

حل تشابهی لایه مرزی غلظت برای جریان های بلازیوس و ساکیادیس با در نظر گرفتن اثرات تابش

اسماعیل لکزیان*

مهدی کرمی

محمد حسن اکبری زاده

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

چکیده

این تحقیق با هدف تجزیه و تحلیل اثرات تابش در لایه مرزی آرام یک صفحه تخت ساکن با جریان با سرعت یکنواخت (جریان بلازیوس) و یک صفحه در حال حرکت با سیال ساکن (جریان ساکیادیس) انجام شده است. معادلات اندازه حرکت، انرژی و غلظت به روش تشابهی حل شده است. نتایج حل تحلیلی معادلات دمایی و غلظتی با داده‌های تحقیقات منتشر شده مقایسه و انطباق مناسب حاصل شده است. در این تحقیق برای اولین بار روابط تحلیلی برای عدد نوسلت و شروع در لایه مرزی آرام جریان بلازیوس همراه با تابش لایه‌ای می‌شود. اثرات تابش گرمایی بر روی لایه مرزی غلظت برای مقادیر مختلف عدد اشمیت S_c و پارامتر تابش N_R بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر تابش N_R و عدد اشمیت S_c ضخامت لایه مرزی غلظت کاهش و گردایان غلظتی افزایش می‌یابد، که این تاثیرات در جریان ساکیادیس بیشتر از جریان بلازیوس است. همچنین با افزایش پارامتر انتقال گرما a ضخامت لایه مرزی غلظت و گردایان غلظتی افزایش می‌یابد. نتایج این تحقیق می‌تواند در طراحی بهینه فرآیندهای با دمای بالا مانند توربین‌گاز، نیروگاه هسته‌ای و ذخیره‌سازی انرژی استفاده گردد.

واژه‌های کلیدی: حل تشابهی، غلظت، تابش گرمایی، انتقال گرما، جریانهای بلازیوس و ساکیادیس.

A Similarity Solution of Radiation Effects on the Concentration Boundary Layer in the Blasius and Sakiadis Flows

E. Lakzian
M. Karami
M. H. Akbarizadeh

Mechanical Engineering Department, Hakim Sabzevari University, Sabzevari, Iran
Mechanical Engineering Department, Hakim Sabzevari University, Sabzevari, Iran
Mechanical Engineering Department, Hakim Sabzevari University, Sabzevari, Iran

Abstract

This study aims to analyze the effects of thermal radiation on the laminar boundary layer about a flat plate in a uniform stream (Blasius flow), and about a moving plate in a stagnant fluid (Sakiadis flow) is being studied. Momentum, energy and concentration equations are solved by the similarity method. Analytical results of energy and concentration equations are validated with previous studies and showed an excellent agreement. Analytical relations for Nusselt and Sherwood numbers for the first time in the laminar boundary layer with radiation are presented and the effects of thermal radiation on the concentration boundary layer for different values of Schmidt number S_c and the radiation parameter N_R . The results show that with increasing the radiation parameter N_R and Schmidt number S_c , the concentration boundary layer decreases and the concentration gradient increases that these effects are more in the Sakiadis flow than the Blasius flow. And also with increasing the heat transfer parameter the concentration boundary layer and the concentration gradient increase.

Keyword: Similarity solution, Concentration, Thermal radiation, Heat transfer, Blasius and Sakiadis flows.

۱- مقدمه

ذخیره سازی انرژی گرمای اهمیت زیادی دارند. حسین و تخار [17] تاثیر تابش حرارتی را همراه با جابجایی روی یک صفحه قائم در یک جریان آزاد یکنواخت با استفاده از تقریب پخش رزولند بررسی کرده اند.

کرتل [18] به بررسی اثرات تابش حرارتی در لایه مرزی حرارتی برای جریان های بلازیوس و ساکیادیس پرداخته است. رافائل کرتل با افزایش مقادیر عدد پراکتل P_r در مورد افزایش و یا کاهش لایه مرزی حرارتی برای هر دو جریان بلازیوس و ساکیادیس و مقایسه لایه مرزی در این دو جریان بحث کرد.

در این مقاله برای اولین بار اثرات تابش حرارتی را بر روی لایه مرزی غلظت برای جریان های بلازیوس و ساکیادیس برای مقادیر

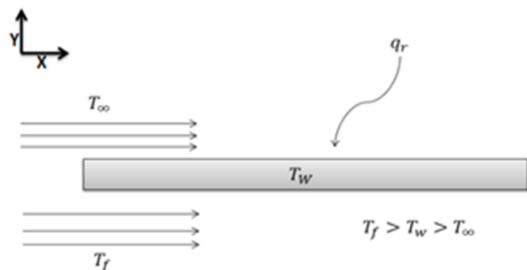
جریان های بلازیوس [1,2] و ساکیادیس [3,4] به طور گسترده در حل‌های تشابهی لایه مرزی جریان بر روی یک صفحه تخت معرفی می شوند. هاوارد [5] و مگیاری [6]، محاسبات را با استفاده از روش رانگ کوتا برای جریان بر روی یک صفحه بررسی کردند. آسیاتامبی [7] یک روش تفاضل محدود را برای حل معادله فالکنر اسکن ارائه کرد. وانگ [8] یک روش حل تقریبی برای معادله بلازیوس کلاسیک با استفاده از روش تجزیه آدومین فراهم نموده است. در مقالات اخیر که به وسیله فنگ [9-12] و همکارانش، لی [13] و کرتل [14-16] به چاپ رسیده است، مسئله کلاسیک جریان را با فرضیات متفاوتی بررسی کرده‌اند. انتقال گرمای جابجایی همراه با تابش حرارتی در فرایندهای دما بالا مانند توربین‌های گاز، نیروگاه های هسته ای و

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: e.lakzian@hsu.ac.ir

مختلف عدد اشمیت S_c و پارامتر تابش N_R مورد بررسی قرار داده شده، که لایه مرزی غلظت از لحاظ ضخامت و گرادیان غلظتی در جریان های بلازیوس و ساکیادیس مقایسه شده است. همچنین در جریان بلازیوس برای عدد نوسلت و عدد شروود با استفاده از روش حداقل مربعات، روابط تحلیلی ارائه شده است.

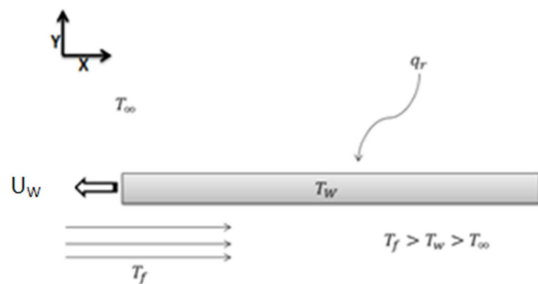
۲- هندسه مسئله

در جریان بلازیوس یک صفحه تخت ثابت در جریان یکنواخت از سیال قرار گرفته که سیال سردی با دمای T_∞ روی سطح بالای صفحه و سیال گرمی با دمای T_f در زیر صفحه جریان دارد. در این هندسه $T_f > T_w > T_\infty$ می باشد. سطح بالای شکل ۱ در معرض تابش حرارتی q_r قرار گرفته است. تابش وارد شده به این سطح، اثراتی بر روی لایه مرزی غلظت گذاشته است.



شکل ۱- هندسه جریان بلازیوس

در جریان ساکیادیس یک صفحه تخت در یک سیال ساکن با دمای T_∞ با سرعت ثابت در حال حرکت است. سطح پایین این صفحه با سیال گرمی با دمای T_f تحت تاثیر قرار می گیرد. در این هندسه دمای $T_f > T_w > T_\infty$ است. سطح بالای شکل ۲ در معرض تشعشعی حرارتی q_r قرار گرفته است. تابش وارد شده به این سطح، اثراتی بر روی لایه مرزی غلظت گذاشته است.



شکل ۲- هندسه جریان ساکیادیس

۳- معادلات حاکم

با توجه به جمله تابش گرمایی در معادله انرژی، معادلات حاکم بر حرکت، انتقال گرما و غلظت برای مسئله جریان بلازیوس صفحه تخت را می توان به صورت زیر ارائه کرد [19,20]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial q_r}{\partial y} \quad (3)$$

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad (4)$$

شرایط مرزی سرعت برای جریان بلازیوس صفحه تخت عبارتند از:

$$u = v = 0 \quad \text{در } x = 0 \quad \text{و} \quad u = U_\infty \quad \text{در } y = 0$$

$$u \rightarrow U_\infty \quad \text{وقتی که } y \rightarrow \infty$$

برای جریان کلاسیک ساکیادیس صفحه تخت عبارتند از:

$$v = 0 \quad \text{در } y = 0 \quad \text{و} \quad u = U_w$$

$$u \rightarrow 0 \quad \text{وقتی که } y \rightarrow \infty$$

در اینجا u و v مولفه های سرعت در امتداد مسیر جریان (جهت -X) و عمود به مسیر جریان (جهت -Y)، ν لزجت سینماتیکی، K رسانایی گرمایی، U_∞ سرعت یکنواخت سیال، U_w سرعت صفحه می باشد.

شرایط مرزی غلظتی برای صفحه تخت عبارت است از:

$$\rho \rightarrow \rho_\infty \quad \text{وقتی که } y \rightarrow \infty$$

و شرط مرزی غلظتی در $y = 0$ روی صفحه با استفاده از شرایط مرزی دمایی معادله (۳۰) و رابطه بین دما و غلظت (۳۲)، رابطه الف-۲ تا و-۲ بدست آمده است.

شار گرمایی در این مسئله به صورت زیر تعریف می شود:

$$q_r = -\frac{4\sigma^* \partial T^4}{3k^* \partial y} \quad (5)$$

که در آن به ترتیب σ^* ثابت استفان بولتزمن k^* متوسط ضریب جذب رزولند است. با فرض تغییرات خطی و با استفاده از سری تیلور تقریب دمایی زیر حاصل می شود [19, 21]:

$$T^4 \cong 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4 \quad (6)$$

با استفاده از رابطه (۵) و (۶)، معادله (۳) به صورت زیر حاصل می شود:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\alpha + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7)$$

که در معادله (۷) $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ ضریب پخش حرارتی است.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\alpha}{k_0} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$k_0 = \frac{3N_R}{3N_R + 4} \quad (9)$$

$$N_R = \frac{kk^*}{4\sigma^* T_\infty^3} \quad (10)$$

در حالت حدی زمانی که در معادلات (۱۰،۹،۸) $N_R \rightarrow \infty$ ، $k_0 \rightarrow 1$ داریم:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (11)$$

اکنون، متغیر تشابهی η و تابع جریان بی بعد $f(\eta)$ به صورت زیر معرفی می شوند:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U\eta}{2x} f'''; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U\eta}{2x} f''' \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U f'' \sqrt{\frac{U}{\nu x}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x} f''' \quad (15)$$

که کمیت a باید ثابت و تابعی از X نباشد. شرط تناسب ضریب انتقال گرمای جابجایی سیال گرم با $X^{-1/2}$ برای وجود حل تشابهی لازم است، پس خواهیم داشت:

$$h_f = \frac{-1}{cX^{1/2}} \quad (30)$$

شرایط مرزی معادله انرژی (۱۸):

$$\theta'(0) = -a[1 - \theta(0)]$$

$$y \rightarrow \infty \quad \theta \rightarrow 0$$

معادلات حاکم را با توجه به شرایط مرزی آنها توسط رانگ کوتای مرتبه ۴ حل تا نمودارهای (۱،۲،۳) حاصل گردد.

زمانی که عدد ماخ کوچکتر از 0.3 باشد می توان معادلات حاکم را تحت فرض تراکم ناپذیری ساده سازی کرد، اما همواره تغییرات دانسیته وجود دارد و این فرض فقط به جهت ساده سازی می باشد [22]. با توجه به آنکه تغییرات دمایی در سطح صفحه بر شرط مرزی غلظت در سطح صفحه موثر می باشد. بنابراین جهت بدست آوردن شرط مرزی غلظت از روابط (۳۱) و (۳۲) برای گاز کامل استفاده شده است:

$$PV = mRT \quad (31)$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (32)$$

برای سیال عامل هوا خواهیم داشت :

$$R = 0.287 \text{ (kJ/kg} \cdot \text{K)} \text{ و } P = 101.325 \text{ (KPa)} \quad (33)$$

$$\rho = \frac{101.325}{0.287 \times (273.15 + \theta)}$$

رابطه چگالی بی بعد λ ($\lambda = \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_f - \rho_\infty}$) با استفاده از شکل های ۴ تا ۶ حاصل می گردد و رابطه (۳۳) برای مقادیر مختلف S_c ، a ، N_{Rf} حاصل می شود :

$$N_{Rf} = 0.7 \text{ و } a = 5, S_c = 0.58$$

$$\lambda_{Blasius} = -5E-06\eta^6 + 7E-05\eta^5 - 0.0003\eta^4 + 0.0007\eta^3 - 0.0007\eta^2 + 0.002\eta + 1.2881 \quad (1-الف)$$

$$\lambda_{Sakiadis} = -4E-06\eta^6 + 4E-05\eta^5 - 0.0001\eta^4 + 0.0001\eta^3 - 0.0005\eta^2 + 0.0027\eta + 1.2883$$

$$N_{Rf} = 10 \text{ و } a = 5, S_c = 0.58$$

$$\lambda_{Blasius} = 1E-06\eta^6 - 8E-06\eta^5 + 6E-05\eta^4 - 0.0003\eta^3 + 0.0003\eta^2 + 0.0022\eta + 1.2882 \quad (1-ب)$$

$$\lambda_{Sakiadis} = 1E-05\eta^6 - 0.0002\eta^5 + 0.0008\eta^4 - 0.0017\eta^3 + 0.0005\eta^2 + 0.0035\eta + 1.2885$$

$$N_{Rf} = 0.7 \text{ و } a = 1, S_c = 0.72$$

$$\lambda_{Blasius} = -2E-08\eta^6 + 6E-07\eta^5 - 5E-06\eta^4 + 1E-05\eta^3 - 1E-05\eta^2 + 0.0008\eta + 1.2886 \quad (1-ج)$$

$$\lambda_{Sakiadis} = 3E-09\eta^6 - 1E-07\eta^5 + 2E-06\eta^4 - 1E-05\eta^3 - 1E-05\eta^2 + 0.0007\eta + 1.2885$$

$$N_{Rf} = 0.7 \text{ و } a = 1, S_c = 1.7$$

$$\lambda_{Blasius} = -3E-06\eta^6 + 4E-05\eta^5 - 0.0001\eta^4 + 0.0001\eta^3 - 0.0002\eta^2 + 0.0017\eta + 1.2894 \quad (1-د)$$

$$\lambda_{Sakiadis} = 8E-05\eta^6 - 0.0007\eta^5 + 0.0023\eta^4 - 0.0036\eta^3 + 0.0017\eta^2 + 0.0019\eta + 1.2901$$

$$N_{Rf} = 0.7 \text{ و } a = 0.5, S_c = 0.58$$

$$\lambda_{Blasius} = 8E-06\eta^4 - 7E-05\eta^3 + 1E-05\eta^2 + 0.0012\eta + 1.2899 \quad (1-ه)$$

$$N_{Rf} = 0.7 \text{ و } a = 20, S_c = 0.58$$

$$\lambda_{Blasius} = 2E-05\eta^4 + 0.001\eta + 1.287 \quad (1-و)$$

$$\lambda_{Sakiadis} = 2E-05\eta^4 + 0.002\eta + 1.288$$

در معادلات (۱۲) تا (۱۵) $U = U_\infty$ برای جریان بلازیوس و $U = U_w$ نشان دهنده جریان ساکیادیس می باشد.

از این متغیرهای ساده برای تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) به معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) استفاده شده است.

جهت بی بعد سازی معادله انرژی از دمای بی بعد استفاده می شود:

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty} \quad (16)$$

که در معادله (۱۶)، T_f دمای سیال گرم پایین صفحه، T_∞ دمای سیال سرد بالای صفحه می باشد. همچنین فرض می شود که سطح پایین صفحه گرما را بوسیله ی جابجایی از یک سیال گرم با یک دمای ثابت T_f دریافت می کند.

با قرار دادن معادلات (۱۳) و (۱۶) در معادلات (۲) و (۱۱) معادلات زیر حاصل می شوند:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (17)$$

$$\theta'' + \frac{Pr k_0}{2} f\theta' = 0 \quad (18)$$

شرایط مرزی معادله حرکت (۱۷) برای جریان بلازیوس عبارتند از :

$$\eta = 0 \quad f = 0 \text{ و } f' = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f' \rightarrow 1$$

شرایط مرزی معادله حرکت (۱۷) برای جریان ساکیادیس عبارتند از :

$$\eta = 0 \quad f = 0 \text{ و } f' = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f' \rightarrow 0$$

از سوی دیگر با ترکیب معادلات (۵) و (۶) معادله (۱۹) حاصل می شود:

$$q_r = -\frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (19)$$

بنابراین، شار تابشی روی سطح بالای صفحه در شکل (۲،۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$(q_r)_w = -\frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w \quad (20)$$

با استفاده از رابط (۱۲) و (۱۶) داریم :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = (T_f - T_\infty) \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} \theta'(0) \quad (21)$$

$$(q_r)_w = -\frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} (T_f - T_\infty) \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} \theta'(0) \quad (22)$$

شرط مرزی سیال سرد در سطح صفحه به صورت رابطه های (۲۳) و (۲۴) بیان می شود.

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w + (q_r)_w = h_f(T_f - T_w) + (q_r)_w \quad (23)$$

$$y \rightarrow \infty \quad T \rightarrow T_\infty \quad (24)$$

$$\theta'(0) = -\frac{h_f}{k} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{T_f - T_w}{T_f - T_\infty} \quad (25)$$

رابطه های (۲۲) - (۲۳) به صورت زیر تبدیل شده است:

$$(q_r)_w = \frac{4}{3N_{Rf}} h_f(T_f - T_w) \quad (26)$$

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w + (q_r)_w = \frac{h_f}{k_0} (T_f - T_w) \quad (27)$$

$$\theta'(0) = -\frac{h_f}{k} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} [1 - \theta(0)] \quad (28)$$

$$a = \frac{c}{k} \sqrt{\frac{\nu}{U}} \quad (29)$$

معادله تشابهی غلظت و شرایط مرزی آن به شرح ذیل می باشد.

$$\lambda'' + \frac{S_c}{2} \lambda \lambda' = 0 \quad (34)$$

$$\lambda'(0) = -a[1 - \lambda(0)] \quad (35)$$

$$\lambda(\infty) = 0 \quad (36)$$

برای بدست آوردن مقدار پارامتر a از معادلات (الف-و) در $\eta = 0$ مقادیر $\lambda(0)$ و $\lambda'(0)$ را بدست آورده و سپس این مقادیر را در شرط مرزی (35) جایگزین می شود. شرط مرزی (35) به ترتیب برای معادلات (الف-و) به تفصیل زیر محاسبه می گردد.

$$\lambda'_b(0) = -0.006942[1 - \lambda(0)] \quad (2-ف)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_s(0) &= -0.0093652[1 - \lambda(0)] \\ \lambda'_b(0) &= -0.00763359[1 - \lambda(0)] \end{aligned} \quad (2-ب)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_s(0) &= -0.0121317[1 - \lambda(0)] \\ \lambda'_b(0) &= -0.002772[1 - \lambda(0)] \end{aligned} \quad (2-ج)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_s(0) &= -0.0024263[1 - \lambda(0)] \\ \lambda'_b(0) &= -0.0058742[1 - \lambda(0)] \\ \lambda'_s(0) &= -0.0065495[1 - \lambda(0)] \end{aligned} \quad (2-د)$$

و در ادامه

$$\begin{aligned} \lambda'_b(0) &= -0.0041394[1 - \lambda(0)] \\ \lambda'_s(0) &= -0.005854[1 - \lambda(0)] \end{aligned} \quad (2-ه)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_b(0) &= -0.0034843[1 - \lambda(0)] \\ \lambda'_s(0) &= -0.0069444[1 - \lambda(0)] \end{aligned} \quad (2-و)$$

با حل همزمان معادله تشابهی غلظت (34) و اندازه حرکت (17) و شرایط مرزی آنها توسط نرم افزار Mople نمودارهای $\lambda-\eta$ (شکل 7 و 8) حاصل خواهد شد.

عدد نوسلت (گرادیان دمایی بی بعد) و عدد شروود (گرادیان غلظت بی بعد) برای جریان بلازیوس به صورت زیر بدست می آید:

$$T = T_\infty + (T_f - T_\infty)\theta \quad (37)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (38)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_\infty) \quad (39)$$

$$Nu_x = \frac{hx}{k} \quad (40)$$

$$Nu_x = -\left. \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right|_{\eta=0} Re_x^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

نوسلت تابعی از a, Pr, NR می باشد [22]:

$$Nu_x = ka^b Pr^n NR^m Re_x^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$G = -\left. \frac{\theta'(\eta)}{\theta(\eta)} \right|_{\eta=0} = ka^b Pr^n NR^m \quad (43)$$

$$\ln G = \ln k + b \ln a + n \ln Pr + m \ln NR \quad (44)$$

از رابطه (44) و با استفاده از روش حداقل مربعات، پارامترهای k, b, n, m حاصل می گردد:

$$Nu_{x,Blasius} = 0.328a^{0.081} Pr^{0.333} NR^{0.017} Re_x^{0.5} \quad (45)$$

با جایگزینی $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ و $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ در معادله (45) خواهیم داشت:

$$Nu_{x,Blasius} = 0.328a^{0.081} NR^{0.017} \alpha^{-0.237} \nu^{-0.263} U^{0.5} x^{0.5} \quad (46)$$

با توجه به رابطه (45) پارامترها a, NR, Pr, Re رابطه مستقیم با عدد نوسلت دارند و تاثیر آنها روی عدد نوسلت متفاوت است. پارامتر تابش NR کمترین تاثیر و عدد رینولدز Re بیشترین تاثیر را در عدد نوسلت دارد و همچنین تاثیر عدد پرنتل Pr بیشتر از تاثیر پارامتر تابش NR روی عدد نوسلت است. رابطه (46) نشان می دهد که پارامتر پخشندگی گرمایی α و لزجت سینماتیکی ν با عدد نوسلت رابطه معکوس دارند و سرعت تاثیر مستقیم روی عدد نوسلت خواهد داشت.

$$Sh_x = -\frac{\lambda'(\eta)}{\lambda(\eta)} Re_x^{1/2} \quad (47)$$

$$Sh_{x,Blasius} = 0.329a^{-0.05} S_c^{0.333} NR^{0.144} Re_x^{0.5} \quad (48)$$

با جایگزینی $S_c = \frac{\nu}{D}$ و $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ در معادله (48) خواهیم داشت:

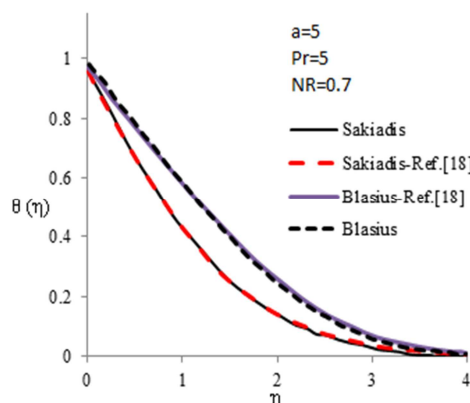
$$Sh_{x,Blasius} = 0.329a^{-0.05} NR^{0.144} D^{-0.369} \nu^{-0.131} U^{0.5} x^{0.5} \quad (49)$$

با توجه به رابطه (48) پارامترهای NR, S_c, Re رابطه مستقیم و پارامتر a رابطه معکوس با عدد شروود دارد که تاثیر آنها روی عدد شروود متفاوت است. مشخصه انتقال گرمایی a کمترین تاثیر و عدد رینولدز Re بیشترین تاثیر را در عدد شروود دارد و همچنین تاثیر عدد اشمیت S_c بیشتر از تاثیر پارامتر تابش NR روی عدد شروود است. رابطه (49) نشان می دهد که پارامتر پخشندگی جرمی D و لزجت سینماتیکی ν با عدد شروود رابطه معکوس دارند و سرعت U تاثیر مستقیم روی عدد شروود خواهد داشت.

۴- اعتبارسنجی

۴-۱- اعتبارسنجی دمایی

در شکل ۳ تغییرات $\theta(\eta)$ بر حسب η در مقایسه با مرجع [18] ارائه شده است که انطباق دقیقی را با نتایج مرجع [18] نشان می دهد.



شکل ۳- تغییرات $\theta(\eta)$ نسبت به η در تحقیق حاضر با مرجع [18]

۴-۲- اعتبارسنجی غلظتی

حل غلظتی با عدد شروود در حالت جریان بلازیوس اعتبارسنجی شد، بدین ترتیب که ابتدا مطابق مرجع [22] رابطه (55) اثبات می-شود و سپس رابطه عدد شروود حاصل از حل معادله غلظت بدست

جدول ۱- نتایج تشابهی در حالت اول برای عدد اشمیت ۰/۶

η	$f'(\eta)$	$\beta(\eta)$	$-\beta'(\eta)$
۰	۰	۱	۰/۲۷۶۹۶
۰/۵	۰/۱۶۵۸۸	۰/۸۶۱۵۹	۰/۲۷۶۳۸
۱	۰/۳۲۹۷۸	۰/۷۲۴۱۹	۰/۲۷۲۴۰
۲/۵	۰/۷۵۱۲۶	۰/۳۴۸۹۳	۰/۲۱۴۸۱
۳/۵	۰/۹۱۳۰۴	۰/۱۶۹۸۸	۰/۱۴۰۹۹
۴	۰/۹۵۵۵۲	۰/۱۰۸۹۳	۰/۱۰۳۳۶
۴/۵	۰/۹۷۹۵۱	۰/۰۶۵۷۱	۰/۰۷۰۵۴
۵	۰/۹۹۱۵۴	۰/۰۳۷۲۱	۰/۰۴۴۷۳
۵/۵	۰/۹۹۶۸۸	۰/۰۱۹۷۴	۰/۰۲۶۳۴

جدول ۲- نتایج تشابهی در حالت اول برای عدد اشمیت ۵

η	$f'(\eta)$	$\beta(\eta)$	$-\beta'(\eta)$
۰	۰	۱	۰/۵۷۶۶۹
۰/۵	۰/۱۶۵۸۸	۰/۷۱۲۹۰	۰/۵۶۶۸۰
۱	۰/۳۲۹۷۸	۰/۴۴۲۴۸	۰/۵۰۲۲۷
۲/۵	۰/۷۵۱۲۶	۰/۰۲۲۶۹	۰/۰۶۹۳۹
۳/۵	۰/۹۱۳۰۴	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۲۰۸
۴	۰/۹۵۵۵۲	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۱۶
۴/۵	۰/۹۷۹۵۱	۰	۰/۰۰۰۰۱
۵	۰/۹۹۱۵۴	۰	۰
۵/۵	۰/۹۹۶۸۸	۰	۰

۵- نتایج و بحث

با بررسی شکل $a=4$ مشاهده می‌شود که در جریان بلازیوس (سیال متحرک) نسبت به جریان ساکیادیس (سیال ساکن) آهنگ انتقال گرما بیشتر است در نتیجه ضخامت لایه مرزی گرمایی جریان بلازیوس بیشتر از ساکیادیس خواهد شد. با افزایش پارامتر تابش N_R از ۰/۷ در نمودار $a=4$ به عدد ۱۰ در نمودار $b=1$ نتیجه می‌شود که تاثیر تابش در جریان ساکیادیس ضخامت لایه مرزی گرمایی بیشتر از جریان بلازیوس کاهش می‌یابد.

آمده است (رابطه (۴۸) بدون در نظر گرفتن تابش در جریان بلازیوس) با عدد شروود در مرجع [22] مطابقت دارد. عدد شروود را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [22]:

$$Sh = + \left. \frac{\partial C^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (50)$$

با استفاده از عملیات ریاضی می‌توان رابطه (۵۰) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left. \frac{\partial C^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial C^*}{\partial y} \right|_{y=0} \frac{\partial y}{\partial \eta} \rightarrow \left. \frac{\partial C^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = Sh(x Re^{-1/2})$$

$$y = \eta \sqrt{\frac{x v}{U_{\infty}}} \quad \text{که}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$Sh_x = \left. \frac{\partial C^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \left(\frac{Re^{1/2}}{x} \right) \quad (51)$$

در معادلات فوق C^* همان متغیر β می‌باشد:

$$\left. \frac{\partial C^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \approx \left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (52)$$

نتایج محاسبه $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$ در جدول‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود.

معادله (۵۱) مقدار محلی عدد شروود است و عدد شروود کلی در رابطه (۵۳) تعریف می‌شود:

$$Sh = (Re^{1/2}) \left. \frac{\partial C^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (53)$$

در جدول (۳) برای چند عدد اشمیت بالاتر از ۰/۶ مقدار $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$

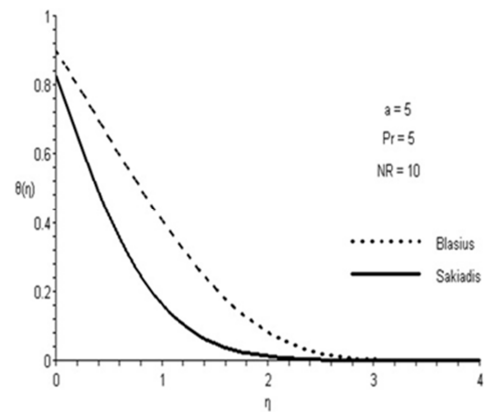
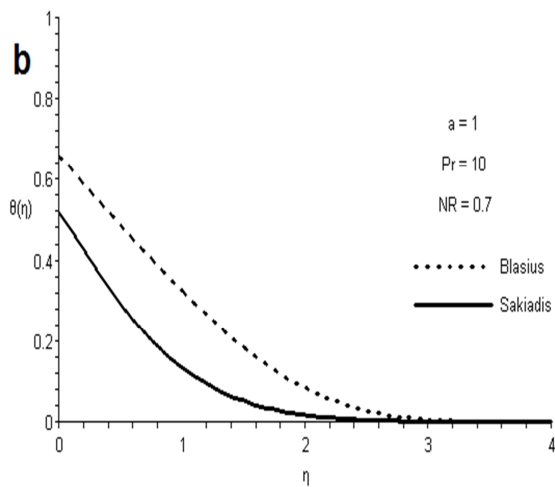
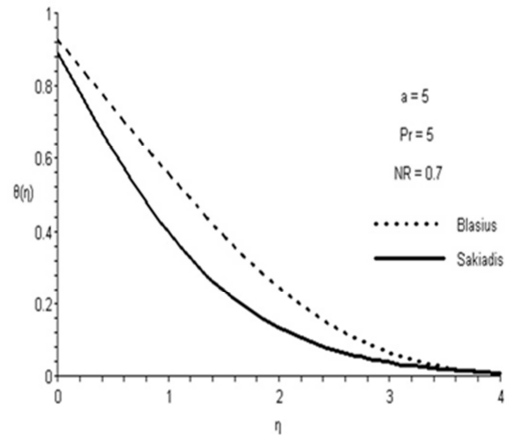
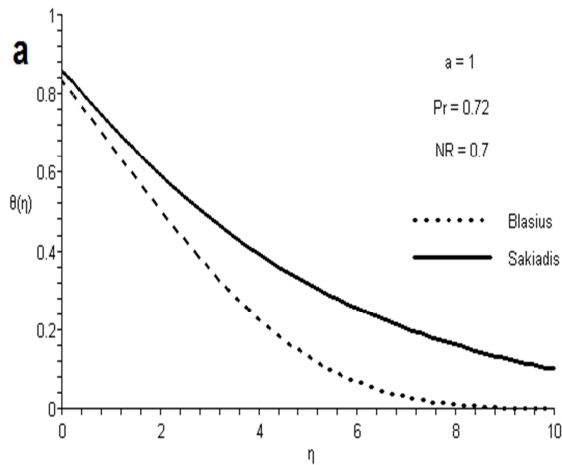
ارائه شده است. با مشاهده این جدول، رابطه زیر بین عدد اشمیت و

$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$ قابل مشاهده است.

$$\left. \frac{\partial C^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 Sc^{1/3} \quad Sc \geq 0.6 \quad (54)$$

بنابراین معادله (۵۳) برای عددهای اشمیت بزرگتر از ۰/۶ به صورت زیر بیان می‌شود [22]:

$$Sh = 0.332 Sc^{1/3} Re^{1/2} \quad Sc \geq 0.6 \quad (55)$$



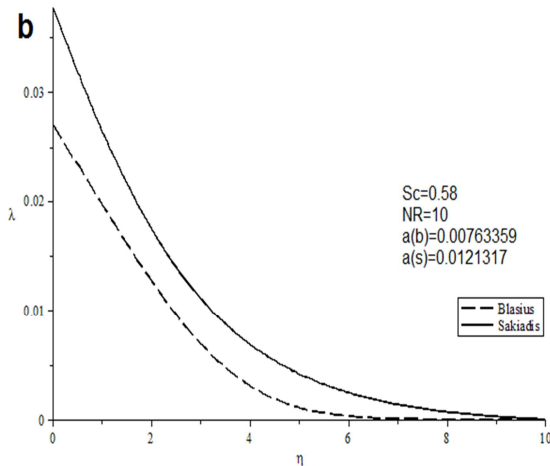
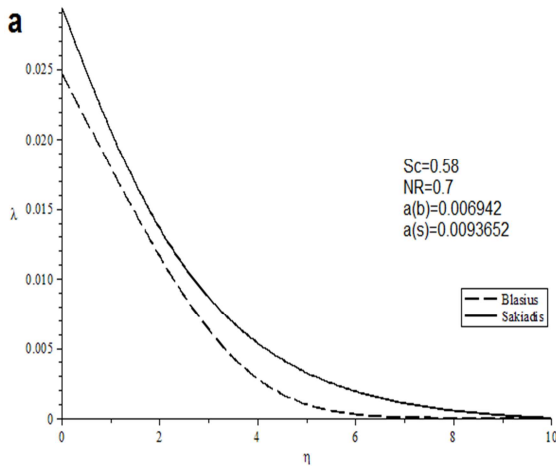
(ب)

شکل ۴- پروفیل دما $NR = 0.7$ و $NR = 10$ در $a = 5$ $Pr = 5$ 10 (ب)

شکل ۵- پروفیل دما $P_r = 0.72$ (a) و $P_r = 10$ در $a = 1$ $NR = 0.7$ 10 (b)

با بررسی شکل a-۶ مشاهده می‌شود که ضخامت لایه مرزی گرمایی بلازیوس بیشتر از ساکیادیس می‌باشد. با افزایش پارامتر a از 0.5 در شکل a-۶ به عدد 20 در نمودار b-۶ ضخامت لایه مرزی در هر دو جریان بلازیوس و ساکیادیس افزایش یافته، با مقایسه دقیق شکل‌های a-۶ و b-۶ نتیجه می‌شود که ضخامت لایه مرزی گرمایی جریان ساکیادیس بیشتر از جریان بلازیوس افزایش یافته است.

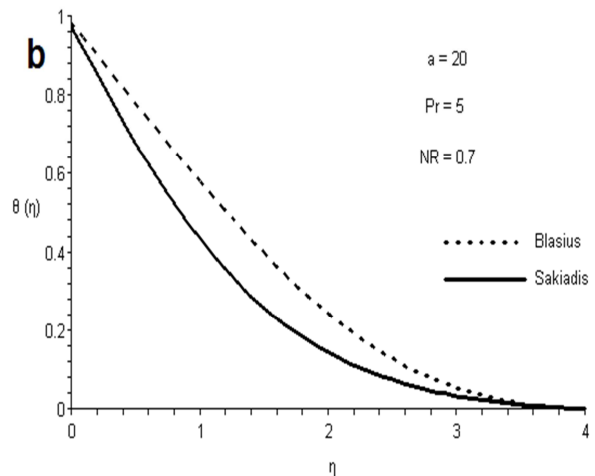
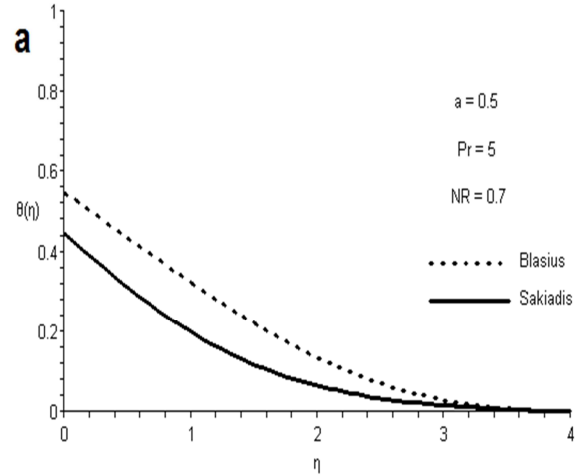
با بررسی شکل a-۵ مشاهده می‌شود که ضخامت لایه مرزی گرمایی ساکیادیس بیشتر از بلازیوس می‌باشد. با افزایش عدد پرانتل Pr از عدد 0.72 در شکل a-۵ به عدد 10 در شکل b-۵ ضخامت لایه مرزی در هر دو جریان بلازیوس و ساکیادیس کاهش یافته، با مقایسه دقیق شکل‌های a-۵ و b-۵ نتیجه می‌شود که ضخامت لایه مرزی گرمایی جریان ساکیادیس بیشتر از جریان بلازیوس کاهش یافته است.



شکل ۷- پروفیل غلظت λ در $NR = 0.7$ (a) و $NR = 10$ (b) در $Sc = 0.58$

با بررسی شکل λ -a مشاهده می‌شود که ابتدا ضخامت لایه مرزی غلظتی بلازیوس بیشتر از ساکیادیس می‌باشد و سپس با افزایش η ضخامت لایه مرزی ساکیادیس بیشتر از بلازیوس می‌شود. با افزایش عدد اشمیت Sc از عدد $0.7/2$ در نمودار λ -a به عدد 10 در شکل λ -b ضخامت لایه مرزی در هر دو جریان بلازیوس و ساکیادیس افزایش یافته، با مقایسه دقیق شکل‌های λ -a و λ -b نتیجه می‌شود که ابتدا ضخامت لایه مرزی غلظتی جریان بلازیوس بیشتر از جریان ساکیادیس کاهش یافته و با افزایش η ضخامت لایه مرزی غلظتی جریان ساکیادیس بیشتر از جریان بلازیوس کاهش یافته است.

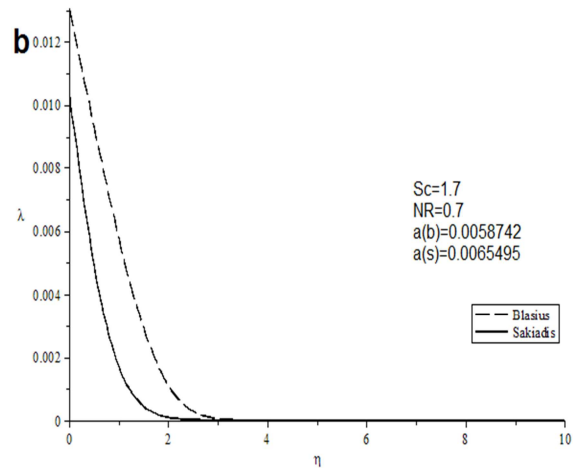
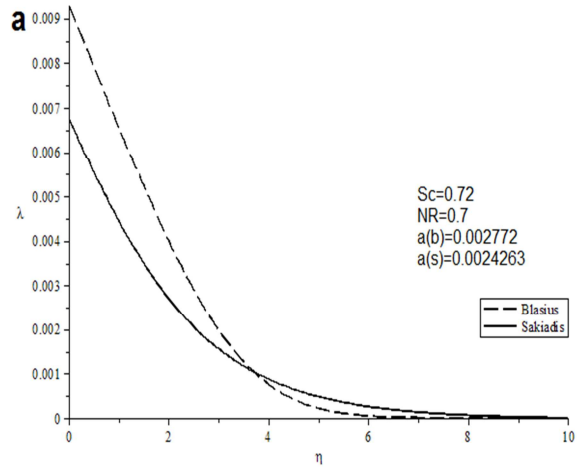
با بررسی شکل λ -a مشاهده می‌شود که ابتدا ضخامت لایه مرزی غلظتی بلازیوس بیشتر از ساکیادیس می‌باشد و سپس با افزایش η ضخامت لایه مرزی ساکیادیس بیشتر از بلازیوس می‌شود. با افزایش عدد اشمیت Sc از عدد $0.7/2$ در شکل λ -a به عدد 10 در شکل λ -b ضخامت لایه مرزی در هر دو جریان بلازیوس و ساکیادیس افزایش یافته، با مقایسه دقیق شکل‌های λ -a و λ -b نتیجه می‌شود که ابتدا ضخامت لایه مرزی غلظتی



شکل ۶- پروفیل دما $\theta(\eta)$ در $a = 0.5$ (a) و $a = 20$ (b) در $Pr = 5$ $NR = 0.7$

با توجه به شکل θ -a در یک تابش NR ثابت دمای سیال در جریان ساکیادیس بیشتر از جریان بلازیوس است، در نتیجه با توجه به رابطه $\rho \propto \frac{1}{T}$ برای گاز کامل، چگالی سیال در جریان ساکیادیس کمتر از جریان بلازیوس خواهد شد و در نهایت ضخامت لایه مرزی ساکیادیس بیشتر از بلازیوس می‌شود. با افزایش پارامتر تابش NR از 0.7 در نمودار θ -a به عدد 10 در شکل θ -b نتیجه می‌شود، ضخامت لایه مرزی غلظتی بیشتر از جریان بلازیوس کاهش می‌یابد.

جریان بلازیوس بیشتر از جریان ساکیادیس کاهش یافته و با افزایش η ضخامت لایه مرزی غلظتی جریان ساکیادیس بیشتر از جریان بلازیوس کاهش یافته است.



شکل ۸- پروفیل غلظت λ و $S_c = 0.72$ (a) و $S_c = 1.7$ (b) در $NR = 0.7$

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک حل تشابهی برای جریان های بلازیوس و ساکیادیس، ارائه و نشان داده شد که ضریب انتقال گرمای جابه جایی سیال گرم در قسمت پایین صفحه متناسب با $X^{-1/2}$ می باشد. یک راه حل جدید برای تعیین $\lambda(\eta)$ به دلیل وجود نداشتن شرایط مرزی غلظتی روی صفحه؛ با استفاده از شرایط مرزی دمایی ارائه گردیده است که با استفاده از آن، نمودار غلظت روی سطح صفحه بر حسب η رسم شد. همچنین برای اولین بار با استفاده از روش حداقل مربعات رابطه تاثیر پارامترهای a , N_R , S_c , R_e , P_r روی اعداد نوسلت و شروود ارائه گردید.

از شکل های حاصل از حل معادلات اندازه حرکت، انرژی و غلظت نتایج زیر حاصل شد:

۱- با افزایش پارامتر تابش N_R و عدد اشمیت S_c ضخامت لایه مرزی غلظت کاهش یافت، که این تاثیر در جریان ساکیادیس بیشتر از جریان بلازیوس است. تاثیر عدد اشمیت ۳۲٪ بیشتر از تاثیر پارامتر تابش در کاهش ضخامت لایه مرزی غلظتی است.

۲- با افزایش پارامتر تابش N_R و عدد اشمیت S_c ، گرادیان غلظتی افزایش یافت که این افزایش در جریان ساکیادیس بیشتر از بلازیوس است.

۳- با افزایش پارامتر انتقال گرما a ضخامت لایه مرزی غلظت و گرادیان غلظتی افزایش می یابد که در جریان ساکیادیس این تاثیر بیشتر از جریان بلازیوس است.

۴- پارامتر تابش N_R کمترین و عدد رینولدز Re بیشترین تاثیر را در تغییرات عدد نوسلت دارند. مشخصه انتقال گرما a کمترین و عدد رینولدز Re بیشترین تاثیر را در تغییرات عدد شروود دارند.

۷- مراجع

- [1] Weyl H., On the differential equations of the simplest boundary-layer problems, Ann. Math. 43 381–407, 1942.
- [2] Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung, Z. Math. Phys. 56, 1–37, 1908.
- [3] Sakiadis B.C., Boundary-layer behaviour on continuous solid surfaces. Boundary-layer equations for 2-dimensional and axisymmetric flow, AIChE J. 7, 26–28, 1961.
- [4] Sakiadis B.C., Boundary-layer behaviour on continuous solid surfaces. The boundary-layer on a continuous flat plate, AIChE J. 7, 221–225, 1961
- [5] Howarth L., On the solution of the laminar boundary layer equations, Proc. Roy. Soc. London A 164, 547–579, 1938.
- [6] Magyari E., The moving plate thermometer, Int. J. Therm. Sci. 47, 1436–1441, 2008.
- [7] Asaithambi A., A finite-difference method for the Falkner–Skan equation, Appl. Math. Comput. 92, 135–141, 1998.
- [8] Wang L., A new algorithm for solving classical Blasius equation, Appl. Math. Comput. 157, 1–9, 2004.
- [9] Fang T., Further study on a moving-wall boundary layer problem with mass transfer, Acta Mech. 163, 183–188, 2003.
- [10] Fang T., Similarity solutions for a moving-flat plate thermal boundary layer, Acta Mech. 163, 161–172, 2003.
- [11] Fang T., Influence of fluid property variation on the boundary layers of a stretching sheet, Acta Mech. 171, 105–118, 2004.
- [12] Fang T., Boundary layer flow over a shrinking sheet with power-law velocity, Int. J. Heat Mass Transfer, 10, 10–16, 2008.
- [13] Fang T., Lee Ch.-F.F., A moving-wall boundary layer flow of a slightly rarefied gas free stream over a moving flat plate, Appl. Math. Lett. 18, 487–495, 2005.
- [14] Cortell R., Flow and heat transfer of a fluid through a porous medium over a stretching surface with internal heat generation. absorption and suction. blowing, Fluid Dyn. Res. 37, 231–245, 2005.
- [15] Cortell R., Viscous flow and heat transfer over a nonlinearly stretching sheet, Appl. Math. Comput. 184, 864–873, 2007.
- [16] Cortell R., Similarity solutions for flow and heat transfer of a quiescent fluid over a nonlinearly stretching surface, J. Mat. Process. Technol. 203, 176–183, 2008.
- [17] Hossain M.A., Takhar H.S., Radiation effects on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature, Heat Mass Transfer 31, 243–248, 1996.

- [18] Bataller R.C., Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition, 206, 832–840, 2008.
- [19] Raptis A., Perdikis C., Takhar H.S., Effect of thermal radiation on MHD flow, Appl. Math. Comput. 15, 3645–649, 2004.
- [20] Cortell R., Effects of viscous dissipation and radiation on the thermal boundary layer over a nonlinearly stretching sheet, Phys. Lett. A 372, 631–636, 2008.
- [21] Cortell R., Similarity solutions for boundary layer flow and heat transfer of a FENE-P fluid with thermal radiation, Phys. Lett. A 372, 2431–2439, 2008.
- [22] Incropera FP et al, Fundamentals of heat and mass transfer, 7th ed, John Wiley, New York, 2007.