ۹- توزیع تنش برشی σ_{yz} در ورق متقارن $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ تحت بار خمشی

لذا با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ می‌توان نتیجه گرفت که وقتی از رابطه هوک برای پیش‌بینی تنش‌های برون‌صفحه‌ای استفاده شود برای کاهش خطا باید از مقدار متوسط به دست آمده از لایه بالایی و پایینی (σ^{avr}) استفاده کرد. نتایج عددی نشان داده است که این موضوع در سطوح مشترک بین دو لایه که خواص مکانیکی متفاوتی دارند (مانند سطح مشترک $(90^\circ/0^\circ)$ از اهمیت بیشتری برخوردار است و عدم استفاده از مقدار متوسط منجر به وجود آمدن خطای قابل توجهی خواهد شد.

توزیع تنش بین‌لایه‌ای برشی σ_{yz} در ورق $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ در شکل ۶ آمده است. ملاحظه می‌شود همان‌گونه که بیان شد در پیش‌بینی نظریه لایه‌ای در سطح $z=0.25h$ تنش برشی برای $y>0$ منفی و برای $y<0$ مثبت است. از شکل ملاحظه می‌شود که مقدار تنش برشی σ_{yz} در سطح مشترک لایه‌های 0° و 90° در $z=\pm 0.25h$ با هم برابر است و منطبق است که خود گواهی بر دقت روش لایه‌ای در حل مسایل متقارن بدون اعمال شرط تقارن به آن است. مقدار عددی حداکثر تنش برشی در سطح مشترک لایه‌های 0° و 90° حدود یک و نیم برابر بیشتر از مقدار حداکثر تنش برشی در سطح میانی است.



شکل ۶- توزیع تنش برشی σ_{yz} در سطوح مشترک لایه‌ها و سطح میانی در ورق متقارن $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ تحت ممان خمشی

همچنین ملاحظه می‌شود که نظریه لایه‌ای مقدار تنش در سطح آزاد فوقانی ورق $z=0.5h$ را دقیقه برابر با صفر پیش‌بینی کرده است که نشان دهنده دقت بالای این نظریه می‌باشد. ملاحظه می‌شود مقدار تنش برشی σ_{yz} در نواحی دور از لبه‌ها که نواحی داخلی نامیده شده است برابر با صفر است. قابل ذکر است که تنش برشی بین لایه‌های σ_{xz} در ورق با لایه گذاری متعامد که تحت بار خمشی قرار دارد برابر با صفر است و نظریه لایه‌ای مقدار صفر را برای آن پیش‌بینی می‌کند و این تنش در شکل‌ها ارایه نشده است.

توزیع تنش σ_z نسبت به پهناى ورق در سطح مشترک بین لایه‌های 0° و 90° در $z=\pm 0.25h$ در سطح میانی $z=0$ و در سطح فوقانی ورق $z=0.5h$ در شکل ۷ نشان داده شده است. در مناطق داخلی ورق و دور از لبه‌ها مقدار تنش σ_z بسیار کوچک و نزدیک به صفر است ولی تنش بین‌لایه‌ای عمودی در نزدیکی لبه‌ها نسبت به مناطق داخلی‌تر به شدت افزایش یافته است. با توجه با اینکه استحکام جانبی لایه‌های کامپوزیتی و استحکام اتصال لایه‌ها نسبت به استحکام درون‌صفحه‌ای لایه‌ها بسیار پایین‌تر است لذا تنش بین لایه‌های عمودی که در نزدیکی

شرایط مرزی آزاد لبه‌ای ارائه شده است. برای افزایش دقت در پیش‌بینی تنش‌های بین لایه‌ای از مقدار متوسط تنش که از لایه عددی بالایی و پایینی به دست می‌آید استفاده شده است. برای صحت‌گذاری مدل، نتایج عددی حاصل از حل نظریه لایه‌ای با نتایج حاصل از حل با روش المان محدود مقایسه شده است. برای حل المان محدود از نرم افزار Ansys استفاده شده است و مدل سه بعدی برای استخراج تنش‌های بین لایه‌ای به وجود آمده و حل شده است. نتایج حل عددی با المان محدود در نرم افزار با نتایج حل عددی با روش لایه‌ای مقایسه شده است و انطباق خوبی ملاحظه می‌شود. نتایج عددی برای توزیع تنش در ورق با لایه‌گذاری متعامد متقارن و غیرمتقارن ارائه شده است و مورد بحث قرار گرفته است. از بررسی مقدار عددی تنش‌ها نتایج ذیل قابل استدلال است.

۷- پیوست

ثوابت موجود در روابط (۱۷) تا (۱۹) به صورت زیر تعریف شده است.

$$(\bar{A}_{pq}, \bar{A}_{pq}^-, \bar{A}_{pq}^+) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{pq}(1, z, z^2) dz \quad (1)$$

ماتریس‌های ضرایب در روابط (۲۲) به صورت زیر تعریف شده است.

$$[C_1] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [D_{66}]^{-1}[A_{55}] & [0] \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\{F_3\} = \{0\}^T, ([D_{66}]^{-1}\{A_{55}\})^T$$

که در آن [II] ماتریس همسانی با ابعاد (N+1)×(N+1) و {0} ماتریس ستونی صفر با N+1 مولفه است. همچنین ماتریس‌های ضرایب در روابط (۲۳) به صورت زیر می‌باشد.

$$[C_2] = \begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] & [0] \\ [c_{21}] & [0] & [0] & [c_{24}] \\ [0] & [0] & [I] & [0] \\ [0] & [c_{42}] & [c_{43}] & [0] \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\{F_5\} = \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, ([D_{44}]^{-1}\{\tilde{A}_{13}\})^T \quad (4)$$

$$\{F_6\} = \{0\}^T, \{0\}^T, \{0\}^T, ([D_{44}]^{-1}\{A_{13}\})^T$$

که ضرایب استفاده شده در رابطه (۳) پیوست به صورت زیر است.

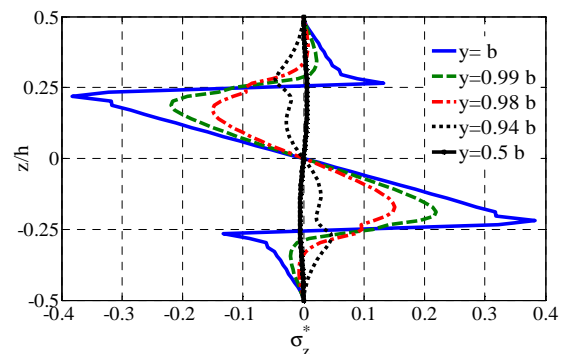
$$\begin{aligned} [c_{21}] &= [D_{22}]^{-1}[A_{44}] \\ [c_{24}] &= [D_{22}]^{-1}([B_{44}]^T - [B_{23}]) \\ [c_{42}] &= [D_{44}]^{-1}([B_{23}]^T - [B_{44}]) \\ [c_{43}] &= [D_{44}]^{-1}[A_{33}] \end{aligned} \quad (5)$$

۶- مراجع

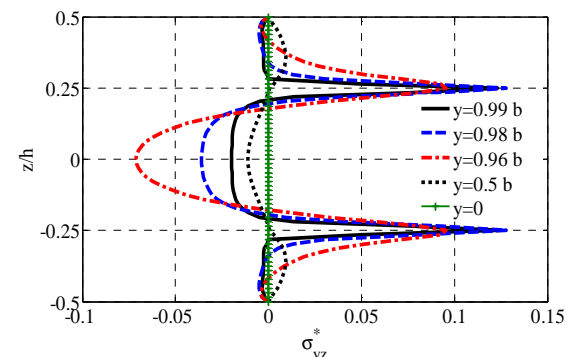
- [1] Pipes R. B., and Pagano N. J., Interlaminar stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension, Journal of Composite Materials, Vol. 4, pp. 538-48, 1970.
- [2] Tang S., and Levy A., A boundary layer theory- part II: extension of laminated finite strip, J Compos Mater, Vol. 9, pp. 42-52, 1975.
- [3] Sijian L., Renjie W., Zudao L., and Xiaoxi H., An analytic solution for interlaminar stresses in a fiber reinforced double-

برای بررسی بیشتر توزیع و تغییرات تنش‌های برون‌صفحه‌ای در سطوح مختلف، توزیع تنش برون‌صفحه‌ای عمودی σ_z نسبت به ضخامت ورق در لبه آزاد و در فواصل مختلف تا لبه آزاد ورق در سطوح $y=0.99b$, $y=0.98b$, $y=0.94b$ و $y=0.5b$ در شکل ۱۰ آمده است. ملاحظه می‌شود که تنش برون‌صفحه‌ای σ_z در نزدیکی لبه‌های آزاد ورق افزایش یافته است و مقدار این تنش در نواحی داخلی‌تر ورق دور از لبه‌ها نسبت به نزدیکی لبه‌های آزاد بسیار کوچک‌تر است.

توزیع تنش برشی σ_{yz} نسبت به ضخامت در شکل ۱۱ آمده است. گرادیان شدید تنش در نزدیکی سطح اتصال لایه‌های فیزیکی در روبه 0° و 90° ملاحظه می‌شود. مقدار تنش در نزدیکی این سطوح نسبت به سایر نقاط بسیار بزرگتر است.



شکل ۱۰- توزیع تنش عمودی σ_z در ضخامت ورق $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ تحت بار خمشی



شکل ۱۱- توزیع تنش برشی σ_{yz} در ضخامت ورق $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ تحت بار خمشی

۵- نتیجه‌گیری

ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد که تحت ممان خمشی در لبه‌های آن قرار دارد مدل‌سازی شده و مورد تحلیل قرار گرفته است و توزیع تنش‌های سه بعدی در نزدیکی لبه‌های آزاد ورق بررسی شده است. تنش‌های سه بعدی مخصوصاً تنش‌های بین لایه‌ای عمودی و برشی در نزدیکی مرزهای آزاد ورق کامپوزیتی بخصوص در سطح مشترک اتصال لایه‌های مختلف کامپوزیتی که تغییر ناگهانی خواص مادی وجود دارد محاسبه شده است. برای مدل‌سازی و حل مساله از نظریه لایه‌ای (LWT) استفاده شده است. معادلات حاکم بر ورق بر اساس نظریه لایه‌ای استخراج شده است که شامل معادلات تعادل موضعی و معادلات تعادل کلی ورق می‌باشد که حل تحلیلی آنها برای

- free-edges of angle-ply piezoelectric laminates under mechanical loading, *Journal of applied and Computational Sciences in Mechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 89-108, 2010 (in Persian)
- [26] Andakhshideh A., Tahani M., Interlaminar stresses in general thick rectangular laminated plates under in-plane loads, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 47, pp. 58-69, 2013.
- [27] Afshin M., Sadighi M., and Shakeri M., Free edge effects in a cylindrical sandwich panel with a flexible core and laminated composite face sheets, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 5, pp. 787-808, 2010.
- [28] Mantari J. L., Oktem A. S., and Soares C. G., A New Higher Order Shear Deformation Theory for sandwich and composite Laminated Plates, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 3, pp. 1489-1499, 2012.
- [29] Rodríguez de la Cruz, V., Fernández Caballero D., Mujika F., Muñoz-Guijosa J.M., Analysis of out-of-plane stresses in sandwich beams subjected to pure bending with large deflections, *Journal of Composite Materials* September 11, 2012, doi: 10.1177/0021998312458816
- [30] Yang Ch., Chen J., and Zhao Sh., The Interlaminar Stress of Laminated Composite under Uniform Axial Deformation, *Modeling and Numerical Simulation of Material Science*, Vol. 3, pp. 49-60, 2013.
- [31] Rao M.V.P., Harursampath D., Renji K., Prediction of interlaminar stresses in composite honeycomb sandwich panels under mechanical loading using Variational Asymptotic Method, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 8, pp. 2523-2537, 2012.
- [32] Hitesh Kapoor, Rakesh K. Kapania, Som R. Soni, Interlaminar stress calculation in composite and sandwich plates in NURBS Isogeometric finite element analysis, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 537-548, 2013
- [33] Rezvani M., Ghasemi Ghalebahman A., Interlaminar stresses in symmetric cross-ply composite laminates using Layerwise theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 59-66, 2014 (in Persian).
- [34] Ahmadi Isa, Edge stresses analysis in thick composite panels subjected to axial loading using layerwise formulation, *Structural Engineering and Mechanics*, An Int'l Journal Vol. 57 No. 4, 2016
- [35] Lekhnitskii S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publisher, Moscow, 1981, p. 104
- [36] Reddy J. N., *Energy principles and variational methods in applied mechanics*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, pp. 133-170, 2002.
- [37] Herakovich C.T., *Mechanics of fibrous composite*, First Edition, John Wiley & Sons New York, 1998.
- [38] ANSYS documentation, Swanson Analysis system, Inc., Houston, PA, 2002
- layer cylindrical shell, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 1, No. 2, pp. 159-170, 1985.
- [4] Murthy P. L. N., and Chamis C. C., Free-edge delamination: laminate width and loading conditions effects, *J Comp Technol Res*, Vol. 11, pp. 15-22, 1989.
- [5] Yuan Ruo Wang and Tsu-Wei Chou, Three-Dimensional Transient Interlaminar Thermal Stresses in Angle-Ply Composites, *J. Appl. Mech.*, Vol. 56, No. 3, pp. 601-608, 1989.
- [6] Kant T., and Menon M. P., Estimation of interlaminar stresses in fiber reinforced composite cylindrical shells, *Composite Structures*, Vol. 38, No. 2, pp. 131-147, 1991.
- [7] Lee Ch. Y., and Liu D., An Interlaminar Stress Continuity Theory for Laminated Composite Analysis, *Composite Structures*, Vol. 42, No. 1, pp. 69-78, 1992
- [8] Lu X., Liu D., An Interlaminar Shear Stress Continuity Theory for Both Thin and Thick Composite Laminates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 502-509, 1992.
- [9] Wu Ch. P., Kuo H. Ch., An interlaminar stress mixed finite element method for the analysis of thick laminated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 24, pp. 29-42, 1993.
- [10] Wu Ch. P., and Yen Ch. B., Interlaminar Stress Mixed Finite Element Analysis of Unsymmetrically Laminated Composite Plates, *Composite Structures*, Vol. 49, No. 3, pp. 411- 419, 1993.
- [11] Mortona S.K., and Webber J.P.H., Interlaminar failure due to mechanical and thermal stresses at the free edges of laminated plates, *Composites Science and Technology*, Vol. 47, No. 1, pp. 1-13, 1993.
- [12] Kim T., and Atluri S.N., Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Out-of-Plane Shear/Bending, *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8, 1994.
- [13] Boitnot R. L., Starnes. J. H. Jr, and Johnson E.R., Nonlinear response and failure of pressurized composite curved panels, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 8, No. 3, pp. 129-138, 1995.
- [14] Basar Y., and Ding Y., Interlaminar Stress Analysis Of Composite: Layer Wise Shell Finite Elements Including Transverse Strains, *Composites Engineering*, Vol. 5, No. 5, pp. 485-499, 1995.
- [15] Carrera E., Mixed layer-wise models for multilayered plates analysis, *Composite Structures*, Vol. 43, pp. 57-70, 1998.
- [16] Shu X.P., and Soldatos K.P., Cylindrical bending of angle ply laminates subjected to different sets of edge boundary conditions, *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 37, pp. 4285-4307, 2000.
- [17] Pai P.F., Palazotto A.N, A high-order sandwich plate theory accounting for 3-D stresses, *Int. J. Solid and Struct.*, Vol. 38, No. 30-31, pp. 5045-5062, 2001.
- [18] Wang X., Wang Y.X., Yang H.K., Dynamic interlaminar stresses in laminated plates with simply and fixed supports, subjected to free vibrations and thermal load, *Composite Structures*, Vol. 68, No. 2, pp. 139-145, 2005.
- [19] Chakrabarti A., Sheikh A. H., Analysis of Laminated Sandwich Plates Based on Interlaminar Shear Stress Continuous Plate Theory, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 131, No. 4, April 2005, pp. 377-384
- [20] Tahani M., Nosier A., Accurate Determination of Interlaminar Stresses in General Cross-Ply Laminates, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* Vol. 11, pp. 67-92, 2004.
- [21] Xue M., Zhang X. and Hu N., Thermal Stress Analysis of Sandwich Structures, *Journal of Thermal Stresses* Vol. 29, No. 3, pp. 229-244, 2006.
- [22] Plagianakos T. S, and Sarava. D. A, Higher order Layerwise Laminated Theory for the Prediction of Inter-laminar Shear Stresses in Thick Composite and Sandwich Composite Plates, *Composite Structures*, Vol. 87, No. 1, pp. 23-35, 2009.
- [23] Nosier A., Maleki M., (2008) Free-edge stresses in general composite laminates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 1435-1447, 2008
- [24] Asgari M., Akhlaghi M., Transient thermal stresses in two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 4, pp. 353-376, 2010.
- [25] Tahani M., Mirzababae M., Analytical solution of electromechanical coupling effect on interlaminar stresses at