

تحلیل دینامیکی ضربه سرعت پایین ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته انعطاف پذیر وابسته به دما

محسن بت‌شکنان دهکردی*
ایرج رجبی
سید حسن نوربخش

استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی علوم و فناوری‌های زیر دریا، ایران
استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

چکیده

در این مقاله، تحلیل دینامیکی ضربه سرعت پایین یک ورق ساندویچی با رویه‌های چندلایه کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر تحت شرایط دمایی بررسی شده است. بدین منظور اثرات گرمایی و خواص هسته وابسته به دما در نظر گرفته شده است. در این تحقیق معادلات حرکت، بر مبنای یک فرمولاسیون المان محدود هیبریدی لایه‌گون- تک‌لایه با در نظر گرفتن اثرات گرمایی استخراج شده است که در آن تعداد مجهولات مستقل از تعداد لایه‌ها می‌باشد. این فرمولاسیون در محدوده کاری فرمولاسیون واحد کررا (کوف) می‌باشد. فرمولاسیون واحد کوف با استفاده از تغییر مرتبه بسط و همچنین تعریف متغیرها در راستای ضخامت، بسیاری از نظریه‌ها را به شکل واحد متحدالشکل می‌سازد. در این تحقیق به منظور برقراری پیوستگی تنش‌های عرضی بین لایه‌ای از نظریه تغییراتی مختلط رایزنر استفاده شده است و همچنین برای لحاظ کردن اثرات گرمایی، کرنشها به شکل غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند. در این پژوهش به منظور مدلسازی ضربه، با استفاده از یک مدل جرم و فنر دو درجه آزادی و همچنین قانون خطی سازی چوی، یک مدل جرم و فنر اصلاح شده در برخورد سرعت‌های پایین پیشنهاد شده است. نتایج حاصل از این مدلسازی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده که بیانگر دقت بالای مدل ارائه شده می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما، به شکل چشمگیری نیروی ضربه کاهش و زمان ضربه افزایش می‌یابد. در این تحقیق نتایج جدیدی بر حسب شرایط دمایی متفاوت، نسبت منظر، نسبت ضخامت رویه‌ها و همچنین انرژی اولیه ضربه زنده ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: ورق ساندویچی، هسته انعطاف‌پذیر، تحلیل ضربه سرعت پایین، خواص وابسته به دما، فرمولبندی واحد.

Low Velocity Impact Analysis of Sandwich Plate with Composite Faces and Temperature Dependent Flexible Core Considering Thermal Effects

M. Botshekanan Dehkordi
I. Rejabi
S. H. Nourbakhsh

Department of Mechanical engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
Malek-Ashtar University of Technology, Iran
Department of Mechanical engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

Abstract

In this research a low velocity impact analysis of a sandwich plate with multilayered composite face-sheets and flexible core under thermal conditions is investigated. In this regard, thermal effects and temperature dependent properties of the core are considered. In this study, equations of motion are derived based on a hybrid LW/ESL finite element formulation considering the thermal effects by which the number of unknowns is independent on the number of layers. This new formulation is in the framework of Carrera's Unified Formulation (CUF). The CUF unify many theories in a unified form such that can be differed by the order of expansion and definition of the variables in the thickness direction. In order to satisfy the interlaminar continuity of transverse stresses between the layers the Reissner Mixed Variational Theorem (RMVT) is employed. In this paper for considering the thermal effects, the nonlinear strains are used. In this research in order to modeling the low velocity impact a new modified spring-mass model is proposed using the two degree spring-mass model and also Choi linearized law. Results of this formulation are compared with experimental results which show the high accuracy of the proposed formulation. Results show that with increasing the temperature, the impact force decreases and also impact time duration increases significantly. In this study, some new results are presented for different thermal conditions, aspect ratios, face thickness ratios and also different initial energy of impactor.

Keywords: Sandwich plate, Flexible core, Low velocity impact, Temperature dependent properties, Unified formulation.

۱- مقدمه

عددی از معادله ضربه انتگرال گرفته شده و جابه‌جایی صفحه ساندویچی در نزدیکی نقطه برخورد به صورت تابعی از زمان محاسبه شده است. نمز و سیموندز (Nemes and Simmonds) [۲] در سال ۱۹۹۲، پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی را به کمک روش اجزاء محدود و با کمک المان‌های سه بعدی مطالعه و بررسی کردند. آبریت (Abrate) [۳] در سال ۱۹۹۷، آنالیز دینامیکی صفحات چند لایه کامپوزیتی ساندویچی را بررسی کرد. در این بررسی او با مرور بر کارهای انجام شده در زمینه پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی کامپوزیتی تحت بار ضربه‌ای با سرعت پایین، مدل‌های مختلف ارائه شده برای پاسخ موضعی

استفاده از سازه‌های ساندویچی و کامپوزیت‌های ارتوتروپیک لایه‌ای در صنایع مختلف مانند صنایع هوافضا، سازه‌های دریایی، سازه‌های عمرانی و سازه‌های مکانیکی در دهه‌های اخیر وجود نسبت استحکام به وزن نسبتاً بالا و سفتی خمشی بسیار بالای این مواد پیشرفته می‌باشد. به ویژه در زمانی که کاهش وزن اهمیت خاصی داشته باشد، استفاده از این نوع مواد پیشنهاد می‌شود. کلر (Koller) [۱] در سال ۱۹۸۶، یک معادله دیفرانسیلی-انتگرالی برای ضربه الاستیک کره‌ها بر روی صفحه‌های ساندویچی با هسته انعطاف پذیر را به طور تحلیلی بدست آورد. به طور

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mbd_dehkordi@yahoo.com

۲- فرمولاسیون متحدالشکل کررا

فرمولاسیون متحدالشکل کررا (کوف)، تکنیکی است که با استفاده از آن می‌توان به دسته بزرگی از مدل‌های ورق و پوسته به شکل واحد دست پیدا کرد. طبق تکنیک CUF معادلات حاکم به شکل چندین سلول بنیادین نوشته می‌شود که در فرم ظاهر به مرتبه بسط در راستای ضخامت و همچنین نوع نظریه ((Equivalent Single Layer) ESL یا LW (Larerwise)) وابسته نمی‌باشد. به عبارتی همانطور که در بخش‌های بعدی نشان داده خواهد شد، نحوه اسمبل کردن سلولها، نوع نظریه را مشخص می‌نماید. در فرمولاسیون واحد، با جدا سازی متغیرهای مجهول به یکسری توابع ضخامت که فقط تابعی از راستای z هستند (شکل ۳) و یکدسته متغیر که فقط تابعی از راستای درون صفحه‌های هستند (x,y)، می‌توان به نظریه‌های دو بعدی ورق دسترسی پیدا کرد. متغیر کلی $\mathbf{a}(x,y,z)$ و تغییرات آن $\delta \mathbf{a}(x,y,z)$ را می‌توان به وسیله بسط کلی زیر بیان کرد [۱۲]:

$$\mathbf{a}(x,y,z) = F_r(z) \mathbf{a}_r(x,y), \quad \delta \mathbf{a}(x,y,z) = F_s(z) \delta \mathbf{a}_s(x,y) \quad (1)$$

with $\tau, s = t, b, r$ and $r = 2, \dots, N$

حروف پر رنگ نشان دهنده آرایه و زیرنویسهای تکراری نشان دهنده قرارداد جمع بندی هستند. حروف t و b به مفهوم بالا (top) و پایین (bottom) می‌باشند. N نشان دهنده مرتبه نظریه می‌باشد که از یک تا چهار بسته به نظریه مورد نظر، در نظر گرفته می‌شود. $F_r(\zeta_k)$ توابع ضخامت در لایه kام می‌باشند که به صورت ترکیب خطی از چند جمله-ایهای لژاندر $P_j(\zeta_k)$ از مرتبه jام تعریف می‌شوند. ζ_k مختصات بی بعد است که توسط مختصات محلی z_k تعریف می‌شود (شکل ۳). پنج چندجمله‌ای اول لژاندر به صورت زیر می‌باشند [۱۲]:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \zeta_k, \quad P_2 = \frac{3\zeta_k^2 - 1}{2}, \quad P_3 = \frac{5\zeta_k^3 - 3\zeta_k}{2}, \quad P_4 = \frac{35\zeta_k^4 - 15\zeta_k^2 + 3}{8} \quad (2)$$

ترکیب چند جمله‌ایهای لژاندر برای تشکیل توابع ضخامت به شکل زیر می‌باشند:

$$F_r = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad F_t = \frac{P_0 - P_1}{2}, \quad F_r = P_r - P_{r-2}, \quad r = 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

توابع ضخامت فوق دارای ویژگیهای زیر هستند که به راحتی شرط پیوستگی جابجاییها و تنشهای عرضی را در وجه مشترک دو لایه برقرار می‌کند:

$$\zeta_k = \begin{cases} 1, & F_t = 1, F_b = 0, F_r = 0 \quad \text{at top} \\ -1, & F_t = 0, F_b = 1, F_r = 0 \quad \text{at bottom} \end{cases} \quad (4)$$

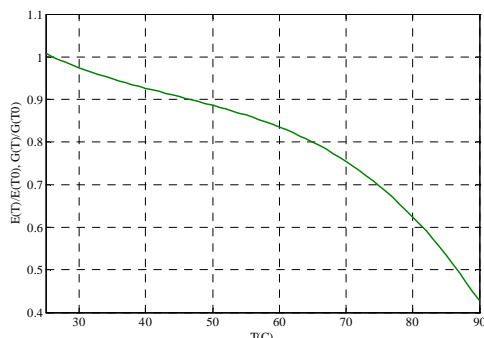
این توصیف متغیرها را می‌توان برای هر دوی میدان جابجایی $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ و توزیع تنشهای عرضی $\boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ به کار برد. با توجه به بسط متغیرها، توصیف مورد نظر می‌تواند تک لایه معادل (ESL) باشد اگر یک میدان جابجایی برای کل چندلایه در نظر گرفته شوند و یا لایه‌گون (LW) باشد اگر میدان جابجایی برای تک تک لایه‌ها جداگانه در نظر گرفته شود. مدل‌های لایه‌گون اجازه می‌دهند که شرایط پیوستگی بین لایه‌ای برای متغیرهای میدانی مورد نظر به شکل زیر ایجاد شوند:

$$\mathbf{a}_i^k = \mathbf{a}_b^{k+1}, \quad k = 1, \dots, N_l - 1 \quad (5)$$

که N_l تعداد لایه‌های کل ورق می‌باشد. برای توصیف توزیع تنشهای عرضی صرفنظر از اینکه نظریه مورد نظر تک‌لایه باشد یا لایه‌گون،

صفحات ساندویچی تحت بار ضربه‌ای را طبقه بندی کرد. هوفت و پارک (Hoo fatt and Park) [۵و۴] در سال ۲۰۰۱، یک مدل جرم و فنر یک درجه آزادی و دو درجه آزادی را برای پیش بینی آسیب حاصل از ضربه با سرعت پایین ارائه کردند. کویسین و همکاران (Koissin et al.) [۶] در سال ۲۰۰۴، با ارائه یک حل تحلیلی پاسخ تیر و صفحه ساندویچی در مقابل بارگذاری محلی و برخورد با جسم صلب را مورد بررسی قرار دادند. نتایج بیانگر صحت فرض شبه استاتیکی بودن مساله در برخوردهای با جرم بزرگ و زمان تماس بالا می‌باشد. یو و همکاران (Yu et al.) [۷] در سال ۲۰۰۸، ضربه سرعت پایین و شبه استاتیکی بر روی تیرهای ساندویچی با هسته فوم آلومینیومی را به طریق آزمایشگاهی انجام دادند، و به محاسبه تغییر شکل‌ها و رفتار آسیب آن‌ها پرداختند. کوئین و وانگ (Qin & Wang) [۸] در سال ۲۰۱۱، پاسخ ضربه سرعت پایین با جرم زیاد را برای تیرهای ساندویچی با هسته فوم فلزی و تکیه گاه‌های گیردار بدست آوردند و سپس این نتایج را برای حالت شبه استاتیکی نیز محاسبه کردند.

با توجه به کاربری سازه‌های ساندویچی در دمای بالا، تحلیل دینامیکی و ضربه این سازه‌ها با در نظر گرفتن اثرات گرمایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. ماتسونوگا (Matsunaga) [۹] در سال ۲۰۰۷ ارتعاشات آزاد و مساله پایداری ورقهای کامپوزیتی زاویه‌دار و ساندویچی را با استفاده از نظریه مرتبه بالای کلی برحسب بسط سری توانی تحت بارهای گرمایی بررسی نمود. او با خواص خطی و مستقل از دما و با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت را استخراج نموده و بعد از آن فرکانسهای طبیعی و دمای بحرانی این سازه‌ها تحت بارهای گرمایی به دست آورد. فروستینگ و تامسون (Frostig & Thomsen) [۱۰و۱۱] در سال ۲۰۰۹ تحلیل ارتعاشات تیرهای ساندویچی با هسته نرم و انعطاف پذیر در جهت عرضی با خواص وابسته به دما را در دو بخش ارائه کردند. آنها مطالعاتی روی کاهش خواص و صلبیت هسته بر اثر بالا بردن دمای هسته و اثرات آن روی ارتعاشات آزاد تیر انجام دادند. در این تحقیق یک ورق ساندویچی با رویه های چند لایه کامپوزیتی و هسته انعطاف پذیر در نظر گرفته شده است. فرض شده است که در اثر بارهای گرمایی، دمای بالا و پایین ورق تغییر کند. خواص هسته نرم، به تغییرات دما بسیار حساس می‌باشد که این تغییرات خواص به شدت روی پاسخ دینامیکی سازه تاثیر خواهد گذاشت. ضمناً از آنجایی که تعداد لایه های کامپوزیتی هر رویه ممکن است زیاد باشد، استفاده از نظریه‌های لایه‌گون منجر به حجم بالای محاسبات و استفاده از نظریه‌های تک لایه منجر به دقت پایین محاسبات خواهد شد. بنابراین در این پژوهش از یک فرمولاسیون جامع ارتقا یافته مختلط با دقت بالا و حجم محاسبات پایین (که تمام نظریه‌های موجود اعم از تک لایه، لایه گون و نظریه‌های مرتبه بالا را در بر می‌گیرد)، با در نظر گرفتن اثرات گرمایی ارائه شده است. ضمناً برای بالا بردن دقت محاسبات، پیوستگی تنشهای عرضی در تمام لایه‌ها لحاظ می‌شود و برای جلوگیری از قفل شوندگی برشی (Shear Locking) از روش انتگرال گیری کاهش یافته استفاده خواهد شد. در این تحقیق برای مدل‌سازی ضربه سرعت پایین یک مدل جرم و فنر بهبود یافته ارائه شده است که بر مبنای مدل جرم و فنر دو درجه آزادی و قانون تماس خطی سازی چوی می‌باشد. در نهایت برای استخراج نتایج یک کد نویسی اجزا محدود در نرم افزار MATLAB صورت خواهد گرفت.



شکل ۲- خواص فوم تابعی از دما [۱۳]

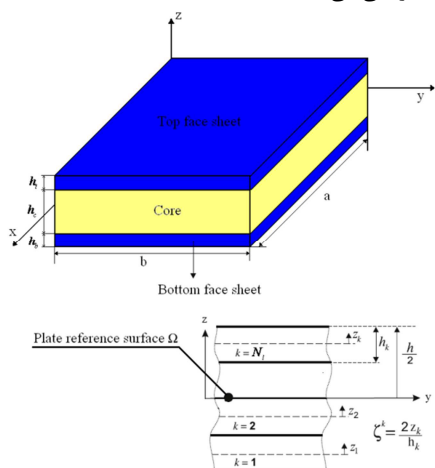
معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون بر اساس فرمولاسیون متحدالشکل به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta L_{int} - \delta F_{in} - \delta L_{ext} = 0 \quad (7)$$

در رابطه فوق L_{int} کار داخلی، F_{in} کار نیروهای اینرسی و L_{ext} کار نیروهای خارجی می‌باشد. کار نیروهای داخلی به دو قسمت، کار مکانیکی و کار گرمایی تقسیم می‌شود:

$$L_{int} = L_{intM} + L_{intT} \quad (8)$$

که در رابطه فوق L_{intM} کار ناشی از تنشهای مکانیکی و L_{intT} کار ناشی از تنشهای گرمایی می‌باشند.



شکل ۳- مشخصات هندسی و دستگاه مختصات برای ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی

در این تحقیق به منظور برقراری پیوستگی تنشهای عرضی، از فرمولاسیون مختلط (RMVT) برای استخراج معادلات حاکم استفاده می‌شود. بنابراین برای کار تنشهای مکانیکی و گرمایی می‌توان نوشت:

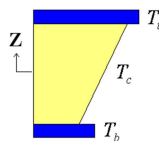
$$\delta(L_{intM} + L_{intT}) = \sum_{k=1}^{N_k} \int \int_{\Omega_k} (\delta \epsilon_{pG}^k \sigma_{pC}^k + \delta \epsilon_{nG}^k \sigma_{nM}^k + \delta \sigma_{nM}^k (\epsilon_{nG}^k - \epsilon_{nC}^k)) d\Omega dz_k \quad (9)$$

ترم مختلط سوم در رابطه بالا $(\delta \sigma_{nM}^k (\epsilon_{nG}^k - \epsilon_{nC}^k))$ به منظور ایجاد شرایط سازگاری بین کرنشهای عرضی حاصل از روابط هندسی (G) و معادلات بنیادین (C) می‌باشد. در رابطه فوق زیرنویسهای (G) و (C) بیانگر روابط هندسی و معادلات بنیادین می‌باشند. همچنین زیرنویس M بیانگر این است که تنشهای عرضی از ابتدا مدل شده‌اند و از روابط بنیادین به دست نیامده‌اند. زیرنویسهای p و n به مفهوم متغیر موردنظر در راستای درون صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای، می‌باشند. در رابطه (۹) طبق چهارچوب

توصیف تنشهای عرضی همیشه به فرم لایه‌گون برای تک‌تک لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود.

۲-۱- فرمولاسیون و استخراج معادلات حاکم

در این بخش، فرمولاسیون اجزاء محدود برای یک ورق ساندویچی با هسته نرم وابسته به دما و رویه‌های کامپوزیتی با در نظر گرفتن بارهای گرمایی استخراج خواهد شد. همانطور که در بخشهای بعدی نشان داده خواهد شد، در این پژوهش به علت ضخامت بالای ورق و همچنین انعطاف‌پذیر بودن هسته، استفاده از یک نظریه با دقت بالا ضروری می‌باشد. بنابراین باید از یک نظریه کاملاً لایه‌گون استفاده کرد، که هزینه محاسباتی حل مساله به علت تحلیل اجزاء محدود بسیار بالا خواهد بود. از طرفی اگر بخواهیم از یک مدل تک لایه استفاده کنیم، حجم محاسبات پایین است ولی خطای آن برای مساله مورد نظر زیاد می‌باشد. بنابراین با توجه به موارد ذکر شده می‌توان گفت که در این تحقیق نیاز به یک نظریه می‌باشد که از یک طرف دقت بالا و از طرف دیگر حجم محاسباتی پایینی داشته باشد. بدین منظور یک نظریه هیبریدی جدید در چهارچوب کاری فرمولاسیون واحد کررا با در نظر گرفتن اثرات گرمایی برای تحلیل ورقهای ساندویچی ارائه خواهد شد. فرض می‌شود که سازه در ابتدا در دمای T_0 قرار دارد. سپس رویه‌های پایین و بالا در اثر بارهای گرمایی به ترتیب به دمای T_b و T_t می‌رسند که این تغییر دما مانند شکل ۱ باعث ایجاد توزیع دما در راستای ضخامت در هسته می‌شود.



شکل ۱- توزیع دما در راستای ضخامت ورق ساندویچی

خواص هسته‌های نرم به شدت تابعی از دما می‌باشد. بنابراین در شرایط دمایی مختلف لازم است که این تغییرات خواص در نظر گرفته شود. به عنوان مثال خواص فوم Devinycell HD به صورت تابعی از دما در شکل ۲ آورده شده است. بنابراین در این پژوهش لازم است که خواص هسته به صورت تابعی از دما در نظر گرفته شود. ژانگ و همکارانش [۱۳] با نتایج آزمایشگاهی نشان دادند که برای دسته وسیعی از فوم‌های خانواده Devinycell HD، خواص بی‌بعد آنها با تابع زیر (شکل ۲) با دما تغییر می‌کند:

$$\frac{E(T)}{E(T_0)} = \frac{G(T)}{G(T_0)} = -3.16e - 6T^3 + 4.24e - 4T^2 - 2.27e - 2T + 1.36 \quad (6)$$

در قسمت‌های بعدی جهت در نظر گرفتن تغییرات خواص هسته با دما از این تابع استفاده خواهد شد.

۲-۲- استخراج معادلات حرکت و فرمولاسیون اجزاء

محدود

مساله مورد نظر، ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته انعطاف‌پذیر می‌باشد که تحت بارهای مکانیکی و گرمایی قرار می‌گیرد.

$$\tilde{C}_{pp}^k = C_{pp}^k - C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} C_{np}^k \quad \tilde{C}_{pn}^k = C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} \quad (24)$$

$$\tilde{C}_{np}^k = -C_{nn}^{k-1} C_{np}^k \quad \tilde{C}_{nn}^k = -C_{nn}^{k-1} \quad (25)$$

$$\tilde{\lambda}_p^k = C_{pn}^k C_{nn}^{k-1} \lambda_n^k - \lambda_p^k \quad \tilde{\lambda}_n^k = C_{nn}^{k-1} \lambda_n^k \quad (26)$$

از جایگذاری روابط (22) و (23) در رابطه (9) خواهیم داشت:

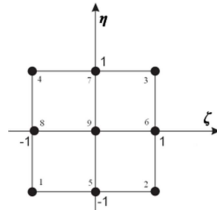
$$\delta(L_{nm} + L_{imT}) = \sum_{k=1}^{N_i} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \underbrace{\delta \epsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pp}^k \epsilon_{pG}^k}_{I} + \underbrace{\delta \epsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nm}^k}_{II} + \underbrace{\delta \epsilon_{nG}^k T \sigma_{nm}^k}_{III} + \underbrace{\delta \sigma_{nm}^k T \epsilon_{nG}^k - \delta \sigma_{nm}^k T \tilde{C}_{np}^k \epsilon_{pG}^k - \delta \sigma_{nm}^k T \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nm}^k}_{IV} + \underbrace{\delta \sigma_{pG}^k T \lambda_p^k \theta^k - \delta \sigma_{nm}^k T \tilde{\lambda}_n^k \theta^k}_{VII} \} d\Omega dz_k \quad (27)$$

در رابطه بالا ترمهای I تا VI مربوط به کار تنشهای مکانیکی و ترمهای VII و VIII مربوط به کار تنشهای گرمایی می باشند. بنابراین می توان نوشت:

$$\delta L_{nm} = \sum_{k=1}^{N_i} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \epsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + \delta \epsilon_{pG}^k T \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nm}^k + \delta \epsilon_{nG}^k T \sigma_{nm}^k + \delta \sigma_{nm}^k T \epsilon_{nG}^k - \delta \sigma_{nm}^k T \tilde{C}_{np}^k \epsilon_{pG}^k - \delta \sigma_{nm}^k T \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nm}^k \} d\Omega dz_k \quad (28)$$

$$\delta L_{imT} = \sum_{k=1}^{N_i} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \epsilon_{pG}^k T \tilde{\lambda}_p^k \theta^k - \delta \sigma_{nm}^k T \tilde{\lambda}_n^k \theta^k \} d\Omega dz_k \quad (29)$$

در این تحقیق به منظور اینکه مساله برای شرایط مرزی مختلف قابل بررسی باشد، برای حل معادلات از روش اجزاء محدود استفاده می شود. بدین منظور از المان لاگرانژی درجه دو (شکل 4) که شامل نه گره می باشد، استفاده می شود.



شکل 4- نمای از المان لاگرانژی درجه دو

طبق فرمولاسیون واحد (رابطه 1) متغیرهای مجهول در راستای ضخامت تفکیک می شوند. بدین منظور توابع ضخامت برحسب توابع لژاندر بیان می شوند که در بخشهای قبلی روابط آن بیان گردید. با استفاده از المان نه گره می توان مجهولات را در راستای درون صفحه ای نیز تفکیک کرد. بنابراین برای مجهولات جایابی و تنشهای عرضی می توان نوشت:

$$u^k = F_r N_r q_{rs}^k \quad \delta u^k = F_s N_s q_{sj}^k \quad (i, j=1, \dots, 9, \quad \tau, s=t, b, r, \quad r=2, \dots, N_i) \quad (30)$$

$$\sigma_{nm}^k = F_r N_r g_{rs}^k \quad \delta \sigma_{nm}^k = F_s N_s g_{sj}^k \quad (i, j=1, \dots, 9, \quad \tau, s=t, b, r, \quad r=2, \dots, N_i) \quad (31)$$

در روابط فوق q_{rs}^k و g_{rs}^k بردار جایجائیهها و تنشهای عرضی گره می باشند که به صورت زیر بیان می شوند:

$$q_{rs}^k = [q_{u,rs}^k \quad q_{v,rs}^k \quad q_{w,rs}^k]^T \quad (32)$$

$$g_{rs}^k = [g_{u,rs}^k \quad g_{v,rs}^k \quad g_{w,rs}^k]^T \quad (33)$$

در روابط (30) و (31) توابع شکل لاگرانژی درجه دو می باشند [14].

پس از جایگذاری روابط (10)، (11)، (30) و (31) در رابطه کار تنشهای مکانیکی (28) و یکسری ساده سازهای ریاضی خواهیم داشت:

کاری کوف کرنشهای درون صفحه ای و خارج صفحه ای را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\epsilon_{pG}^k = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}\}^T = D_p u^k \quad (10)$$

$$\epsilon_{nG}^k = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \epsilon_{zz}\}^T = (D_{np} + D_{nz}) u^k \quad (11)$$

در روابط بالا ماتریسهای دیفرانسیلی به شکل زیر تعریف می شوند:

$$D_p = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{np} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{nz} = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

در روابط فوق $\partial_i (i=x, y, z)$ به مفهوم مشتق گیری نسبت به i می باشد. معادلات بنیادین سه بعدی بین تنش و کرنش و دما به شکل زیر بیان می شوند:

$$\sigma_p^k = C_{pp}^k \epsilon_p^k + C_{pn}^k \epsilon_n^k - \lambda_p^k \theta \quad (13)$$

$$\sigma_n^k = C_{np}^k \epsilon_p^k + C_{nn}^k \epsilon_n^k - \lambda_n^k \theta \quad (14)$$

در روابط بالا ϵ_p^k بردار تنشهای درون صفحه ای، ϵ_n^k بردار تنشهای خارج صفحه ای و $C_{ij}^k (i, j=p, n)$ ماتریسهای سختی مربوط به لایه k ام می باشد که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma_p^k = \{\sigma_{xx}^k, \sigma_{yy}^k, \sigma_{xy}^k\}, \quad \sigma_n^k = \{\sigma_{xz}^k, \sigma_{yz}^k, \sigma_{zz}^k\} \quad (15)$$

$$C_{pp}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k \end{bmatrix}, \quad C_{pn}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13}^k \\ 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & C_{36}^k \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C_{np}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k \end{bmatrix}, \quad C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{45}^k & 0 \\ C_{45}^k & C_{44}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix}$$

در روابط (12) و (13) اختلاف دما می باشد که با توجه به رابطه (1) به فرم متحدالشکل زیر بیان می شود:

$$\theta^k = F_i \theta_i^k + F_b \theta_b^k + F_r \theta_r^k = F_r \theta_r^k \quad (17)$$

$$\tau = t, b, r, \quad r=2, \dots, N_i, \quad k=1, 2, \dots, N_i$$

لازم به ذکر است که در اصل اختلاف دما برابر با $\theta - \theta_0$ می باشد که از اینجا به بعد به شکل مختصر با θ نشان داده می شود. همچنین ضرایب λ_p^k و λ_n^k به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\lambda_p^k = \lambda_{pp}^k + \lambda_{pn}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13}^k \\ 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & C_{36}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3^k \\ \alpha_4^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\lambda_n^k = \lambda_{np}^k + \lambda_{nn}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{55}^k & C_{45}^k & 0 \\ C_{45}^k & C_{44}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3^k \\ \alpha_4^k \\ \alpha_6^k \end{bmatrix} \quad (19)$$

که $\alpha_i^k (i=1, 2, 3, 6)$ ضرایب انبساط گرمایی می باشند. روابط فوق را می توان به شکل فشرده زیر بیان کرد:

$$\lambda_p^k = \lambda_{pp}^k + \lambda_{pn}^k = C_{pp}^k \alpha_p^k + C_{pn}^k \alpha_n^k \quad (20)$$

$$\lambda_n^k = \lambda_{np}^k + \lambda_{nn}^k = C_{np}^k \alpha_p^k + C_{nn}^k \alpha_n^k \quad (21)$$

در فرمولاسیون مختلط جایجائیهها و تنشهای عرضی مجهولات مسئله می باشند. بدین منظور معادلات بنیادین (13) و (14) باید به شکل زیر بازنویسی شوند:

$$\sigma_{pC}^k = \tilde{C}_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + \tilde{C}_{pn}^k \sigma_{nm}^k + \tilde{\lambda}_p^k \theta \quad (22)$$

$$\epsilon_{nC}^k = \tilde{C}_{np}^k \epsilon_{pG}^k + \tilde{C}_{nn}^k \sigma_{nm}^k + \tilde{\lambda}_n^k \theta \quad (23)$$

که ضرایب جدید به شکل زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned}
 K_{u\sigma_{yx}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{u\sigma_{yy}}^{k\pi ij} &= E_{\tau_{,s}} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma_{yz}}^{k\pi ij} &= \langle \tilde{Z}_{pn23}^{k\pi} [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pn36}^{k\pi} [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma_{xz}}^{k\pi ij} &= E_{\tau} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma_{xy}}^{k\pi ij} &= E_{\tau} \langle [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma_{zz}}^{k\pi ij} &= E_{\tau_{,s}} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{xx}}^{k\pi ij} &= E_{\tau_{,z}} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{xy}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{\sigma_{yz}}^{k\pi ij} &= E_{\tau_{,z}} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{yx}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{\sigma_{yy}}^{k\pi ij} &= E_{\tau_{,z}} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{yz}}^{k\pi ij} &= E_{\tau} \langle [N_i N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{zx}}^{k\pi ij} &= - \langle \tilde{Z}_{np13}^{k\pi} [N_i N_{j,x}] \rangle_{\Omega} - \langle \tilde{Z}_{np36}^{k\pi} [N_i N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{zy}}^{k\pi ij} &= - \langle \tilde{Z}_{np23}^{k\pi} [N_i N_{j,y}] \rangle_{\Omega} - \langle \tilde{Z}_{np36}^{k\pi} [N_i N_{j,x}] \rangle_{\Omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\sigma_{zz}}^{k\pi ij} &= E_{\tau_{,z}} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{xx}}^{k\pi ij} &= - \langle \tilde{Z}_{m55}^{k\pi} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{xy}}^{k\pi ij} &= - \langle \tilde{Z}_{m45}^{k\pi} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{xz}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{\sigma_{yx}}^{k\pi ij} &= - \langle \tilde{Z}_{m45}^{k\pi} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{yy}}^{k\pi ij} &= - \langle \tilde{Z}_{m44}^{k\pi} [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \\
 K_{\sigma_{yz}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{\sigma_{zx}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{\sigma_{zy}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{\sigma_{zz}}^{k\pi ij} &= - \langle \tilde{Z}_{m33}^{k\pi} [N_i N_j] \rangle_{\Omega}
 \end{aligned}$$

روابط (۳۸) تا (۴۱)، ماتریسهای سه در سه با نه سلول بنیادی می‌باشند که باید بر حسب اندیسهای $i; j; k; s; \tau; z$ بسط داده شوند. برای به دست آوردن کار تنشهای گرمایی از کرنشهای غیرخطی استفاده می‌شود. به عبارتی رابطه (۲۹) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta L_{intT} = \sum_{k=1}^{N_i} \int_{\Omega_i} \int_{A_i} \{ \delta \varepsilon_{\rho\sigma}^k \tilde{\lambda}_{\rho}^k \theta^k - \delta \sigma_{\mu\nu}^k \tilde{\lambda}_{\nu}^k \theta^k \} d\Omega dz_k \quad (۴۳)$$

در رابطه فوق $\varepsilon_{\rho\sigma}^k$ کرنشهای درون صفحه‌ای غیرخطی می‌باشند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{\rho\sigma}^k = \{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy} \}^{kT} = \mathbf{D}_{\rho\sigma} \mathbf{u}^k \quad (۴۴)$$

که در آن اپراتور دیفرانسیلی غیرخطی می‌باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D}_{\rho\sigma} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \frac{1}{2} \partial_x^2 \\ 0 & \partial_y & \frac{1}{2} \partial_y^2 \\ \partial_y & \partial_x & \partial_{xy}^2 \end{bmatrix} \quad (۴۵)$$

در رابطه فوق ∂_x^2 به مفهوم دو بار مشتق‌گیری نسبت به x و یا ∂_{xy}^2 به مفهوم مشتق‌گیری نسبت به x و y می‌باشد. از جایگذاری روابط (۴۴)، (۳۰) و (۱۷) در رابطه (۴۳) و یکسری ساده سازی خواهیم داشت:

$$\delta L_{intT} = \delta \mathbf{q}_{\sigma}^{kT} (\mathbf{P}_{u\theta}^k + \mathbf{K}_{u\theta}^{kij}) + \delta \mathbf{g}_{\sigma}^{kT} \mathbf{P}_{\sigma\theta}^k \quad (۴۶)$$

که در آن

$$\mathbf{P}_{u\theta}^k = \begin{bmatrix} P_{u\theta\sigma 11}^k \\ P_{u\theta\sigma 21}^k \\ P_{u\theta\sigma 31}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\sigma\theta}^k = \begin{bmatrix} P_{\sigma\theta\sigma 11}^k \\ P_{\sigma\theta\sigma 21}^k \\ P_{\sigma\theta\sigma 31}^k \end{bmatrix} \quad (۴۷)$$

$$\begin{aligned}
 \delta L_{intM}^k &= \langle \delta \mathbf{q}_{\sigma}^{kT} [\mathbf{D}_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\pi} \mathbf{D}_p^T (N_j \mathbf{I})] \mathbf{q}_{\sigma}^k \rangle_{\Omega} + \\
 &+ \langle \delta \mathbf{q}_{\sigma}^{kT} [\mathbf{D}_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\pi} N_j] \mathbf{g}_{\sigma}^k \rangle_{\Omega} + \\
 &+ \langle \delta \mathbf{q}_{\sigma}^{kT} [\mathbf{D}_{n\Omega}^T (N_i \mathbf{I}) E_{\tau} N_j + E_{\tau_{,s}} N_i N_j \mathbf{I}] \mathbf{g}_{\sigma}^k \rangle_{\Omega} + \\
 &+ \langle \delta \mathbf{q}_{\sigma}^{kT} [N_i E_{\tau} \mathbf{D}_{n\Omega} (N_j \mathbf{I}) + E_{\tau_{,z}} N_i N_j \mathbf{I}] \mathbf{q}_{\sigma}^k \rangle_{\Omega} + \\
 &- \langle \delta \mathbf{g}_{\sigma}^{kT} [N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\pi} \mathbf{D}_p (N_j \mathbf{I})] \mathbf{q}_{\sigma}^k \rangle_{\Omega} + \\
 &- \langle \delta \mathbf{g}_{\sigma}^{kT} [N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{nm}^{k\pi} N_j] \mathbf{g}_{\sigma}^k \rangle_{\Omega}
 \end{aligned} \quad (۳۴)$$

در رابطه فوق علامت $\langle \dots \rangle_{\Omega}$ بیانگر انتگرال‌گیری در دامنه Ω و \mathbf{I} ماتریس واحد می‌باشند. همچنین انتگرال‌گیری سفتی‌های لایه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$(\tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\pi}, \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\pi}, \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\pi}, \tilde{\mathbf{Z}}_{nm}^{k\pi}) = (\tilde{\mathbf{C}}_{pp}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{pn}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{np}^k, \tilde{\mathbf{C}}_{nm}^k) E_{\tau} \quad (۳۵)$$

در روابط فوق E_{τ} انتگرال‌گیری توابع ضخامت در راستای z می‌باشند

که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$E_{\tau}, E_{\tau_{,s}}, E_{\tau_{,z}} = \int_{A_k} (F_{\tau} F_s, F_{\tau_{,s}} F_s, F_{\tau_{,z}} F_{s,z}) dz \quad (۳۶)$$

رابطه (۳۴) را می‌توان به شکل فشرده زیر بیان کرد:

$$\delta L_{intM}^k = \delta \mathbf{q}_{\sigma}^{kT} [\mathbf{K}_{u\sigma}^{kij} \mathbf{q}_{\sigma}^k + \mathbf{K}_{u\sigma}^{kij} \mathbf{g}_{\sigma}^k] + \delta \mathbf{g}_{\sigma}^{kT} [\mathbf{K}_{\sigma u}^{kij} \mathbf{q}_{\sigma}^k + \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{kij} \mathbf{g}_{\sigma}^k] \quad (۳۷)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{K}_{u\sigma}^{kij} = \langle [\mathbf{D}_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pp}^{k\pi} \mathbf{D}_p^T (N_j \mathbf{I})] \rangle_{\Omega} \quad (۳۸)$$

$$\mathbf{K}_{u\sigma}^{kij} = \langle [\mathbf{D}_p^T (N_i \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{Z}}_{pn}^{k\pi} N_j + \mathbf{D}_{n\Omega}^T (N_i \mathbf{I}) E_{\tau} N_j + E_{\tau_{,s}} N_i N_j \mathbf{I}] \rangle_{\Omega} \quad (۳۹)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma u}^{kij} = \langle [N_i E_{\tau} \mathbf{D}_{n\Omega} (N_j \mathbf{I}) + E_{\tau_{,z}} N_i N_j \mathbf{I} - N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{np}^{k\pi} \mathbf{D}_p (N_j \mathbf{I})] \rangle_{\Omega} \quad (۴۰)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{kij} = \langle [-N_i \tilde{\mathbf{Z}}_{nm}^{k\pi} N_j] \rangle_{\Omega} \quad (۴۱)$$

برای محاسبه انتگرال‌های فوق از روش انتگرال‌گیری عددی گوسی^۱ استفاده می‌شود. لازم به ذکر است، در حالاتی که لایه‌ها نازک باشند، برای جلوگیری از پدیده قفل شوندگی برشی^۲ از تکنیک انتگرال‌گیری انتخابی کاهش یافته^۳ استفاده می‌شود. بسط صریح ماتریسهای فوق به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 K_{u\sigma_{xx}}^{k\pi ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp11}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma_{xy}}^{k\pi ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp12}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma_{xz}}^{k\pi ij} &= 0 \\
 K_{u\sigma_{yx}}^{k\pi ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp12}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp16}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \\
 K_{u\sigma_{yy}}^{k\pi ij} &= \langle \tilde{Z}_{pp22}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} + \\
 &\langle \tilde{Z}_{pp26}^{k\pi} [N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pp66}^{k\pi} [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \quad (۴۲)
 \end{aligned}$$

$$K_{u\sigma_{yz}}^{k\pi ij} = 0$$

$$K_{u\sigma_{zx}}^{k\pi ij} = 0$$

$$K_{u\sigma_{zy}}^{k\pi ij} = 0$$

$$K_{u\sigma_{zz}}^{k\pi ij} = 0$$

$$K_{\sigma_{xx}}^{k\pi ij} = E_{\tau_{,s}} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega}$$

$$K_{\sigma_{xy}}^{k\pi ij} = 0$$

$$K_{\sigma_{xz}}^{k\pi ij} = \langle \tilde{Z}_{pn13}^{k\pi} [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} + \langle \tilde{Z}_{pn36}^{k\pi} [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega}$$

1 Gaussian quadrature rule

2 Shear locking

3 Selective reduced integration

مولفه‌های روابط فوق به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} P_{u\theta\alpha 11}^{ki} &= E_{\alpha} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p1}^k \theta_{sj}^k + E_{\alpha} \langle [N_{i,y} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k \theta_{s3}^k \\ P_{u\theta\alpha 21}^k &= E_{\alpha} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p2}^k \theta_{sj}^k + E_{\alpha} \langle [N_{i,x} N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k \theta_{s3}^k \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} P_{u\theta\alpha 31}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\alpha 11}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\alpha 21}^k &= 0 \\ P_{\sigma\theta\alpha 31}^k &= E_{\alpha} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{n3}^k \theta_{sj}^k \end{aligned}$$

در رابطه (۴۹) ماتریس سفتی غیرخطی ناشی از اثرات گرمایی

می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_{uu\theta\alpha}^{k\alpha ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{uu\theta\alpha}^{k\alpha ij} \end{bmatrix} \quad (49)$$

که $K_{uu\theta\alpha}^{k\alpha}$ به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{aligned} K_{uu\theta\alpha}^{k\alpha ij} &= -E_{\alpha} (\langle [N_{i,x} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p1}^k + \langle [N_{i,y} N_{j,y}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p2}^k \\ &+ \langle [N_{i,x} N_{j,y} + N_{i,y} N_{j,x}] \rangle_{\Omega} \tilde{\lambda}_{p3}^k) \theta^k \end{aligned} \quad (50)$$

برای کار نیروهای اینرسی می‌توان نوشت:

$$\delta L_{F_{in}} = \sum_{k=1}^{N_i} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{\rho^k \delta u^k T \dot{u}^k\} d\Omega dz_k \quad (51)$$

در رابطه فوق علامت "..." بیانگر دوبرا مشتق نسبت به زمان می‌باشد.

همچنین ρ^k چگالی لایه کام می‌باشد. با جایگذاری روابط (۳۰) و (۲) - (۳۸) در رابطه (۵۹-۲) کار نیروهای اینرسی را در چهار چوب کاری کوف می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\delta L_{F_{in}} = \delta q_{\alpha}^{kT} M^{k\alpha ij} \dot{q}_{sj}^k \quad (52)$$

که

$$M^{k\alpha ij} = \begin{bmatrix} m_{\alpha}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\alpha}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\alpha}^k \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} \end{bmatrix} \quad (53)$$

در رابطه فوق m_{α}^k به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$m_{\alpha}^k = \int_{A_k} \rho^k F_r F_s dz = \rho^k E_{\alpha} \quad (54)$$

و اما تکنیک به کار برده شده در چهار چوب کاری کوف، در این قسمت نیز برای محاسبه کار نیروهای خارجی استفاده می‌شود. به عنوان مثال فرض کنید که توزیع فشار $P^k(x, y, \zeta_1^k)$ بر روی لایه کام در فاصله $\zeta_k = \zeta_1^k$ نسبت به صفحه مبنا Ω_k اعمال شود. بنابراین برای کار نیروهای خارجی می‌توان نوشت:

$$\delta L_{ext} = \int_{\Omega_k} \delta u^{kT}(x, y, \zeta_1^k) P^k(x, y, \zeta_1^k) d\Omega \quad (55)$$

که در رابطه فوق $u^k(x, y, \zeta_1^k)$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$u^k = F_r^1 N_i q_{\alpha}^k \quad (i=1,2,\dots,N_n) \quad (56)$$

در رابطه بالا F_r^1 به مفهوم مقدار تابع ضخامت F_r به ازای $\zeta_k = \zeta_1^k$ می‌باشد.

توزیع فشار $P^k(x, y, \zeta_1^k)$ را می‌توان به فرم متحدالشکل زیر بیان کرد:

$$P^k = F_r^1 P_a^k + F_r^1 P_b^k + F_r^1 P_c^k = F_r^1 P_{\tau}^k \quad (57)$$

که P_{τ}^k را نیز می‌توان به شکل زیر در راستای درون صفحه‌های تفکیک کرد:

$$P_{\tau}^k = N_i p_{\alpha}^k \quad (i=1,2,\dots,9) \quad (58)$$

در رابطه بالا p_{α}^k به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$p_{\alpha}^k = \begin{bmatrix} p_{x\alpha}^k \\ p_{y\alpha}^k \\ p_{z\alpha}^k \end{bmatrix} \quad (59)$$

اندیسهای x, y و z در رابطه فوق به مفهوم توزیع فشار در راستاهای

مذکور می‌باشد. بنابراین رابطه (۵۷) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$P^k = F_r^1 N_i p_{\alpha}^k \quad (60)$$

از جایگذاری روابط (۶۰) و (۵۶) در رابطه (۵۵) کار نیروهای خارجی به

شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta L_{ext} = \delta q_{\alpha}^{kT} P_{\alpha}^k \quad (61)$$

که در آن

$$P_{\alpha}^k = (F_r^1 F_s^1) \begin{bmatrix} \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} p_{ksj}^k \\ \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} p_{ysj}^k \\ \langle [N_i N_j] \rangle_{\Omega} p_{zsj}^k \end{bmatrix} \quad (62)$$

در نهایت معادلات حرکت حاکم بر مساله برای لایه کام، از قرار دادن روابط (۳۷)، (۴۶)، (۵۲) و (۶۱) در رابطه (۷) به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta q_{\alpha}^{kT} : K_{uu}^{k\alpha ij} q_{sj}^k + K_{u\sigma}^{k\alpha ij} g_{sj}^k + M^{k\alpha ij} \dot{q}_{sj}^k = P_{\alpha}^k - P_{u\theta\alpha}^k \quad (63)$$

$$\delta g_{\alpha}^{kT} : K_{\sigma\sigma}^{k\alpha ij} q_{sj}^k + K_{\sigma\sigma}^{k\alpha ij} g_{sj}^k = -P_{\sigma\theta\alpha}^k \quad (64)$$

در رابطه (۶۳)، $K_{uu}^{k\alpha ij}$ ماتریس سفتی کل المانی لایه کام می‌باشد که به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{uu}^{k\alpha ij} = K_{uu\alpha}^{k\alpha ij} + K_{uu\theta}^{k\alpha ij} \quad (65)$$

بعد از بسط اندیسهای T, S, I, j و اسمبل کردن سلولهای بنیادین، مجهولات تنش‌های برشی معادله (۶۴) با استفاده از تکنیک انقباض بر حسب مجهولات جابجایی حل می‌شود (مجهولات تنش‌های برشی حذف می‌شوند) و معادله (۶۳) به شکل زیر بیان می‌شود:

$$Kq + M\dot{q} = P \quad (66)$$

که در این رابطه داریم:

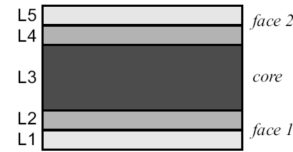
$$K = [K_{uu} - K_{u\sigma} K_{\sigma\sigma}^{-1} K_{\sigma u}], \quad (67)$$

$$P = P + K_{u\sigma} K_{\sigma\sigma}^{-1} P_{\sigma\theta} - P_{u\theta}$$

۲-۲- فرمولاسیون هیبریدی لایه‌گون-تک لایه (LW/ESL)

همانطور که در بخشهای قبلی بیان شد، اینکه به چه طریقی از فرمولاسیون واحد به یک نظریه مورد نظر برسیم، در انتخاب درجه چند جمله‌ای لژاندر و همچنین در نحوه اسمبل کرده سلولهای بنیادین پیاده-سازی می‌شود. در این پژوهش از آنجایی که با یک مساله المان محدود روبرو هستیم بنابراین باید از نظریه استفاده کرد که هزینه محاسباتی تحلیل مساله پایین باشد. از طرفی به دلیل اینکه ورق مورد نظر، ساندویچی ضخیم با رویه‌های چند لایه و هسته انعطاف‌پذیر می‌باشد استفاده از یک نظریه با دقت بالا ضروری می‌باشد. لکن اگر از نظریه‌های لایه‌گون استفاده شود دقت مورد نظر را دارا می‌باشد ولی عیب آن این است که درجات آزادی آن زیاد است که منجر به حجم محاسباتی بالایی می‌شود. از طرف دیگر اگر از نظریه‌های تک لایه استفاده شود، هزینه محاسباتی آن پایین است ولی برای تحلیل ورقهای ساندویچی دقت قابل قبول را ندارد. لذا در این پژوهش از یک مدل هیبریدی لایه‌گون-تک لایه بر اساس فرمولاسیون مختلط RMVT استفاده می‌شود که دارای دقت بالا و حجم محاسباتی پایین می‌باشد.

تحلیل مساله می‌شود. از دیگر مزایای فرمولاسیون هیبریدی این است که مرتبه مدل را می‌توان بر حسب نیاز، به شکل دلخواه انتخاب کرد. به طریقی که در بعضی حالات که ضخامت ورق کم باشد استفاده از مدل‌های مرتبه بالا با حجم محاسباتی زیاد ضرورتی نداشته و می‌توان از مدلی با مرتبه پایین‌تر که دقت قابل قبول و همچنین حجم محاسباتی کمتری دارد، استفاده کرد. در این پژوهش نظریه هیبریدی "لایه‌گون L - تک- لایه E" با نماد LEMN نشان داده می‌شود که M بیانگر فرمولاسیون مختلط و N نشان دهنده مرتبه فرمولاسیون می‌باشد.



شکل ۵- ورق ساندویچی با رویه‌های دو لایه

به عنوان مثال یک ورق ساندویچی را مطابق شکل ۵ در نظر بگیرید که هر کدام از رویه‌های آن از دو لایه تشکیل شده باشد. فرمولاسیون هیبریدی به این صورت است که، یک نظریه تک لایه معادل برای میدان جابجایی کل رویه پایین (face1)، یک نظریه تک لایه معادل برای میدان جابجایی هسته و یک نظریه تک لایه معادل برای میدان جابجایی کل رویه بالا (face2) در نظر گرفته می‌شود. همچنین به منظور پیوستگی تنش‌های عرضی در سطح مشترک تمام لایه‌ها، یک توزیع کاملاً لایه‌گون بر اساس فرمولاسیون مختلط RMVT برای توزیع تنش‌های عرضی برای تمام لایه‌ها (اعم از لایه‌های رویه‌ها و لایه هسته) در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که در فرمولاسیون هیبریدی به منظور ایجاد پیوستگی جابجایی در سطح مشترک رویه‌ها و هسته نمی‌توان از بسط تیلور استفاده کرد بلکه باید از توابع لژاندر که این قابلیت را دارند استفاده شود. در فرمولاسیون مختلط همانطور که قبلاً اشاره شد مجهولات گرهی تنش‌های عرضی با استفاده از تکنیک انقباض استاتیکی از معادلات حاکم حذف می‌شوند. لیکن در نهایت تنها مجهولات مساله، مجهولات جابجایی خواهند بود. به عنوان مثال اگر از مدل برشی مرتبه اول (N=1) برای میدان جابجایی تک‌تک لایه‌ها استفاده کنیم، مجهولات مساله برای یک گره در نظریه کاملاً لایه‌گون به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r = \{ & u_{x_b}^{L1}, u_{y_b}^{L1}, u_{z_b}^{L1}, u_{x_i}^{L1} = u_{x_b}^{L2}, u_{y_i}^{L1} = u_{y_b}^{L2}, u_{z_i}^{L1} = u_{z_b}^{L2}, \\ & u_{x_i}^{L2} = u_{x_b}^{L3}, u_{y_i}^{L2} = u_{y_b}^{L3}, u_{z_i}^{L2} = u_{z_b}^{L3}, u_{x_i}^{L3} = u_{x_b}^{L4}, \\ & u_{y_i}^{L3} = u_{y_b}^{L4}, u_{z_i}^{L3} = u_{z_b}^{L4}, u_{x_i}^{L4} = u_{x_b}^{L5}, u_{y_i}^{L4} = u_{y_b}^{L5}, \\ & u_{z_i}^{L4} = u_{z_b}^{L5}, u_{x_i}^{L5}, u_{y_i}^{L5}, u_{z_i}^{L5} \}^T \end{aligned} \quad (68)$$

در حالیکه برای مدل هیبریدی مجهولات مساله برای یک گره عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r = \{ & u_{x_b}^{faceA}, u_{y_b}^{faceA}, u_{z_b}^{faceA}, u_{x_i}^{faceA} = u_{x_b}^{core}, u_{y_i}^{faceA} = u_{y_b}^{core}, u_{z_i}^{faceA} = u_{z_b}^{core}, \\ & u_{x_i}^{core} = u_{x_b}^{face2}, u_{y_i}^{core} = u_{y_b}^{face2}, u_{z_i}^{core} = u_{z_b}^{face2}, u_{x_i}^{face2}, u_{y_i}^{face2}, u_{z_i}^{face2} \}^T \end{aligned} \quad (69)$$

با توجه به روابط (68) و (69) مشاهده می‌شود که تعداد مجهولات برای یک گره در مدل کاملاً لایه‌گون ۱۸ و در مدل هیبریدی ۱۲ می‌باشد. که این اختلاف برای وقتی که تعداد لایه‌های بیشتر با مدل مرتبه بالاتر مد نظر باشد، بیشتر نیز می‌شود. به عنوان مثال اگر هر کدام از رویه‌ها از ۵ لایه (یعنی کل ورق ۱۱ لایه) تشکیل شده باشد و از مدل مرتبه سه استفاده کنیم، تعداد مجهولات در مدل کاملاً لایه‌گون ۱۰۲ و در مدل هیبریدی ۳۰ می‌شود. بنابراین همانطور که در فصل نتایج مشاهده خواهد شد، با استفاده از مدل هیبریدی با درجات آزادی کمتر می‌توان به نتایج مدل کاملاً لایه‌گون دست یافت که در حجم محاسباتی تحلیل کل مساله بسیار موثر است. لیکن در حالت کلی می‌توان گفت، تعداد کل درجات آزادی برای یک گره در فرمولاسیون هیبریدی $(9N+3)$ است، در حالیکه در مدل کاملاً لایه‌گون $(3[N_f(N+1) - N_f + 1])$ می‌باشد. بنابراین از مزایای فرمولاسیون هیبریدی می‌توان گفت که علی‌رغم پیوستگی تنش‌های عرضی در تمام لایه‌ها، تعداد درجات آزادی مجهول مساله مستقل از تعداد لایه‌ها می‌باشد که منجر به حجم محاسباتی کمتر

۳- مکانیک برخورد

در حالت استاتیکی، قانون برخورد توسط هرترز پیشنهاد شد و سپس توسط محققین برای حالات شبه استاتیکی به کار رفته است [۱۵]. در حال حاضر این قانون با اصلاحاتی برای حالت برخورد دینامیکی نیز به کار می‌رود. اگر F نیروی برخورد و α میزان فرورفتگی باشد، می‌توان قانون برخورد را به صورت زیر نوشت:

$$F = K_c \alpha^{3/2} \quad (68)$$

برای ورق‌های ساندویچی سفتی تماسی در رابطه (68) به شکل زیر بیان می‌شود [۱۶]:

$$K_c = \left(\frac{4}{3}\right) E R_i^{3/2} \quad \frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} \quad (69)$$

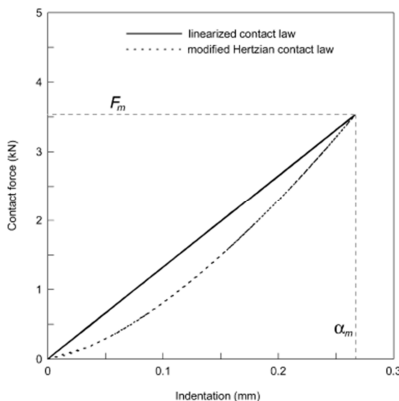
در رابطه فوق زیرنویسهای I و P مربوط به ضربه زننده و هدف (ورق) می‌باشد. ν_p و E_p برای ورق به شکل زیر تخمین زده می‌شوند [۱۷]:

$$E_p = \frac{h}{h_i / E_{ci} + h_b / E_{cb} + h_c / E_{zc}} \quad \nu_p = \frac{\nu_{ci} h_i + \nu_{cb} h_b + \nu_{zc} h_c}{h} \quad (70)$$

که در روابط فوق اندیسهای t, b و c به ترتیب مربوط به رویه بالایی، رویه پایینی و هسته می‌باشند. همچنین اندیس z به مفهوم راستای ضخامت می‌باشد.

۳-۱- قانون تماس خطی شده چوی

در قانون تماس خطی چوی، توان فرورفتگی یک می‌باشد یا به عبارتی قانون تماس به فرم معادله (۷۱) بیان می‌شود که شماتیکی از این قانون در شکل ۶ آورده شده است [۱۸]:



شکل ۶- قانون تماس خطی شده چوی [۱۸]

$$F_c^* = k_c^* \alpha \quad (71)$$

که در رابطه فوق k_c^* سفتی خطی تماس می باشد که به شکل زیر تعریف می شود:

$$k_c^* = F_c \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{k_c^n} \quad (72)$$

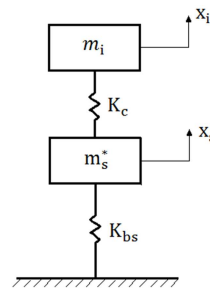
در رابطه بالا F_c, k_c, n به ترتیب نیروی تماس، سفتی تماس و توان در قانون تماس اصلاح شده هرتز می باشند. همانجور که در روابط بالا مشاهده می شود نیروی تماس در هر دو رابطه (71) و (72) مجهول می باشد، بنابراین باید به روش سعی و خطا مشخص شود.

۳-۲- مدل جرم و فنر اطلاع شده در برخورد سرعت های پایین

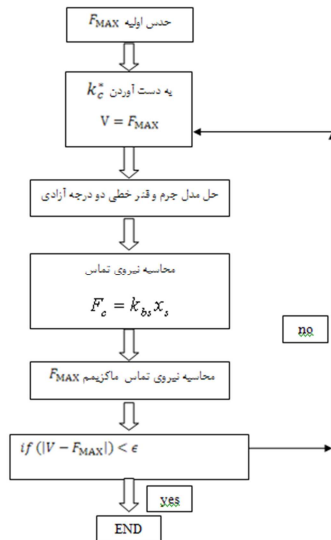
مدل جرم و فنر اطلاع شده، با الهام از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی شیواکومار و همکاران [۱۹] که برای حل مسئله ضربه بر روی ورق دایره ای کامپوزیتی، و همچنین با استفاده از قانون تماس خطی شده چوی [۵۱] که برای تحلیل ضربه روی ورق های مربعی کامپوزیتی استفاده شده، بنا نهاده شده است. شکل ۷ شماتیک سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی استفاده شده در این تحقیق را نشان می دهد که در آن m_i جرم ضربه زننده، m_s^* جرم موثر صفحه ساندویچی، k_c سفتی تماس اصلاح شده و k_{bs} سفتی معادل صفحه ساندویچی، معادل با سفتی های خمشی و برشی، می باشد که از رابطه $k_{bs} = M_s^* \times \omega_{mn}^2$ به دست می آید. ω_{mn} فرکانس طبیعی پایه صفحه ساندویچی می باشد که از تحلیل فرکانسی سازه مطابق با فرمولاسیون هیبریدی محاسبه می شود. همچنین برای محاسبه جرم موثر ورق فرض می شود که جرمی متمرکز در محل برخورد ضربه زننده، به جای کل جرم ورق قرار می گیرد. شرط لازم آن است این جرم متمرکز به اندازه تمام ورق در خود انرژی ذخیره می کند. به عنوان مثال برای یک ورق با شرایط مرزی ساده می توان اثبات کرد که جرم موثر برابر با رابطه زیر می باشد:

$$M_s^* = \frac{1}{4} phab = \frac{1}{4} M_s \quad (73)$$

که در رابطه فوق M_s کل جرم ورق ساندویچی می باشد.



شکل ۷- مدل جرم و فنر دو درجه آزادی



شکل ۸- الگوریتم مدل جرم و فنر اطلاع شده

در این تحقیق برای خطی سازی مساله از خطی سازی چوی استفاده می شود. همانطور که قبلا گفته شد، برای تعیین k_c^* نیروی برخورد لازم است که خود آن نیز مجهول می باشد. بنابراین برای به دست آوردن این پارامتر الگوریتم سعی و خطایی مطابق شکل ۸ در نظر گرفته شده است.

۴- نتایج و بحث روی آنها

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از مساله مذکور پرداخته می شود. بدین منظور مطابق روند ذکر شده در بخش های قبل، کدنویسی اجزاء محدود از ابتدائی ترین مرحله در (M-file) نرم افزار مطلب (Matlab) نوشته شده است و نتایج حاصل می شوند. این فصل از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول صحت سنجی و دقت نتایج تحلیل ضربه حاصل از مدل هیبریدی بررسی شده و در بخش دوم به بررسی نتایج جدید حاصل از این پژوهش پرداخته خواهد شد.

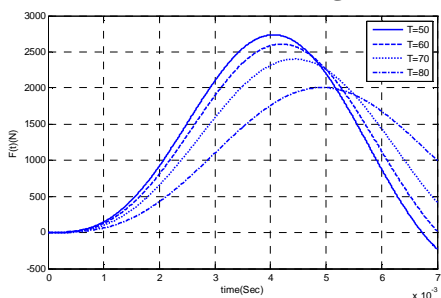
۴-۱- صحت سنجی و دقت مدلسازی ضربه

جهت اطمینان بیشتر از فرمولاسیون ارائه شده در مورد تحلیل ضربه روی ورق ساندویچی، پاسخ دینامیکی تحت ضربه سرعت پایین یک ورق ساندویچی با رویه های چند لایه کامپوزیتی و هسته ضخیم صورت گرفته و نتایج آن با نتایج آزمایشگاهی و همچنین نتایج تحلیلی موجود [۱۷] مقایسه شده است.

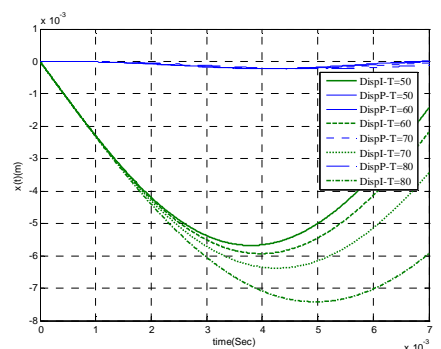
جدول ۱- خواص ورق ساندویچی [۱۷]

خواص	رویه ها	هسته
$E_1, E_2 (GPa)$	54	0.18
$E_3 (GPa)$	4.84	0.18
$G_{12} (GPa)$	3.16	0.07
$G_{23}, G_{13} (GPa)$	1.87	0.07
ν_{12}	0.06	0.286
ν_{23}, ν_{13}	0.313	0.286
$\rho (kg/m^3)$	1511	110

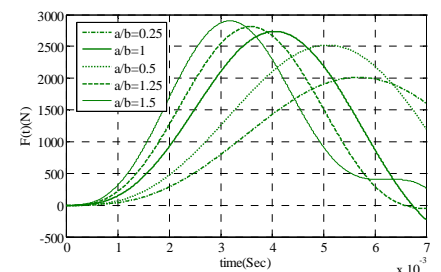
افزایش می‌یابد، سفتی ذاتی سازه به دلیل کاهش خواص هسته کمتر شده و یا به عبارتی انعطاف پذیری سازه کاهش پیدا می‌کند. لازم به ذکر است که در بحث برخورد هرچه زمان برخورد طولانی‌تر شود مثل آن است که نیروی برخورد فرصت بیشتری برای منتقل شدن به سازه دارد و از حالت نیروی لحظه‌ای دور شده که منجر به آسیب کمتر سازه می‌شود. در شکل ۱۲ و ۱۳ تاثیر نسبت منظر روی پاسخ دینامیکی سازه تحت ضربه مطالعه شده است. نتایج بیانگر این مطلب است که با کاهش نسبت منظر نیروی تماسی کاهش و زمان تماس افزایش پیدا می‌کند. دلیل آن است که با ثابت ماندن طول ورق هر چقدر عرض ورق افزایش پیدا کند (یا به عبارت دیگر نسبت منظر کاهش یابد)، ورق گسترده‌تر شده و بنابراین انعطاف‌پذیری سازه بیشتر شده و منجر به کاهش نیروی تماس و افزایش زمان تماس می‌شود.



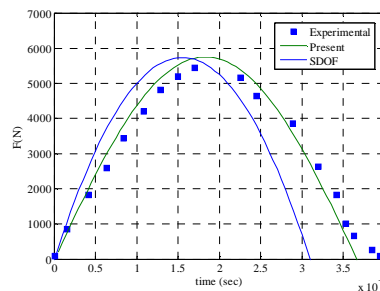
شکل ۱۰- تاریخچه زمانی نیروی ضربه در وسط ورق ساندویچی در دماهای مختلف



شکل ۱۱- تاریخچه زمانی جابه‌جایی ضربه‌زنده و خیز در وسط ورق ساندویچی در دماهای مختلف



شکل ۱۲- تاریخچه زمانی نیروی ضربه در وسط ورق ساندویچی در نسبت منظرهای مختلف



شکل ۹- تاریخچه زمانی نیروی ضربه در وسط ورق ساندویچی

بدین منظور یک ورق ساندویچی با چیدمان $[0_2^{\circ}/90_2^{\circ}/0_2^{\circ}/core/0_2^{\circ}/90_2^{\circ}/0_2^{\circ}]$ در نظر گرفته شده است که خواص ورق مطابق جدول ۱ می‌باشد. اضلاع ورق برابر با $(a = b = 76.2 \text{ mm})$ بوده و ضخامت هسته برابر با $(t_c = 12.7 \text{ mm})$ و همچنین ضخامت رویه‌ها برابر با $(t_f = 0.264 \text{ mm})$ می‌باشد. جرم ضربه زننده 1.8 kg بوده و شعاع سر آن 25.4 mm می‌باشد. همچنین انرژی پتانسیل اولیه ضربه زننده $E = 12.55 \text{ J}$ می‌باشد. تاریخچه نیروی ضربه بر حسب زمان در مرکز ورق در شکل ۹ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج جدید و نتایج آزمایشگاهی وجود دارد. همچنین مشاهده می‌شود که نتایج فرمولاسیون ارائه شده در این تحقیق نسبت به نتایج $SDOI$ ارائه شده در مرجع [۱۷] دارای دقت بیشتری می‌باشد. لازم به ذکر است که در تحلیل‌های فوق برای استخراج نتایج از مدل LEM2 استفاده شده است.

۴-۲- تحلیل ضربه روی ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم وابسته به دما

در این بخش پژوهش به بررسی تحلیل ضربه ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم وابسته به دما پرداخته می‌شود. همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد، در سازه‌های ساندویچی با هسته نرم، تحت شرایط دمایی خواص هسته به شدت وابسته به دما می‌باشد بطوریکه با افزایش دما، خواص ذاتی سازه کاهش می‌یابد. بدین منظور یک ورق مربعی ساندویچی با چیدمان $[(0^{\circ}, 90^{\circ}, 0^{\circ})_s / core / (0^{\circ}, 90^{\circ}, 0^{\circ})_s]$ در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی-گرمایی و هندسی رویه‌های کامپوزیتی و هسته نرم به شکل زیر می‌باشند [۲۰]:

$$E_1 = 50 \text{ GPa}, \quad E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa}, \quad G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \quad \alpha_L = 1.5e-8 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}, \quad \alpha_T = 1e-6 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

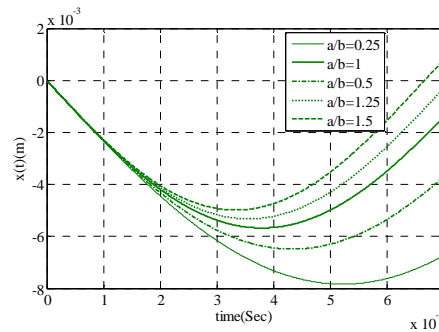
$$\rho_t = \rho_b = 1600 \text{ kg/m}^3 \quad a = b = 1 \text{ m}, h_t = h_b = 0.01 \text{ m}, \quad h = 0.1 \text{ m}$$

$$E_0 = 85 \text{ MPa}, \quad \nu_c = 0.25, \quad \rho_c = 100 \text{ kg/m}^3, \quad \alpha_c = 35e-5 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

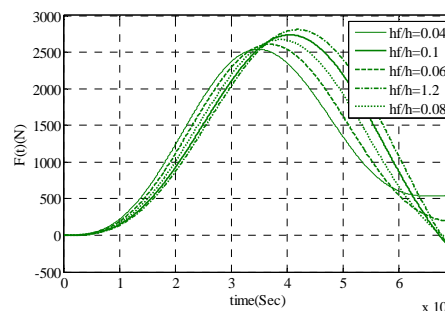
فرض می‌شود که دمای ورق از 20°C درجه به مقادیر ذکر شده در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ برسد. همچنین انرژی پتانسیل اولیه ضربه زننده $E = 5 \text{ J}$ می‌باشد. شکل ۱۰ تاریخچه نیروی برخورد بر حسب زمان و شکل ۱۱ مقدار جابه‌جایی ضربه زننده و خیز وسط ورق را برای دماهای مختلف نشان می‌دهند. با توجه به شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که وابستگی خواص هسته به دما تاثیر چشمگیری روی مقدار ماکزیمم نیروی ضربه و همچنین زمان ضربه دارد. بطوریکه افزایش دما تا 60°C درجه سانتیگراد باعث می‌شود که نیروی برخورد بیش از 30% درصد کاهش و زمان برخورد تا بیش از 40% درصد افزایش پیدا کند. علت آن است که وقتی دما

۶- مراجع

- [1] Koller M.G., Elastic impact of spheres on sandwich plates, J. App. Math. Phys., Vol. 37, 1986.
- [2] Nemes JA., Simmonds KE., Low Velocity Impact Response of Foam-Core Sandwich Composites, J. Comp. Mate., Vol. 26, pp. 500-519, 1992.
- [3] Abrate S., Localized Impact on Sandwich Structures With Laminated Facings, J. app. Mech., vol. 50, pp. 69-82, 1997.
- [4] Hoo Fatt M.S., Park K.S., Dynamic Models for Low-Velocity Impact Damage of Composite Sandwich Panels-Part B: Damage Initiation. Comp. Struc., Vol. 52, pp. 353-364, 2001.
- [5] Hoo Fatt M.S., Park K.S., Dynamic Models for Low-Velocity Impact Damage of Composite Sandwich Panels-Part A: Deformation, Comp. Struc., Vol. 52, pp. 335-351, 2001.
- [6] Koissin V., Skvortsov V., Krahmalev S., Shilpsha A., The Elastic Response of Sandwich Structures to Local Loading, Comp. Struc., Vol. 63, pp. 375-385, 2004.
- [7] Yu J., Wang E., Li J., Zheng Z., Static and low-velocity impact behavior of sandwich beams with closed-cell aluminum-foam core in three-point bending, Int. J. Imp. Eng., Vol. 35, No. 8, pp. 885-894, 2008.
- [8] Qin Q.H., Wang T.J., Low-velocity heavy-mass impact response of slender metal foam core sandwich beam, Comp Struc. Vol. 93, No. 6, pp. 1526-1537, 2011.
- [9] Matsunaga H., Free vibration and stability of angle-ply laminated composite and sandwich plates under thermal loading, Comp Struc., Vol. 77, pp. 249-262, 2007.
- [10] Frostig Y., Thomsen O.T., On the free vibration of sandwich panels with a transversely flexible and temperature-dependent core material – Part I: Mathematical formulation, Comp. Sci. Tech., Vol. 69, pp. 856-862, 2009.
- [11] Frostig Y., Thomsen O.T., On the free vibration of sandwich panels with a transversely flexible and temperature-dependent core material – Part II: Numerical study, Comp. Sci. Tech, Vol. 69, pp. 863-869, 2009.
- [12] Carrera E., A class of two-dimensional theories for anisotropic multilayered plates analysis, Atti Accad Sci Torino Mem Sci Fis, 19-20, 1-39, 1995.
- [13] Zhang S., Dulieu-Barton J.M., Fruehmann R.K., Thomsen O.T., A Methodology for Obtaining Material Properties of Polymeric Foam at Elevated Temperatures, Exp. Mech., Vol. 52, pp. 3-15, 2012.
- [14] Reddy J.N., An Introduction to the finite element method, 2nd ed, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [15] Abrate S., 1991. Impact on Laminated Composite Materials, Appl. Mech. Rev. 44, 155-190.
- [16] Khalili M.R., Analysis of the Dynamic Response of Large Orthotropic Elastic Plates to Transverse Impact and Its Application to Fiber Reinforced Plates, Ph.D. Thesis, Indian Institute of Technology, Delhi. 1992.
- [17] Khalili M.R., Malekzadeh K, Mittal R.K, Effect of physical and geometrical parameters on transverse low-velocity impact response of sandwich panels with a transversely flexible core, Comp. Struc. Vol. 77, pp. 430-443, 2007.
- [18] Choi I.H., Lim C.H., Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law, Comp. Struc., Vol. 66, pp. 125-132, 2004.
- [19] Shivakumar K.N., Elber W., Iiig W., "Prediction of Impact Force and Duration due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates, J. App. Mech., Vol. 52, pp. 674-680, 1985.
- [20] Kulkarni S.D., Kapuria S., "Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third order zigzag theory", Comput Mech. Vol. 42, No. 6, pp. 803-24, 2008
- [21] Carrera E., Brischetto S., A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates, Applied Mechanics Reviews, 62, 010803 (17 pages), 2009.



شکل ۱۳- تاریخچه زمانی جابه جایی ضربه زنده در نسبت منظرهای مختلف



شکل ۱۴- تاریخچه زمانی نیروی ضربه در وسط ورق ساندویچی در سبب ضخامت رویه های مختلف

در شکل ۱۴ نیز تاثیر نسبت ضخامت رویه به ضخامت کل، روی نیروی تماسی سازه بررسی شده است. مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت، نیروی تماسی بزرگتر می شود. به عبارتی با افزایش نسبت ضخامت از آنجایی که سفتی رویه ها از هسته بیشتر می باشد منجر به افزایش سفتی کل سازه شده و در نتیجه نیروی تماسی بیشتر می شود.

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش تحلیل ضربه سرعت پایین یک ورق ساندویچی با رویه های چند لایه کامپوزیتی و هسته انعطاف پذیر با در نظر گرفتن اثرات گرمایی و خواص هسته به دما بررسی شده است. از آنجایی که تعداد لایه های کامپوزیتی هر رویه ممکن است زیاد باشد، استفاده از نظریه های لایه گون منجر به حجم بالای محاسبات و استفاده از نظریه های تک لایه منجر به دقت پایین محاسبات خواهد شد. بنابراین در این پژوهش از فرمولاسیون واحد کوف (که تمام نظریه های موجود اعم از تک لایه، لایه گون و نظریه های مرتبه بالا را در بر می گیرد)، با در نظر گرفتن اثرات گرمایی استفاده شده است. ضمناً برای بالا بردن دقت محاسبات، پیوستگی تنشهای عرضی در تمام لایه ها لحاظ می شود و برای جلوگیری از قفل شوندگی برشی از روش انگرال گیری کاهش یافته استفاده شده است. در این تحقیق جهت در نظر گرفتن اثرات گرمایی از کرنشهای غیرخطی استفاده شده است. برای مدلسازی ضربه یک مدل بهبود یافته جرم و فنر ارائه شده است که از مدل دو درجه آزادی و همچنین قانون تماس خطی شده چوی استفاده شده است. نتایج حاصل با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده اند که بیانگر دقت بالای مدل ارائه شده می باشد. نتایج نشان می دهد بالا رفتن دما تاثیر چشمگیری روی پاسخ ضربه دارد به طوری که با افزایش دما نیروی ضربه کاهش و زمان برخورد افزایش می یابد.