

# تحلیل رشد ترک اتصال چسبی با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی

امیر کریمان مقدم

سعید رهنما\*

ستار مالکی

کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مهندسی فناوری‌های نوین قوچان، قوچان، ایران

## چکیده

در این مقاله، شکست و خرابی در مود دو اتصال چسبی کامپوزیتی با نمونه خمشی انتها ترکدار مورد بررسی قرار گرفته است. برای ایجاد اتصال چسبی بین دو صفحه کامپوزیتی از جنس الیاف شیشه تک جهته از چسب آرالدایت ۲۰۱۱ که به طور گسترده در ساخت پره توربین بادی و همچنین صنایع هوافضا کاربرد دارد استفاده شده است. ابتدا مکانیزم‌های خرابی ایجاد شده در اتصال چسبی مود دو شکست از نتایج تجربی مورد بررسی قرار گرفته و سپس با توجه به نتایج تجربی میزان آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی مود دو شکست برای چسب آرالدایت ۲۰۱۱ برابر با  $۷۷۶/۲۲ \text{ J/m}^2$  محاسبه شده است. بعد از محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی در مود دو از نتایج تجربی برای شبیه‌سازی رشد ترک در اتصال چسبی از روش اجزای محدود توسعه یافته در نرم‌افزار ABAQUS استفاده شده است. مقدار چقرمگی شکست مود دو برای چسب آرالدایت ۲۰۱۱ از نتایج حل عددی برابر با  $۴۰/۵۳ \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  محاسبه شده است. **واژه‌های کلیدی:** خرابی، اتصال چسبی، نمونه خمشی انتها ترکدار، روش اجزای محدود توسعه یافته، چقرمگی شکست.

## Analysis of Crack growth Adhesive Joint by Extended Finite Element Method and Comparison with Experimental results

A. Kariman Moghadam

S. Rahnama

S. Maleki

Faculty of Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

Faculty of Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

Faculty of Engineering, Quchan University of Advanced Technologies Engineering, Quchan, Iran

## Abstract

In this article, failure and damage in second mode of adhesive composite joint was investigated according to the bending in end-notch flexure specimen. To create an adhesive joint between two composite plates made of unidirectional glass fiber, Araldite 2011 resin was used which is widely capable in manufacturing turbine blades and aerospace industries. At the first, failure of second mode fracture of adhesive joint mechanisms has experimentally investigated. Then with considering this result with strain energy release rate on mode II of fracture in specimen for Araldite 2011,  $776.22 \text{ J/m}^2$  was calculated. In the following calculating critical strain energy release rate on mode II by using experimental results, XFEM method used for modeling crack growing in adhesive joint by using Abaqus software. At the end the amount of mode II fracture toughness for Araldite 2011 is calculated from numerical method which is  $40.53 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

**Keywords :** Failure, Adhesive Joint, End-Notch Flexure Specimen, Extended Finite Element Method, Fracture.

## ۱- مقدمه

امروزه مواد کامپوزیتی با توجه به خصوصیات مکانیکی مطلوب از جمله وزن کم، استحکام و سختی در صنایع خودروسازی، هوافضا و ساخت توربین بادی بطور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱]. با توجه به کاربردهای مختلف مواد کامپوزیتی در مواردی نیاز به ایجاد اتصال بین صفحات کامپوزیتی می‌باشد. در سال‌های اخیر استفاده از اتصال چسبی بدلیل وزن کم و عدم ایجاد نقاط تمرکز تنش در قطعات اتصال مورد توجه بوده است [۲]. از طرفی با توجه به شرایط مختلف استفاده از یک اتصال چسبی انواع شکست و خرابی در این اتصال نیز ایجاد می‌شود. چنانچه در یک اتصال چسبی گسیختگی در بین لایه چسب و یک سطح اتصال ایجاد شود، شکست در سطوح اتصال<sup>۱</sup>، اگر گسیختگی در لایه وسط چسب طوری که دو سطح هنوز دارای

چسب باشند اتفاق بیافتد، شکست چسب<sup>۲</sup> و اگر اتصال چسبی آنقدر قوی باشد که گسیختگی در یکی از سطوح بهم چسبیده رخ دهد، شکست در مواد متصل شده<sup>۳</sup> نامیده می‌شود [۳]. بطور کلی در یک اتصال چسبی شکست در سه حالت مود بازشدگی یا مود I، مود برشی یا مود II، مود پارگی یا مود III و یا بصورت ترکیبی از حالت‌های فوق اتفاق می‌افتد [۴].

در چند دهه گذشته مهمترین روش عددی مورد استفاده در تحلیل مسائل مختلف، از جمله مسائل مرتبط با مکانیک شکست روش اجزای محدود بوده است. این روش دارای مزیت‌های بسیاری است که باعث ساده شدن حل بسیاری از مسائل می‌شود، اما در کنار این مزیت‌ها، معایبی نیز دارد که حل برخی مسائل مانند مسائل مربوط به

<sup>2</sup> Cohesive Failure

<sup>3</sup> Adherent Failure

<sup>1</sup> Adhesive Failure

حوزه مکانیک شکست را مشکل می‌سازد. به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته تحلیل ناپیوستگی‌ها از جمله ترک‌ها بسیار ساده‌تر شده است. روش اجزای محدود برای برخی از تحلیل‌ها در زمینه مکانیک شکست، نظیر محاسبه ضریب شدت تنش<sup>۱</sup> و یا نسبت انرژی آزاد شده مناسب است، اما در زمینه گسترش ترک نیاز به شبکه‌بندی در هر مرحله دارد و مسیر رشد ترک نیز باید معلوم باشد، در حالی که در بسیاری از مسائل واقعی مسیر رشد ترک معلوم نیست [۵]. بخاطر این مشکلات روش اجزای محدود توسعه یافته در این تحقیق پیشنهاد شده است.

مورا و همکارانش برای بررسی رشد ترک در اتصال چسبی کامپوزیتی مود دوم شکست از نمونه خمشی انتها ترکدار استفاده نمودند [۶]. آنها از روش نرمی بر پایه تئوری تیر برای محاسبه آهنگ رهایی رهایی انرژی کرنشی بحرانی در نمونه خمشی انتها ترکدار<sup>۲</sup> (ENF) استفاده کردند.

فرناندز و همکارانش برای محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی مود دوم شکست در نمونه ENF از روش مستقیم استفاده نمودند [۷]. همچنین در تحقیق آنها برای حل المان محدود از روش المان چسبنده و قوانین چسبندگی دوزنقه‌ای استفاده شده است.

سیلوا و همکارانش از روش مستقیم برای محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی اتصال چسبی کامپوزیتی در نمونه ENF استفاده کردند [۸]. برای مدل‌سازی المان محدود از روش وارون که شامل یک الگوریتم ژنتیک برای به حداقل رساندن خطای بین حل عددی و تجربی در نمودار نیرو-جابجایی می‌باشد، استفاده شده است.

در یک تحقیق دیگر فرناندز و همکارانش آهنگ رهایی انرژی کرنشی در حالت مود دو شکست را در اتصال چسبی دو صفحه آلومینیومی با استفاده از نمونه ENF محاسبه نمودند [۹]. آهنگ رهایی انرژی کرنشی با توجه به داده‌های تجربی و با استفاده از روش‌های انتگرال J و کالبره کردن نرمی (CCM)، تئوری تیر مستقیم (BBT)، تئوری تیر اصلاح شده (CBT)، و روش نرمی مبتنی بر تئوری تیر (CBBM) محاسبه گردید. در ادامه تحقیق آن‌ها، مدل‌سازی المان محدود در نرم‌افزار ABAQUS با استفاده از روش المان چسبنده انجام شده است.

گروگان و همکارانش از روش اجزای محدود توسعه یافته برای شبیه‌سازی رشد جدایش بین لایه‌ای، خستگی حرارتی و پیش‌بینی جابه‌جایی دهانه ترک ورق‌های کامپوزیتی استفاده نمودند [۱۰]. آن‌ها برای بررسی جدایش بین لایه‌ای از نمونه ENF استفاده کردند.

افشار و همکارانش روش اجزای محدود توسعه یافته برای تحلیل شکست الیاف در کامپوزیت‌های تک جهته را پیشنهاد دادند [۱۱]. آن‌ها به روش انتگرال J، آهنگ رهایی انرژی کرنشی را محاسبه نمودند. سپس با استفاده از نمونه خمشی سه نقطه‌ای با بارگذاری خارج از مرکزنتی<sup>۳</sup> در مود ترکیبی شکست یک صفحه تک لایه اورتوتروپیک با زاویه الیاف 15، 30، 45، 60 و 90 درجه را با استفاده از کد جدید داده شده به نرم‌افزار آباکوس تحلیل نمودند.

کومار و همکارانش روش اجزای محدود توسعه یافته با گره مجازی<sup>۴</sup> (VNXFEM) را برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی ترک‌های ناگهانی در یک جزء منفرد پیشنهاد دادند [۱۲]. مدل‌سازی‌های آن‌ها بر روی هشت مسئله گسترش ترک انجام گرفت.

نسری و همکارانش رشد ترک در یک صفحه با ترک دوتایی را با استفاده از دو روش اجزای محدود توسعه یافته و روش اجزای محدود استاندارد مورد بررسی قرار دادند [۱۳]. در این تحقیق پارامترهای مختلف موثر در رشد ترک با استفاده از دو روش XFEM و FEM مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. نتایج آنها نشان دهنده دقت بالاتر روش XFEM نسبت به روش FEM در تعیین مسیر رشد ترک می‌باشد.

جاسکویک از روش اجزای محدود توسعه یافته برای بررسی رشد جدایش بین لایه‌ای در یک چند لایه با الیاف شیشه استفاده نموده است [۱۴]. برای بررسی رشد جدایش بین لایه‌ای از نمونه استاندارد مود ترکیبی (I+II) استفاده شده است.

گولوسکی و همکارانش از روش اجزای محدود توسعه یافته برای مدل‌سازی عددی رشد ترک در بتن‌های حاوی سیلیس استفاده نمودند [۱۵]. در این تحقیق رشد ترک در مود دو شکست با استفاده از نمونه خمشی سه نقطه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

احمدی نجف آبادی و همکارانش شروع خرابی در اتصال چسبی آلومینیوم/کامپوزیت را برای نمونه تیر یکسر گیردار دولبه با استفاده از روش آکوستیک امیشن مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. سپس از روش مدل ناحیه چسبنده برای مدل‌سازی شروع رشد جدایش بین لایه‌ای استفاده نمودند.

همان‌طور که مشخص است در تحقیقات انجام گرفته در زمینه شکست در اتصال چسبی در مود دوم شکست برای مقایسه نتایج آزمایشگاهی استفاده از روش المان چسبنده به عنوان یک روش کارآمد مورد توجه بوده است، اما کمتر از روش المان محدود توسعه یافته که به پارامترهای کمتری برای مدل‌سازی رشد ترک در اتصال چسبی نیاز دارد، استفاده شده است. از طرفی مکانیزم‌های مختلف خرابی ایجاد شده در اتصال چسبی کامپوزیت به کامپوزیت برای نمونه ENF مورد بررسی قرار نگرفته است از این رو در این تحقیق ابتدا مکانیزم‌های مختلف خرابی ایجاد شده در یک اتصال چسبی کامپوزیتی و همچنین تاثیر طول ترک اولیه در ایجاد انواع خرابی تحت شرایط مود دوم شکست مورد بررسی قرار گرفته است، سپس با توجه به نتایج آزمایشگاهی میزان آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی مود دوم شکست برای چسب آرالدایت<sup>۵</sup> ۲۰۱۱ با استفاده از دو روش تئوری تیر اصلاح شده<sup>۶</sup> (CBT) و روش کالبره کردن نرمی<sup>۷</sup> (CCM) محاسبه شده است. سپس از روش اجزای محدود توسعه یافته برای مدل‌سازی رشد ترک و بررسی سایر پارامترهای مکانیک شکست و همچنین محاسبه چقرمگی شکست<sup>۸</sup> در مود دوم در اتصال چسبی کامپوزیتی استفاده شده است.

<sup>۴</sup> Virtual Node Extended Finite Element Method

<sup>۵</sup> Araldite

<sup>۶</sup> Corrected Beam Theory

<sup>۷</sup> Compliance Calibration Method

<sup>۸</sup> Fracture Toughness

<sup>۱</sup> Stress Intensity Factor

<sup>۲</sup> End-Notch Flexure

<sup>۳</sup> Eccentric Three-point Bending

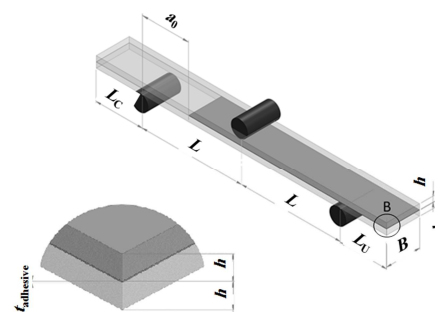
## ۲- روش تحقیق

### ۲-۱- مواد و آماده سازی نمونه ها

برای تولید صفحات کامپوزیتی از الیاف شیشه تک جهته<sup>۱</sup> با نسبت وزنی  $255 \text{ gr/cm}^2$  استفاده شده است. صفحات کامپوزیتی از ۸ لایه با زاویه صفر درجه به صورت دستی ساخته شده اند. برای لایه چینی از رزین اپوکسی ایپون همراه با سخت کننده تتا استفاده شده است. بعد از لایه چینی صفحه کامپوزیتی به مدت ۲۴ ساعت تحت فشار در دمای اتاق قرار داشته و برای سخت شدن نهایی یک ساعت در کوره با دمای ۱۰۰ درجه سلسیوس قرار داده شده است. بعد از تولید صفحه کامپوزیتی ابتدا آن را به دو قسمت مساوی برش داده، سپس هر صفحه را به میزان  $0.1$  میلی متر به چسب آرالدایت ۲۰۱۱ آغشته کرده و بعد از قرار دادن در قید و بند ساخته شده به مدت ۲۴ ساعت در دمای اتاق و برای سخت شدن نهایی به مدت ۲ ساعت در کوره با دمای ۱۲۰ درجه سلسیوس گذاشته شده است. برای ایجاد ترک اولیه از ورق مایلر نجسب با ضخامت ۲۰ میکرومتر استفاده شده است.

برای برشکاری نمونه ها از دستگاه برش سی ان سی استفاده شده است. تعداد ۱۵ عدد نمونه با طول ترک اولیه ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ میلی متر برشکاری شده است، که برای هر طول ترک اولیه بر اساس استاندارد ASTM D7905-7905m ۳ عدد نمونه ساخته شده است.

شکل ۱ نمونه ENF ساخته شده را نشان می دهد. در این نمونه فاصله بین مرکز دو تکیه گاه کناری و تکیه گاه وسط  $L = 80 \text{ mm}$ ، فاصله بین دو لبه کناری نمونه تا مرکز تکیه گاه های کناری  $L_C = L_U = 40 \text{ mm}$ ، عرض نمونه  $B = 24 \text{ mm}$ ، ضخامت هر کدام از صفحات کامپوزیتی  $h = 4 \text{ mm}$  و ضخامت لایه چسب  $t_{\text{adhesive}} = 0.2 \text{ mm}$  می باشد.



شکل ۱- ابعاد نمونه ENF

خواص مکانیکی الیاف شیشه تک جهته بکار رفته برای لایه چینی صفحات کامپوزیتی مطابق جدول ۱ و خواص مکانیکی چسب آرالدایت ۲۰۱۱ که برای ایجاد اتصال چسبی استفاده شده، مطابق جدول ۲ می باشد.

### جدول ۱- خواص مکانیکی الیاف تک جهته شیشه اپوکسی

|       |            |
|-------|------------|
| ۳۰    | $E_{11}$   |
| ۳     | $E_{22}$   |
| ۲     | $E_{33}$   |
| $0.3$ | $\nu_{12}$ |
| $0.3$ | $\nu_{13}$ |
| $0.3$ | $\nu_{23}$ |
| ۴     | $G_{12}$   |
| ۴     | $G_{13}$   |
| ۴     | $G_{23}$   |

### جدول ۲- خواص مکانیکی الیاف تک جهته شیشه اپوکسی [۱۷]

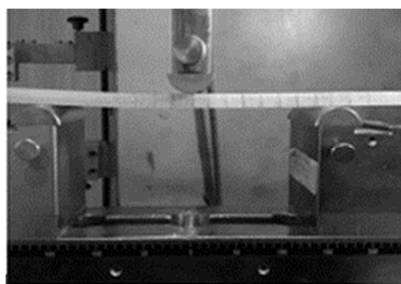
|          |            |
|----------|------------|
| $1.8532$ | $E$        |
| $0.37$   | $\nu$      |
| $36.3$   | $\sigma_Y$ |

### ۲-۲- روش آزمایش

آزمایش بر اساس استاندارد ASTM D7905-7905m انجام شده است [۱۸]. بار اعمالی به نمونه ها به صورت جابه جایی کنترل به تکیه گاه وسطی وارد می شود. مطابق با استاندارد ASTM D7905-7905m آزمایش ها در دمای ۲۴ درجه سلسیوس و با آهنگ جابه جایی ثابت  $1.6 \text{ mm/min}$  انجام شده است. میزان جابه جایی و بار اعمالی به طور پیوسته توسط دستگاه تست کشش ثبت می شود. براساس روش ارائه شده توسط خوشروان و همکارانش نمونه ها با پنج طول ترک متفاوت ساخته شدند [۱۹]. در این روش نمونه ها با ۵ طول ترک مختلف ساخته شده و برای محاسبه نمودار نرمی، نیروی بحرانی و جابه جایی متناظر با آن برای هر طول ترک از روی نمودار نیرو - جابه جایی بدست آمده از نتایج آزمایشگاهی استخراج می شود.

### ۲-۳- دستگاه آزمایش

برای بارگذاری نمونه ها از دستگاه آزمایش کشش مدل زوئیک-۲۵۰ ساخت کشور آلمان موجود در آزمایشگاه خواص مکانیکی دانشگاه فردوسی مشهد با ظرفیت ۵ تن، با قابلیت تنظیم سرعت بارگذاری  $0.1-500 \text{ mm/min}$  استفاده شده است. نمونه ها با سرعت  $1.6 \text{ mm/min}$  تحت بارگذاری به صورت جابه جایی کنترل قرار گرفته اند. برای ثبت بار اعمالی به نمونه ها از نیروسنج ۵۰ کیلو نیوتنی استفاده شده است. شکل ۲ نمونه ENF تحت بارگذاری مود دوم به وسیله دستگاه آزمایش را نشان می دهد.



شکل ۲- نمونه ENF تحت آزمایش خمش سه نقطه ای

<sup>1</sup> Unidirectional Glass Fiber

## ۲-۴-۲- روش‌های محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی مود II

در این تحقیق برای محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی مود دوم شکست از دو روش تئوری تیر اصلاح شده و روش کالیبره کردن نرمی استفاده شده است.

### ۲-۴-۲-۱- تئوری تیر اصلاح شده

در روش تئوری تیر اصلاح شده برای محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی از رابطه زیر استفاده می‌شود [۶]:

$$G_{IIC} = \frac{9(a + 0.42\Delta_I)^2 P_C^2}{16B^2 h^3 E_1} \quad (1)$$

که  $a$  طول ترک از محل تکیه‌گاه،  $P$  بار اعمالی،  $\Delta_I$  طول اصلاح شده ترک در تغییر شکل برشی،  $B$  عرض نمونه،  $h$  نصف ضخامت نمونه و  $E_1$  مدول یانگ در جهت یک می‌باشد.

مقدار  $\Delta_I$  عبارت است از:

$$\Delta_I = h \sqrt{\frac{E_1}{11G_{13}} \left[ 3 - 2 \left( \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} \right)^2 \right]} \quad (2)$$

که در این رابطه  $\Gamma$  بصورت زیر می‌باشد:

$$\Gamma = 1.18 \sqrt{\frac{E_1 E_3}{G_{13}}} \quad (3)$$

### ۲-۴-۲-۲- روش کالیبره کردن نرمی

در این روش آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی بر اساس استاندارد ASTM-D7905/7905M از رابطه زیر بدست می‌آید [۱۸]:

$$G_{IIC} = \frac{P_C^2}{2B} \frac{dc}{da} \quad (4)$$

که مقدار نرمی  $C = \frac{\delta}{p}$  می‌باشد. معادله نرمی بر حسب طول ترک به صورت یک معادله درجه سه به شکل  $C = A + ma^3$  می‌باشد که با مشتق‌گیری از این معادله و قرار دادن در معادله (۴) بر حسب  $a$  مقدار آهنگ رهایی انرژی کرنشی در مود دو بصورت زیر بدست می‌آید:

$$G_{IIC} = \frac{3mP_C^2 a^2}{2B} \quad (5)$$

## ۳- معیارهای تشخیص شروع رشد ترک

در استانداردها و منابع مربوطه روش‌هایی نیز برای تشخیص شروع رشد ترک ذکر شده است که در اینجا به سه مورد آنها اشاره می‌شود [۲۰]:

۱- انحراف از حالت خطی (NL): در این روش نیروی بحرانی مطابق با زمانی است که نمودار نیرو - جابه‌جایی از حالت خطی خارج شود.

۲- مشاهده چشمی (VIS): در این حالت با استفاده از دوربین مجهز به لنز مخصوص (چشم مسلح) شروع رشد ترک در حین بارگذاری رصد می‌شود.

۳- انحراف ۵٪ بار بحرانی حداکثر: در این روش نیروی بحرانی مطابق با افزایش ۵ درصدی نرمی نمونه است.

در این مقاله از معیار انحراف از حالت خطی که حد پایین چقرمگی شکست را ارائه می‌دهد برای تشخیص بار بحرانی شروع رشد ترک استفاده شده است.

### ۴- مدل اجزای محدود

برای مدل‌سازی رشد ترک در محل اتصال دو صفحه کامپوزیتی از روش اجزای محدود توسعه یافته استفاده شده است. در این روش با غنی‌سازی گره‌ها نیازی به مش‌بندی مجدد در هر مرحله از رشد ترک نمی‌باشد. روش اجزای محدود توسعه یافته برای مسائل مربوط به رشد ترک در حوزه مکانیک شکست الاستیک خطی کاربرد دارد [۲۱]. در این کاربرد، ترک می‌تواند مستقل از مش‌بندی المان محدود مدل شده و فرایند پیچیده دوباره مش‌زدن طی گسترش ترک حذف شود. به‌علاوه پارامترهای مکانیک شکست بدون مش‌بندی ریز به دقت محاسبه می‌شود.

با توجه به اینکه شکل هندسی و ماده‌ای که رشد ترک در آن اتفاق می‌افتد مطابق با تئوری شکست الاستیک خطی می‌باشد در این مسئله از روش اجزای محدود توسعه یافته استفاده شده است.

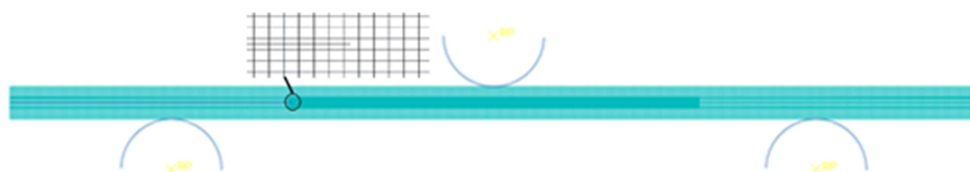
مدل‌سازی در نرم‌افزار ABAQUS انجام شده است و با توجه به بزرگی قابل توجه عرض نمونه نسبت به ضخامت چسب که ترک در آن رشد می‌کند از مدل دو بعدی برای کاهش زمان محاسبات استفاده شده است. در مدل‌سازی دو بعدی برای شبیه‌سازی ترک اولیه از مدل میله‌ای استفاده می‌شود. در نرم‌افزار ABAQUS خواص مکانیکی چسب مطابق با جدول ۲ می‌باشد که به عنوان ماده ایزوتروپیک در نظر گرفته شده است و خواص مکانیکی صفحات کامپوزیتی مطابق با جدول ۱ می‌باشد. با توجه به دو بعدی بودن حل از المان‌های کرنش صفحه‌ای چهار گره‌ای (CPE4R) برای شبکه‌بندی اجزای محدود استفاده شده است. تعداد المانهای بکار رفته برای انجام مدل‌سازی ۵۸۹۷۸ عدد می‌باشد. شکل ۳ نوع شبکه‌بندی نمونه ENF را نشان می‌دهد.

برای مدل‌سازی رشد ترک مطابق معادله ۶ از معیار توانی استفاده شده است [۲۲]. در این معیار مقدار میانگین آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی مود II محاسبه شده از نتایج تجربی به عنوان ورودی نرم‌افزار در نظر گرفته شده است.

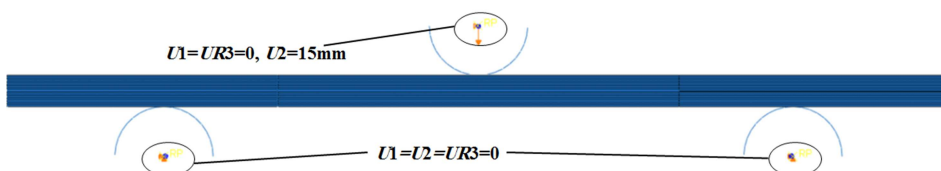
$$\frac{G_{equiv}}{G_{equivC}} = \left( \frac{G_I}{G_{IC}} \right)^{a_m} + \left( \frac{G_{III}}{G_{IIC}} \right)^{a_n} + \left( \frac{G_{IIIC}}{G_{IIIC}} \right)^{a_0} \quad (6)$$

توان‌های این معادله در این تحلیل برابر با  $a_m = a_n = a_0 = 1$  در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی بکار رفته برای این مدل‌سازی مطابق با شکل ۴ می‌باشد. با توجه به شکل تکیه‌گاه‌های پایینی در تمام جهات ثابت شده و بار اعمالی به صورت جابه‌جایی رو به پایین توسط تکیه‌گاه بالایی اعمال می‌شود، در حالی که تکیه‌گاه بالایی در سایر جهات ثابت می‌باشد.



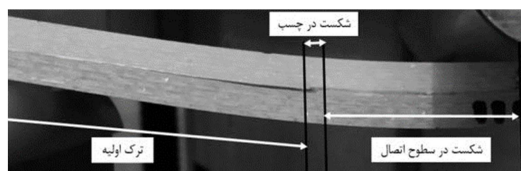
شکل ۳- شبکه بندی اجزای محدود



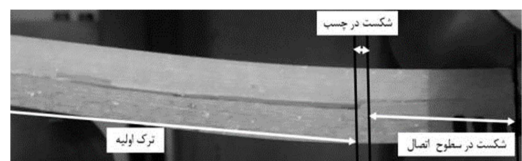
شکل ۴- شرایط مرزی نمونه ENF

## ۵- نتایج

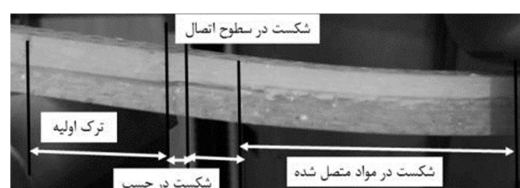
در این قسمت ابتدا نتایج آزمایشگاهی و سپس نتایج مدل سازی ارائه می گردد. ابتدا مکانیزم های مختلف خرابی ایجاد شده در اتصال چسبی دو صفحه کامپوزیتی در نمونه ENF مورد بررسی قرار می گیرد. شکل های ۵ تا ۹ مسیر رشد ترک در نمونه ENF با طول ترک های اولیه مختلف بدست آمده از آزمایش را نشان می دهد.



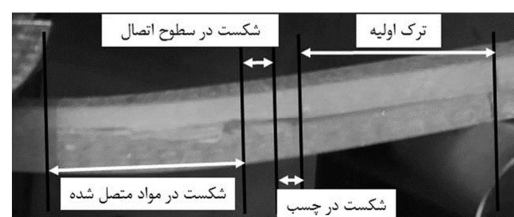
شکل ۸- مسیر رشد ترک با طول ترک اولیه ۵۰ میلی متر



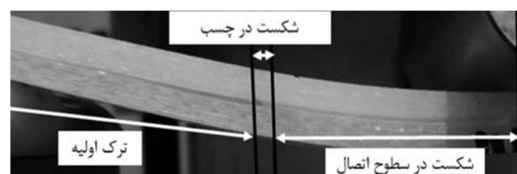
شکل ۹- مسیر رشد ترک با طول ترک اولیه ۶۰ میلی متر



شکل ۵- مسیر رشد ترک با طول ترک اولیه ۲۰ میلی متر



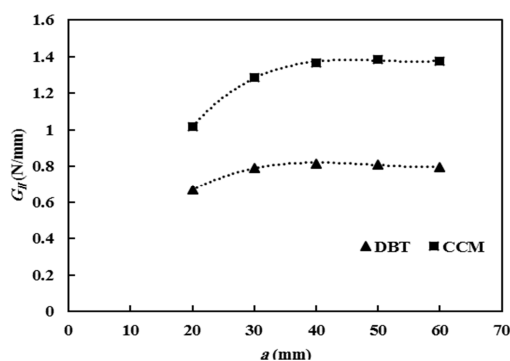
شکل ۶- مسیر رشد ترک با طول ترک اولیه ۳۰ میلی متر



شکل ۷- مسیر رشد ترک با طول ترک اولیه ۴۰ میلی متر

همان طور که در شکل های ۵ تا ۹ مشخص است، در نمونه ها با طول ترک اولیه ۲۰ و ۳۰ میلی متر هر سه نوع مکانیزم شکست اتفاق افتاده است. به این صورت که ابتدا ترک کمی در چسب رشد می کند (شکست در چسب) و سپس به سمت سطح تماس بین چسب و نیمه بالایی نمونه منتقل می شود (شکست در سطوح اتصال) و بعد از آن به نیمه بالایی چسب منتقل می شود و به عبارتی گسیختگی در مواد کامپوزیتی اتفاق می افتد. در نمونه ها با طول ترک اولیه ۵۰، ۴۰ و ۶۰ میلی متر ترک ابتدا در چسب رشد کرده و سپس به سطح تماس بین چسب و نیمه بالایی منتقل می شود. در نمونه ها با طول ترک اولیه بیشتر بدلیل اینکه صفحات کامپوزیتی دچار خرابی نمی شوند، مسیر رشد ترک فقط در چسب و سطح تماس چسب می باشد.

شکل ۱۰ نمودار نیرو - جابه جایی برای نمونه های ENF با ۵ طول ترک اولیه مختلف، بدست آمده از نتایج آزمایشگاهی را نشان می دهد. براساس استاندارد ASTM D7905-7905m از ۳ نمودار نیرو - جابه جایی بدست آمده برای هر طول ترک اولیه میانگین گرفته شده و در شکل ۱۰ نشان داده شده است. این نمودارها تا اولین افت در بار اعمالی ارائه شده است. اولین افت در نمودار بار - جابه جایی از حالت خطی به حالت غیر خطی به عنوان بار بحرانی شروع رشد ترک در نظر گرفته شده است. همان طور که در این نمودار مشخص است با افزایش طول ترک اولیه بار بحرانی شروع رشد ترک و جابه جایی متناظر آن



شکل ۱۲- نمودار نرمی - توان سوم طول ترک برای نمونه‌های ENF

جدول ۳ مقدار آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی بدست آمده از دو روش کالیبره کردن نرمی و تئوری تیر اصلاح شده برای چسب آرالدایت ۲۰۱۱ در مود دوم شکست را نشان می‌دهد.

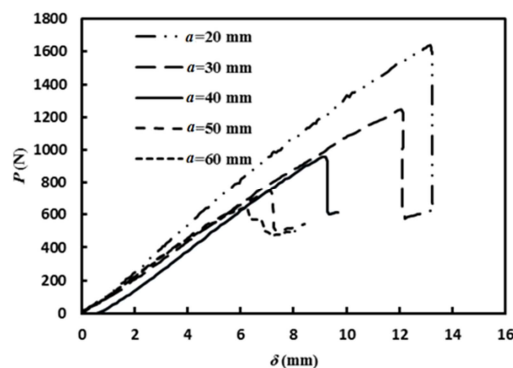
جدول ۳- مقادیر آهنگ رهایی انرژی کرنشی مود دوم شکست

| آهنگ رهایی انرژی کرنشی مود دوم ( $J/m^2$ ) |                       | طول ترک اولیه (mm) |
|--------------------------------------------|-----------------------|--------------------|
| روش تئوری تیر اصلاح شده                    | روش کالیبره کردن نرمی |                    |
| ۶۶۶,۷۷                                     | ۱۰۱۸,۴۶               | ۲۰                 |
| ۷۹۱,۱۶                                     | ۱۲۸۴,۸۳               | ۳۰                 |
| ۸۱۶,۶۰                                     | ۱۳۶۷,۱۷               | ۴۰                 |
| ۸۰۹,۸۸                                     | ۱۳۸۱,۶۱               | ۵۰                 |
| ۷۹۶,۶۹                                     | ۱۳۷۶,۵۷               | ۶۰                 |
| ۷۷۶,۲۲                                     | ۱۲۵۸,۷۲               | میانگین            |

برای انجام مدل‌سازی مقدار میانگین آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی محاسبه شده به روش تئوری تیر اصلاح شده به عنوان ورودی نرم‌افزار در نظر گرفته شده است. سایر خواص مواد مطابق جداول ۱ و ۲ می‌باشد.

شکل ۱۳ تغییر شکل و مسیر رشد ترک نمونه ENF در نرم‌افزار آباکوس با طول ترک اولیه ۶۰ میلی‌متر را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۱۳ مسیر رشد ترک بدست آمده از نتایج مدل‌سازی برای نمونه با طول ترک اولیه ۶۰ میلی‌متر منطبق بر مسیر رشد ترک بدست آمده از نتایج آزمایشگاهی برای نمونه با طول ترک اولیه ۶۰ میلی‌متر در حالت گسیختگی چسبی که در شکل ۹ نشان داده شده است، می‌باشد.

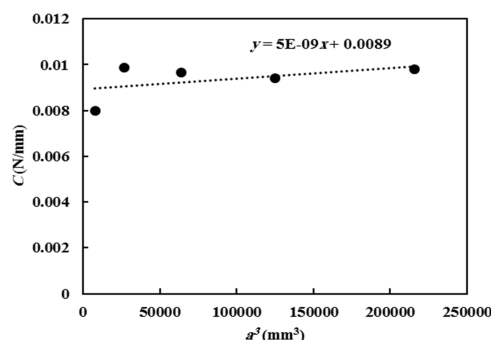
کاهش می‌یابد. این موضوع به معنای کاهش سختی خمشی نمونه‌ها با طول ترک اولیه بیشتر می‌باشد.



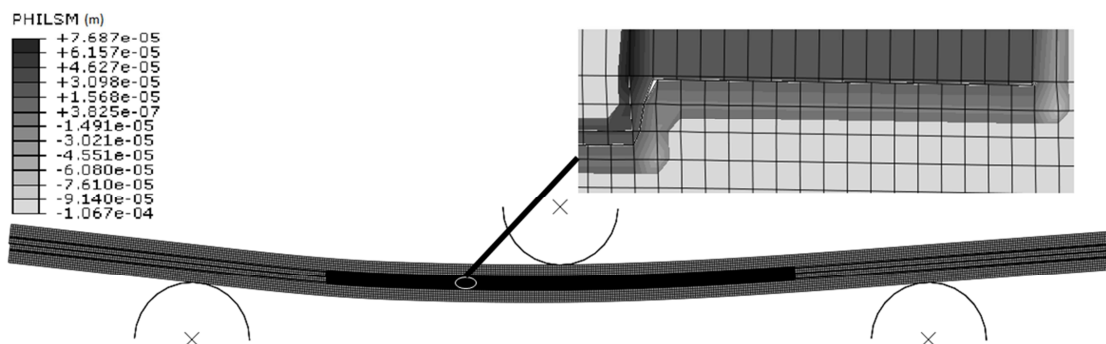
شکل ۱۰- نمودار نیرو - جابه‌جایی حاصل از نتایج آزمایشگاهی نمونه‌های ENF

برای محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی با استفاده از روش کالیبره کردن نرمی بعد از استخراج بار بحرانی و جابه‌جایی متناظر آن از روی نمودار نیرو - جابه‌جایی ابتدا نرمی نمونه را محاسبه نموده سپس، نمودار نرمی برحسب توان سوم طول ترک مانند نمودار شکل ۱۱ رسم شده است. با عبور یک معادله درجه یک از نقاط رسم شده مقدار ضریب  $m$  در معادله ۵ برابر با  $m = 5 \times 10^{-9}$  بدست می‌آید.

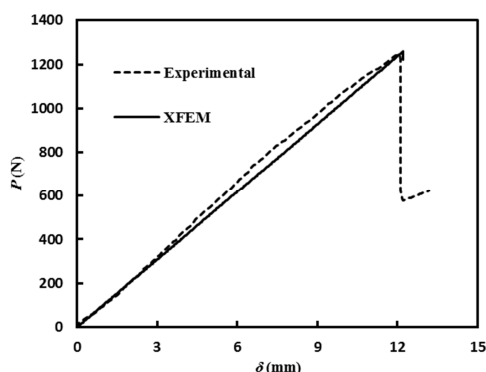
برای محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی با استفاده از روش تئوری تیر اصلاح شده از معادله ۱ استفاده شده است. شکل ۱۲ نمودار مقاومت ماده در برابر رشد ترک با استفاده از دو روش CCM و DBT را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است در این نمودار مقدار آهنگ رهایی انرژی کرنشی با افزایش طول ترک به سمت یک مقدار ثابت میل می‌کند و با توجه به اینکه در مواد ترد نمودار مقاومت ماده بصورت یک خط صاف می‌باشد [۲۳] می‌توان گفت که چسب آرالدایت ۲۰۱۱ رفتار ترد دارد. با توجه به شکل ۱۲ روش تئوری تیر اصلاح شده حد پایین آهنگ رهایی انرژی کرنشی و روش کالیبره کردن نرمی حد بالای آهنگ رهایی انرژی کرنشی را محاسبه می‌کنند.



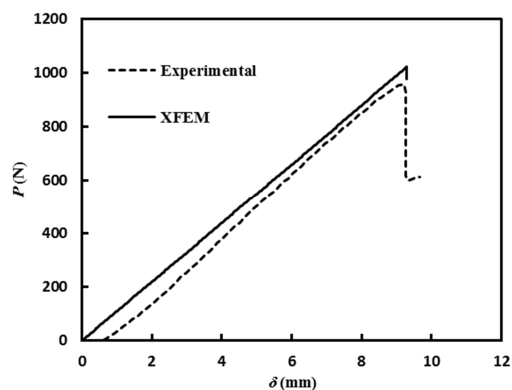
شکل ۱۱- نمودار نرمی - توان سوم طول ترک برای نمونه‌های ENF



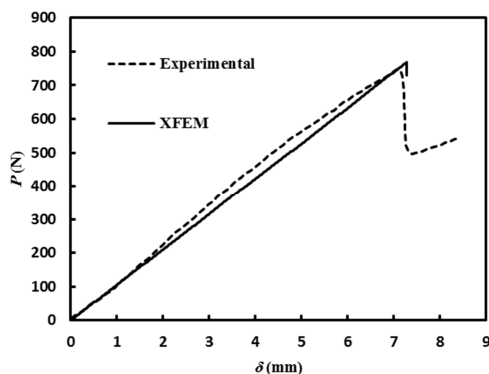
شکل ۱۳- تغییر شکل و مسیر رشد ترک در نمونه ENF بدست آمده از نتایج مدل سازی



شکل ۱۵- نمودار نیرو - جابه جایی با طول ترک اولیه 30 میلی متر



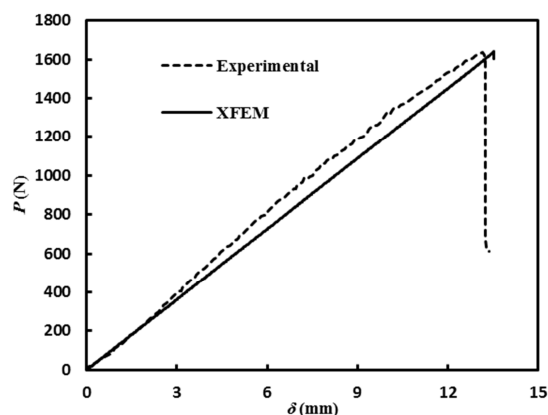
شکل ۱۶- نمودار نیرو - جابه جایی با طول ترک اولیه 40 میلی متر



شکل ۱۷- نمودار نیرو - جابه جایی با طول ترک اولیه 50 میلی متر

در شکل ۱۳ پارامتر PHILSM یک تابع فاصله علامت می باشد که فاصله نودها از سطح ترک را نشان می دهد به صورتی که نودهای بالایی سطح ترک دارای مقدار مثبت و نودهای پایینی سطح ترک دارای مقدار منفی می باشند [۲۲].

شکل های ۱۴ تا ۱۵ نمودار نیرو جابه جایی بدست آمده از نتایج آزمایش تجربی و مدل سازی به ترتیب با طول ترک اولیه ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ میلی متر را نشان می دهد. در این نمودارها نتایج آزمایش تجربی و مدل سازی به روش اجزای محدود توسعه یافته با یکدیگر مقایسه شده اند. نمودار نیرو - جابه جایی حاصل از کار آزمایشگاهی و مدل سازی در قسمت خطی و همچنین نیروی بحرانی و جابه جایی متناظر آن تا حدود زیادی به یکدیگر منطبق هستند. در این نمودار با اعمال جابه جایی به نمونه، نیرو و جابه جایی به صورت خطی افزایش می یابند، با رسیدن آهنگ رهایی انرژی کرنشی به مقدار بحرانی خود نیرو اعمالی در یک جابه جایی ثابت به طور ناگهانی افت می کند که این مرحله، مرحله رشد ترک می باشد. در نمودارهای نیرو - جابه جایی بدلیل بارگذاری به صورت کنترل جابه جایی رشد ترک در یک جابه جایی ثابت اتفاق افتاده است، یعنی با شروع رشد ترک در یک جابه جایی ثابت بار بحرانی در حال کاهش می باشد.



شکل ۱۴- نمودار نیرو - جابه جایی با طول ترک اولیه 20 میلی متر

جدول ۴ - مقایسه مقادیر آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی مود دوم شکست بدست آمده از حل عددی و نتایج آزمایشگاهی

| طول ترک اولیه (mm) | روش اجزای محدود توسعه یافته | روش تئوری تیر اصلاح شده |
|--------------------|-----------------------------|-------------------------|
| ۲۰                 | ۷۷۸/۱۸                      | ۶۶۶,۷۷                  |
| ۳۰                 | ۷۷۸/۱۸                      | ۷۹۱/۱۶                  |
| ۴۰                 | ۷۷۸/۱۸                      | ۸۱۶/۶۰                  |
| ۵۰                 | ۷۷۸/۱۸                      | ۸۰۹/۸۸                  |
| ۶۰                 | ۷۷۸/۱۸                      | ۷۹۶/۶۹                  |
| میانگین            | ۷۷۸/۱۸                      | ۷۷۶/۲۲                  |

با قرار دادن مقادیر آهنگ رهایی انرژی کرنشی در معادله (۷) و با توجه به این موضوع که مدل سازی در حالت کرنش صفحه ای انجام شده است، مقادیر ضریب شدت تنش در هر لحظه برای هر کدام از نمونه ها قابل محاسبه می باشد [۲۴].

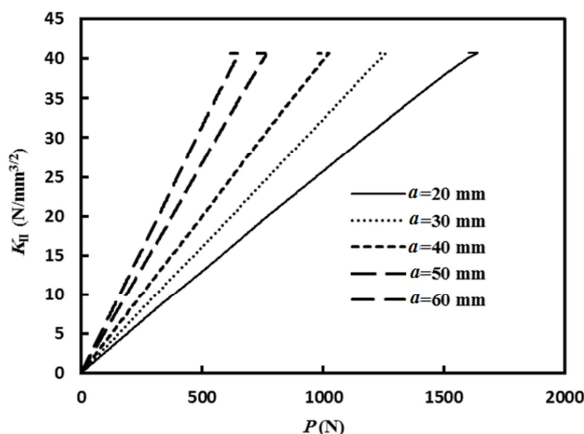
$$J = \frac{1}{E'} (K_{II}^2) \quad (7)$$

که در آن  $J$  با میزان انرژی آزاد شده ی شکست برای مواد الاستیک خطی،  $G$  برابر است و  $K_{II}$  ضریب شدت تنش برای مود II می باشد.  $E'$  ضریب یانگ مؤثر است که با استفاده از مدول یانگ  $E$  و نسبت پواسون  $\nu$  به صورت زیر می باشد:

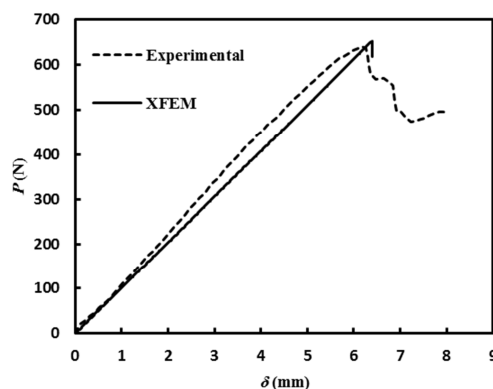
$$E' = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{plane strain} \\ E & \text{plane stress} \end{cases} \quad (8)$$

شکل ۲۰ نمودار تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب نیرو را نشان می دهد. در این نمودار ابتدا با افزایش بار اعمالی ضریب شدت تنش به صورت خطی افزایش می یابد. با افزایش بار اعمالی و رسیدن ضریب شدت تنش به مقدار بحرانی خود ترک شروع به رشد می کند در این مرحله ضریب شدت تنش با کاهش بار اعمالی در یک مقدار ثابت باقی می ماند.

با توجه به نمودار شکل ۲۰ مقدار چقرمگی شکست برای مود دو شکست برابر با  $K_{IIC} = 40.53 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  می باشد که این مقدار با توجه به شرایط مکانیک شکست الاستیک خطی در حین رشد ترک ثابت است.

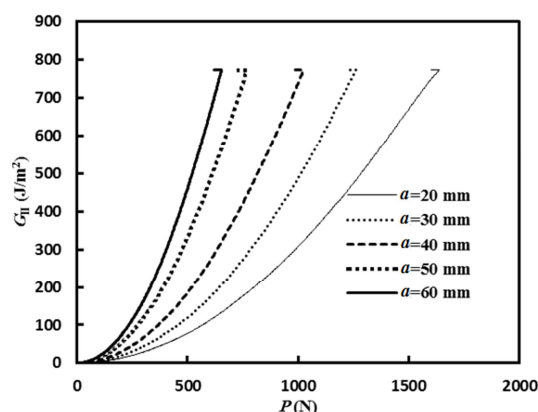


شکل ۲۰ - نمودار ضریب شدت تنش - نیرو برای نمونه های ENF با طول ترک های مختلف



شکل ۱۸ - نمودار نیرو - جابه جایی با طول ترک اولیه 60 میلی متر

شکل ۱۹ نمودار آهنگ رهایی انرژی کرنشی - نیرو را نشان می دهد. در این نمودار آهنگ رهایی انرژی کرنشی در اولین المانی که ترک در آن شروع به رشد می کند در هر مرحله اعمال بار مورد بررسی قرار گرفته است. در این نمودار با افزایش بار اعمالی آهنگ رهایی انرژی کرنشی به صورت منحنی افزایش می یابد. با رسیدن آهنگ رهایی انرژی کرنشی به میزان بحرانی خود و شروع رشد ترک نیرو شروع به کاهش می کند، اما آهنگ رهایی انرژی کرنشی در یک مقدار ثابت باقی می ماند.



شکل ۱۹ - نمودار رهای انرژی کرنشی - نیرو برای نمونه های ENF با طول ترک های مختلف

با توجه به نمودار شکل ۱۹ مقدار آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی نمونه ENF در مرحله رشد دارای مقدار ثابتی است و مدل سازی بر اساس تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی می باشد. در جدول ۴ مقادیر آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی بدست آمده از حل عددی و مشاهدات آزمایشگاهی با یکدیگر مقایسه شده اند. با توجه به جدول ۴ به این دلیل که مقدار میانگین آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی به عنوان ورودی نرم افزار در نظر گرفته شده است در نمونه ها با طول های ترک متفاوت مقدار آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی بدست آمده از نتایج حل عددی مقدار یکسانی می باشد. که این عدد کمی بیشتر از مقدار محاسبه شده از نتایج آزمایشگاهی است.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا مکانیزم‌های مختلف خرابی ایجاد شده در اتصال چسبی کامپوزیتی برای نمونه استاندارد ENF با توجه به نتایج آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفت. سپس مقدار آهنگ رهایی انرژی کرنشی مود دوم شکست برای چسب آرالدایت ۲۰۱۱ از نتایج تجربی محاسبه گردید. بعد از محاسبه آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی از روش اجزای محدود توسعه یافته در نرم‌افزار ABAQUS برای مدل-سازی رشد ترک در اتصال چسبی کامپوزیتی نمونه ENF استفاده شده است. با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که:

در تمامی نمونه‌ها با افزایش طول ترک اولیه شیب نمودار نیرو - جابه‌جایی دچار افت می‌شود. در ضمن با افزایش طول ترک اولیه انرژی بحرانی این پارامتر بر روی نمودار نیرو - جابه‌جایی کاهش پیدا می‌کند. با توجه به شیب نمودار در طول ترک‌های اولیه ۳۰ میلی‌متر به بعد می‌توان این رفتار را مشاهده کرد.

با توجه به نتایج آزمایشگاهی در نمونه ENF با طول ترک اولیه کمتر بدلیل افزایش سختی خمشی نمونه مسیر رشد ترک به داخل مواد متصل شده منحرف می‌شود، اما با افزایش طول ترک اولیه از سختی خمشی نمونه کاسته شده در نتیجه مسیر رشد ترک ابتدا در چسب و سپس در سطح تماس بین چسب و صفحه بالایی می‌باشد. برای بررسی رشد ترک در اتصال چسبی با استفاده از نمونه ENF هرچه طول ترک اولیه بیشتر باشد، خرابی در صفحات کامپوزیتی ایجاد نشده و شکست در چسب اتفاق می‌افتد.

با توجه به نتایج آزمایشگاهی مقدار آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی مود دوم شکست برای چسب آرالدایت ۲۰۱۱ برابر  $776/22 \text{ J/m}^2$  می‌باشد و نمودار مقاومت ماده در برابر رشد ترک با افزایش طول ترک با توجه به تردی ذاتی چسب آرالدایت ۲۰۱۱ به سمت یک مقدار ثابت میل می‌کند.

نمودار نیرو - جابه‌جایی بدست آمده از نتایج تجربی و مدل‌سازی در قسمت خطی نمودار و نیروی بحرانی و جابه‌جایی متناظر آن مطابقت خوبی با یکدیگر دارند و روش اجزای محدود توسعه یافته می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش المان چسبنده در مدل‌سازی رشد ترک اتصال چسبی کامپوزیتی در نمونه ENF باشد.

با توجه به اینکه در این تحقیق هدف از مدل‌سازی بررسی رشد ترک در چسب بوده است و مسیر رشد ترک بدست آمده از نتایج آزمایشگاهی و مدل‌سازی بر هم منطبق می‌باشند در نتیجه روش اجزای محدود توسعه یافته دارای توانایی مطلوبی برای پیش‌بینی مسیر رشد ترک در یک اتصال چسبی می‌باشد.

با توجه به نتایج مدل‌سازی آهنگ رهایی انرژی کرنشی و ضریب شدت تنش در طی فرآیند رشد ترک مقدار ثابتی دارند که مقدار ثابت در نمودار ضریب شدت تنش - نیرو همان چقرمگی شکست چسب و در نمودار آهنگ رهایی انرژی کرنشی - نیرو همان آهنگ رهایی انرژی کرنشی بحرانی می‌باشد. پس با توجه به نتایج مدل‌سازی مقدار چقرمگی شکست مود دوم برای چسب آرالدایت ۲۰۱۱ برابر با  $K_{IIC} = 40.53 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  می‌باشد.

## ۷- مراجع

- [1] Ashcroft I. A., Hughes D. J. and Shaw S. J., Mode I fracture of epoxy bonded composite, joints: 1. Quasi-static loading, International Journal of Adhesion & Adhesives, Vol. 21, No. 1, pp. 87-99, 2001.
- [2] De Moura M. F. S. F. and De Morais A. B., Equivalent crack based analyses of ENF and ELS tests, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 75, No. 1, pp. 2584 – 2596, 2008.
- [3] Landrock A. H. and Ebnasajjad, S., *Adhesives Technology Handbook*, Second ed., William Andrew, Norwich, pp. 14 – 19, 2008.
- [4] Floros I.S., Tserpes K.I. and Lobel T., Mode-I, mode-II and mixed-mode III fracture behavior of composite bonded joints: Experimental characterization and numerical simulation, Composites Part B, Vol. 78, No. 1, pp. 459 – 468, 2015.
- [5] Sukumar N., Huang, Z. Y., Prévost J. H. and Suo Z., Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks, International Journal Numerical Methods in Engineering, Vol. 59, No. 8, pp. 1075–1102, 2004.
- [6] De Moura M. F. S. F., Campilho R. and Gonçalves J. P. M., Pure mode II fracture characterization of composite bonded joints, International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, No. 6, pp. 1589–1595, 2009.
- [7] Fernandes R., Chousal, J. A. G., De Moura M. F. S. F. and Xavier, J., Determination of cohesive laws of composite bonded joints under mode II loading, Composite Part B Engineering, Vol. 52, No. 1, pp. 269–274, 2013.
- [8] Silva F. G. A., Morais J. J. L., Dourado N., Xavier J., Pereira F. A. M. and De Moura M. F. S. F., Determination of cohesive laws in wood bonded joints under mode II loading using the ENF test, International Journal of Adhesion & Adhesives, Vol. 51, No. 1, pp. 54–61, 2014.
- [9] Fernandes R. L., Campilho R., Leitão A. C. C. and Azevedo J. C. S., Numerical Evaluation of the Direct Method for Cohesive Law Extraction in Shear by the End-Notched Flexure Test, Procedia Engineering, Vol. 114, No. 1, pp. 94–101, 2015.
- [10] Grogan D. M., Leen S. B. and Brádaigh C. M. Ó., An XFEM-based Methodology for Fatigue Delamination and Permeability of Composites, Composite Structures, Vol. 107, No. 1, pp. 205–218, 2014.
- [11] Afshar A., Daneshyar A. and Mohammadi S., XFEM Analysis of Fiber Bridging in Mixed-mode Crack Propagation in Composites, Composite Structures, Vol. 125, No.1, pp. 314–327, 2015.
- [12] Kumar S., Singh I. V., Mishra B. K. and Rabczuk T., Modeling and simulation of kinked cracks by virtual node XFEM, Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, Vol. 283, No. 1, pp. 1425–1466, 2015.
- [13] Nasri K., Abbadi M., Zenasni M., Ghammouri M. and Azari Z., Double Crack Growth Analysis in the Presence of a Bi-material Interface using XFEM and FEM Modelling, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 35, No. 1, pp. 235–245, 2014.
- [14] Jaśkowiec Jan., Numerical modeling mechanical delamination in laminated glass by XFEM, Procedia Engineering, Vol. 108, No. 1, pp. 293 – 300, 2015.
- [15] Golewski G.L., Golewski P. and Sadowski T., Numerical modelling crack propagation under Mode II fracture in plain concretes containing siliceous fly-ash additive using XFEM method, Computational Materials Science, Vol. 62, No. 1, pp. 75 – 78, 2012.
- [۱۶] احمدی نجف آبادی مرتضی، صدیقی مجتبی، صالحی منوچهر، حسینی تودشکی حسین، آنالیز و پایش شروع خرابی در اتصالات آلومینیوم / کامپوزیت با استفاده از اکوستیک امیشن، نشریه علمی و پژوهشی علوم و فناوری کامپوزیت، دوره ۱، شماره ۱، صفحه ۱۳–۲۲، پاییز ۱۳۹۳.
- [17] Kashfuddoja M., Ramji M., Adhesive strain measurement in patch repaired CFRP laminate using 2D

- DIC, in *The 19th International Conference on Composite Materials (ICCM-19)*, Quebec, Canada, July, 2013.
- [18] Standard Test Method For Determination of the Mode II Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites, Annual Book of ASTM Standard, 04.01, D7905/D7905M -14, 2014.
- [19] Khoshravan M. and Asgari Mehrabadi F., Fracture analysis in adhesive composite material/aluminum joints under mode-I loading; experimental and numerical approaches, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 39, No. 1, pp. 8-14, 2012.
- [20] Standard Test Method for Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites, Annual Book of ASTM Standard, 05.16, D5528-01, 2010.
- [21] Laborde P., Pommier J., Renard Y. and Salaün M., High order extended finite element method for cracked domains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, No. 3, pp. 354–381, 2005.
- [22] S. Modeling, C. A. E. User, A. A. User, S. Reference, A. Keywords, R. Manual, and A. A. User, Abaqus 6.11. pp. 1–1349, Accessed on 20 January 2011; <http://www.3ds.com/products-services/simulia/201>.
- [23] Anderson T. L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, Third ed., Boca Raton: CRC press, pp. 38-40, 2005.
- [24] Mohammadi S., *Extended finite element method: for fracture analysis of structures*, John Wiley & Sons, Singapore, pp. 35 – 40. 2008.