

کنترل بهینه ارتعاشات عرضی تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران
دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران
استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه سیرجان، سیرجان، ایران

* بهروز رحمانی
محمد رضا نغمه‌سنج
محمد حسینی

چکیده

در این مقاله، کنترل ارتعاشات عرضی تیر یک سر گیر دار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای سطح مقطع متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. در این راستا، از صفات پیزوالکتریک بهمنظور اندازه‌گیری میزان ارتعاشات عرضی تیر و همچنین اعمال نیروهای کنترلی بهره برده شده است. در این راستا، معادلات مشتق جزئی حاکم بر دینامیک سیستم بهمک اصل همیلتون و با فرض تیر اوپلر-برنولی استخراج شده است. برای دست‌یابی به این هدف، از روش تفاضل محدود برای محاسبه‌ی پاسخ تقریبی سیستم متععش استفاده شده و بر آن اساس، از تجزیه‌ی متعامد مناسب، برای گرینش حداقل مودهای بهینه ارتعاشی و همچنین از روش تصویرسازی گالرکین برای استخراج حداقل معادله‌های دیفرانسیل زمانی معمولی تشریح کننده‌ی رفتار سیستم بهره برده می‌شود. از آنجایی که اطلاعات در بازه‌های نمونه اندازه‌گیری می‌شود، سیستم به عنوان نمونه‌برداری-داده فرض شده است. از این‌روش باخورد خروجی مبتنی بر رؤیت‌گر حالت برای کنترل این سیستم زمان گستته به کار گرفته شده است. در این راستا، طراحی بهره‌های کنترل کننده و رؤیت‌گر حالت به کمک روش کنترل بهینه صورت می‌پذیرد. در پایان، با انجام یک شبیه‌سازی، کارایی روش پیشنهادی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل ارتعاشات عرضی، تیر یک سرگیردار مدرج تابعی، تجزیه متعامد بهینه، کنترل دیجیتال بهینه.

Optimal Vibration Control of a Functionally Graded Clamped Beam with a Variable Cross Section

B. Rahmani
M. R. Naghmehsanj
M. Hosseini

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
Department of Mechanical Engineering, Sirjan University, Sirjan, Iran

Abstract

In this paper, vibration control of a FGM (Functionally Graded Material) clamped beam with variable cross section has been investigated. For this purpose, piezoelectric patches are used as sensors to measure the displacement of the beam and also as actuators to apply control forces. In this way, partial differential equation governing the dynamics of the system is achieved by considering the Euler-Bernoulli assumption using Hamilton's principle. Approximate solution of these equations is estimated using finite difference method, the proper orthogonal decomposition is used to obtain vibration normal modes. additionally, Galerkin methods is used to derive reduced order state equations of the vibrating system. Since the data is measured in sampling intervals, the system is considered as sampled-data. Therefore, a digital observer-based output feedback controller is designed for this discrete-time model. In this regard, controller and observer gains are designed by optimal control methods. Finally, A simulation study shows the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Vibration control, Functionally graded clamped beam, Proper orthogonal decomposition, Optimal digital control.

صنعتی محاسبه می‌شود. اما به دلیل برهمنکش‌های آیروالاستیک حرارتی که به دلیل فعالیت پره‌های توربین در دور، عدد ماخ و دمای بالا ایجاد می‌شود و همچنین نامیزانی‌های جرمی توربین، نیروهای بزرگی به پره‌ها اعمال شده که ارتعاش و در نتیجه ناپایداری توربین‌ها در طول فرآیند کاری را سبب خواهد شد [۲]. این ارتعاشات، یکی از پدیده‌های نامطلوبی است که به شکست پره‌های توربین و تحمل هزینه‌های فراوان ناشی از تعمیرات و قطع روند تولید منجر می‌شود. بر این اساس، کنترل ارتعاش سازه‌ها در صنایع مهندسی از اهمیت خاصی برخوردار است. یکی از اهداف اصلی کنترل ارتعاش، بالا بردن میرایی این سازه‌ها به صورت فعل و در نتیجه از بین بردن یا کاهش سریع اثرات این نوسانات مخرب در دستگاه مکانیکی است. برای رسیدن به این هدف، استفاده از مواد هوشمندی مانند پلیمرها و سرامیک‌های پیزوالکتریک پیشنهاد شده است. در این راستا، از صفات مجزای پیزوالکتریک بهمنظور اندازه‌گیری میزان ارتعاشات تیر (سنسور یا

۱- مقدمه

سازه‌های انعطاف‌پذیر، اخیراً، در صنایع فضایی، خودروسازی، دریابای، عمرانی، کارخانه‌های تولیدی، پالایشگاهی و نیروگاهی مورد توجه بسیار قرار گرفته‌اند، که دلیل این مسئله را می‌توان در وزن کم، انعطاف‌پذیری زیاد و سادگی طراحی آنها دانست. همچنین سازه‌های انعطاف‌پذیر تیری شکل در بسیاری از سیستم‌های مکانیکی مانند بازویان انعطاف‌پذیر ربات‌ها، پره‌های توربین و ماشین آلات دوار مورد استفاده قرار گرفته‌است [۱]. در کنار مزایای ذکر شده برای این گونه سازه‌ها، به کارگیری آن‌ها به ارتعاشات زیاد مجموعه‌ی مکانیکی در برابر اغتشاشات خارجی منجر می‌شود که با توجه به میرایی کم آنها، تا مدت‌ها ادامه پیدا کرده و بنابراین منجر به افزایش نویز، همچنین تنش‌های دینامیکی سیستم و درنتیجه آسیب‌دیدگی مکانیکی سیستم می‌شود. به عنوان مثال، توربین‌ها قلب تپنده واحدهای تولیدی و

به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی نخست به دست آورده، سپس پاسخ تحلیلی آنرا محاسبه نموده و به بررسی اثرات نسبت حجمی مواد در حداکثر دامنه‌ی ارتعاش پرداختند [۱۹]. ولی با بررسی ادبیات موجود می‌توان متوجه شد که در زمینه‌ی کنترل فعال ارتعاشات اجسام ساخته شده از مواد مدرج تابعی پژوهش‌های کمی صورت گرفته است. کیو و همکاران (Qui et al) به بررسی کنترل ارتعاش فعال یک تیر منعطف به کمک سنسورها و عملگرهای پیزوالکتریک پرداخته‌اند [۱۶]. برانت و همکاران (Braunt et al) به بررسی چگونگی جایابی محل عملگرها و سنسورها روی یک تیر مدرج تابعی و همچنین کنترل ارتعاشات آن با استفاده از تنظیم‌کننده‌ی خطی مرتبه‌ی دوم پرداختند [۲۰].

بر اساس مطالعات انجام شده توسط نویسنده‌گان این مقاله، مسئله‌ی کنترل ارتعاشات یک تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر که می‌توان از آن به عنوان مدلی از یک پرهی توربین نام برد، مورد بررسی قرار نگرفته است. آنچه گفته شد، انگیزه‌ی نویسنده‌گان این مقاله، برای ارائه‌ی پژوهش کنونی است.

در این مقاله، روشی برای کنترل بهینه‌ی ارتعاشات تیر با سطح مقطع متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی پیشنهاد شده است. در این روش، ابتدا مدل بهینه و کاهش مرتبه یافته‌ای از سیستم پارامتر پیوسته استخراج می‌گردد. برای رسیدن به این هدف، ابتدا معادلات حاکمه سیستم تحت شرایط اولیه و بارگذاری خارجی داده شده با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده و از این پاسخ در قالب راه‌کار تجزیه‌ی متعممد مناسب که به اختصار^۴ POD نامیده می‌شود، برای به دست آوردن مودهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی برهه برده می‌شود. سپس با کمک شیوه‌ی تصویرسازی گالرکین معادلات دیفرانسیل زمانی سیستم رتبه کاهش یافته به دست آمده و به صورت فضایی حالت بیان می‌شود. سپس با در نظر گرفتن کنترل کننده‌ی بازخوردی مبتنی بر رؤیتگر، حل مسائل تنظیم‌کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی و تنظیم کننده‌ی مرتبه‌ی دوم گوسی یا جایابی قطب گسسته، به محاسبه‌ی بهینه‌ی ارتعاشات تیر گذاشته شود. روش پیشنهادی نوآوری‌هایی به صورت زیر دارد: (الف) سختی و اینرسی سنسور و عملگر پیزوالکتریک در نظر گرفته شده است. بنابراین خطای مدلسازی به حداقل می‌رسد؛ (ب) در حالی که در روش‌های دیگر مانند روش‌های ریتز یا گالرکین نیاز به حدس توابع پایه‌ای می‌باشد که شرایط مرزی هندسی و شرایط مرزی نیرویی را ارضاء کند، در روش POD نه تنها نیاز به هیچ گونه حدس اولیه‌ای نیست، بلکه تنها با داشتن میزان ارتعاشات چند نقطه از تیر، شناسایی مودها به راحتی امکان پذیر است؛ (پ) برخلاف بسیاری از تحقیقات انجام شده که در مرحله‌ی شبیه‌سازی، کنترل کننده را روی مدل مرتبه‌کاهش یافته اعمال می‌کرند، در اینجا روش پیشنهادی بر روی معادله‌ی حاکمه‌ی مشتقی جزئی سیستم پارامتر گستردۀ پیاده شده و با انجام شبیه‌سازی کارایی آن نشان داده می‌شود.

حساسه) و همچنین اعمال نیروهای کنترلی طراحی شده توسط سیستم کنترلی (عملگر یا محرک) بهره برده شده است [۳].

لازم به ذکر است که مدلسازی ارتعاشات مجموعه‌های انعطاف‌پذیر، که زیرمجموعه‌ای از سیستم‌های پارامتر گستردۀ (DPS)^۱ محسوب می‌شود، به معادله‌ی مشتق جزئی منجر می‌شود [۴]، که متفاوت با سیستم‌های چند درجه آزادی است. در چند سال اخیر، استراتژی‌های مختلفی برای کنترل فعال چنین سیستم‌هایی پیشنهاد شده است [۷-۵]. دادفرنیا و همکاران با پیشنهاد یک کنترل کننده‌ی مبتنی بر رؤیتگر حالت، کنترل یک تیر منعطف را بررسی نموده‌اند [۸]. سانز و همکاران (Sanz et al) کنترل مقاوم یک سیستم پارامتری گستردۀ دارای عدم قطعیت را مورد مطالعه قرار دادند [۹]. الهزا و نایفه Alhazza and Nayfe) کنترل بازخورد تأخیری را برای حذف ارتعاشات تیر یک سرگیردار پیشنهاد کردند [۱۰]. هو و همکاران (hua et al) به کنترل ارتعاشات فضای‌پیمایی که به صورت تیر یک سرگیردار مدل شده است، پرداخته‌اند [۱۱]. ژو و تانگ (Xue and Tang) از روش مود لغزشی انتگرالی^۲ برای کنترل ارتعاشات تیر دوار غیرخطی پرداختند [۱۲]. واسکوئس و همکاران (Vasques et al) کنترل فعال ارتعاش میله‌های پیزوالکتریک را به کمک روش‌های کلاسیک و مدرن، مانند کنترل کننده‌ی بهینه‌ی تنظیم‌کننده‌ی خطی مرتبه‌ی دو بررسی کردند [۱۳]. ذبیح‌الله و همکاران (Zabihollah et al) کنترل ارتعاشات تیر کامپوزیتی را به وسیله‌ی روش تنظیم‌کننده‌ی خطی مرتبه‌ی دوم بررسی نمودند [۱۴]. کاپوریا و همکاران (Kapurria et al) با استفاده از مدل اجزاء محدود تیر کامپوزیتی، معادلات فضایی حالت سیستم را به دست آورده و سپس کنترل کننده‌ی بهینه‌ی برای آن طراحی نمودند [۱۵]. کیو و همکاران (Qui et al) ترکیبی از کنترل بازخوردی تناوبی و همچنین روش مود لغزشی را برای کنترل دو مود اول ارتعاشی خمی تیر به کار برندند [۱۶].

از طرف دیگر، برای برطرف کردن معاایب فلزات، مواد مرکب لایه‌ای و سرامیک‌ها، در سال ۱۹۸۴، برای نخستین بار یک گروه از محققان و دانشمندان ژاپنی دسته‌ی تونینی از مواد را معرفی و به عنوان ماده‌ی سپر حرارتی در صنایع هواپضا و راکتورهای هسته‌ای به کار برد. از آن زمان تاکنون، تلاش‌های زیادی برای گسترش و بهبود این مواد که با نام مواد مدرج تابعی^۳ شناخته می‌شود، صورت پذیرفته است. تحقیقات زیادی در زمینه‌ی بررسی ارتعاشات تیرها، پره‌ها و ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی انجام شده است. لبریسکیو و همکاران (Librescu et al) پره‌های دوار نازک مواد مدرج تابعی را به صورت ترمولاستیک مدل کرده‌اند [۱۷]. حسینی و همکارانش به بررسی ارتعاش یک تیر دوار نازک دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی، بدون در نظر گرفتن پیزوالکتریک پرداخته‌اند [۲]. حسینی همچنین ارتعاش یک تیر دوار نازک دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت جریان مأمور صوت و دما بالا را با روش مربع‌سازی دیفرانسیلی مورد بررسی قرار داده است [۱۸]. غریب و همکاران معادلات حاکم بر ارتعاشات یک تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی را

¹Distributed Parameter System: DPS

²Integral Sliding Mode Approach

³Functionally Graded Material: FGM

⁴ Proper Orthogonal Decomposition

قطعه‌های پیزوالکتریک، به عنوان حساسه و محرک استفاده می‌شود. بر این اساس، خصوصیت مکانیکی و هندسی تیر در راستای طولی و عرضی تغییر می‌کند، به همین دلیل انرژی‌های پتانسیل کرنشی و جنبشی نسبت به یک تیر یکنواخت متفاوت خواهد بود. لازم به ذکر است که در ادامه از اثر میرایی‌های ساختاری صرف نظر شده است. همچنین ولتاژ ورودی $V_a(t)$ اعمال شده به محرک پیزوالکتریک، به عنوان تنها عامل مؤثر خارجی تولیدکننده‌ی کار در نظر گرفته می‌شود. در ادامه، با در نظر گرفتن فرضیات تیر اولر-برنولی و به دست آوردن انرژی‌های پتانسیل مکانیکی و الکتریکی، جنبشی مکانیکی و کار مجازی مکانیکی و الکتریکی، از اصل همیلتون، یعنی معادله^(۳)، برای استخراج معادلات ارتعاش عرضی تیر استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L' + \delta W^{\text{ext}}) dt = 0 \quad (3)$$

که در این رابطه L' ، T ، $L' = T - U$ و δW^{ext} به ترتیب معرف لاغرانژین، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار مجازی عوامل خارجی است. با توجه به ناهمگن بودن ساختار سیستم موردنظر، طول تیر را می‌توان به سه بخش تقسیم نمود: الف) بازه‌های $[0, l_1]$ و $[l_4, L]$ ؛ ب) بازه‌ی $[l_1, l_2]$ که محرک پیزوالکتریک در آن قرار دارد؛ پ) بازه‌ی $[l_3, l_4]$ که حساسه‌ی پیزوالکتریک در آن قرار دارد. می‌توان نشان داد که تغییرات یا واریاسیون انرژی جنبشی این سیستم با صرف نظر از انرژی جنبشی الکتریکی برابر است با [۲۱]:

$$\delta T = \int_0^L \rho(x) \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx \quad (4)$$

که:

$$\rho(x) = b(x) [\rho_b(x) t_b + G_1(x) \rho_p^a t_a + G_2(x) \rho_p^s t_s] \quad (5)$$

$$G_1(x) = H(x - l_1) - H(x - l_2) \quad (6)$$

$$G_2(x) = H(x - l_3) - H(x - l_4) \quad (7)$$

$H(x)$ ، ρ_b ، ρ_p^a و ρ_p^s به ترتیب بیان‌گرتابع‌های ساید^۳، چگالی طولی تیر، محرک پیزوالکتریک و حساسه‌ی پیزوالکتریک است. از آنجا که حرکت یک بعدی در راستای محور Z در نظر گرفته شده است، انرژی پتانسیل تیر و قطعه‌ی پیزوالکتریک را می‌توان به ترتیب به صورت روابط (۸) و (۹) نوشت:

$$\delta U_b = \int_V (\sigma_{1b} \delta S_{1b}) dV \quad (8)$$

$$\delta U_p = \int_V (\sigma_{1p} \delta S_{1p} + \epsilon_3 \delta D_3) dV \quad (9)$$

معادلات ساختاری برای قطعه‌های محرک و حساسه‌ی پیزوالکتریک

یک بعدی به صورت زیر است:

$$\sigma_{1p} = E_{11}^D S_{1p} - h_{31} D_3 \quad (10)$$

$$\epsilon_3 = -h_{31} S_{1p} + \beta_{33}^s D_3 \quad (11)$$

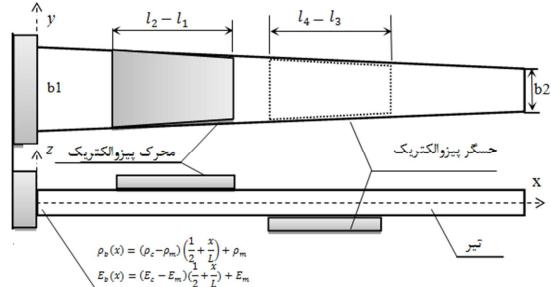
در اینجا σ_{1b} و σ_{1p} به ترتیب تنش در راستای محور X تیر و پیزوالکتریک، E_{11}^D مدول الاستیک پیزوالکتریک تحت شرایط جابجایی دی الکتریک ثابت، S_{1p} و S_{1b} کرش‌های تیر و قطعه‌ی پیزوالکتریک بر حسب V/m . D_3 میدان الکتریکی بر حسب V/m و β_{33}^s ضریب گذرناظدیری تحت شرایط تنش ثابت می‌باشد.

³ Heaviside function

۲- تیر مقطع متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی

طولی و دارای عملگر و حسگر پیزوالکتریک

مدل تیر مورد نظر این پژوهش در شکل ۱ نشان داده شده است. این تیر انعطاف‌پذیر، از مواد مدرج تابعی طولی ساخته شده و دارای مقطع متغیر می‌باشد. در اینجا، طول و ضخامت تیر، به ترتیب، به عنوان محورهای X و Z در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، $Z = 0$ صفحه میانی تیر می‌باشد. این تیر دارای ضخامت t_p و طول L است. همچنین یک قطعه‌ی محرک پیزوالکتریک بر روی سطح بالایی و دو قطعه‌ی به هم چسبیده‌ی حسگر پیزوالکتریک بر روی سطح زیرین آن قرار گرفته است.



شکل ۱- نمایش مدل هندسی در نظر گرفته شده

در این شکل، لایه‌ی محرک پیزوالکتریک در فاصله‌ی l_1 از پایه‌ی تیر با ضخامت t_p و طول $l_1 - l_2$ و لایه‌های سنسور پیزوالکتریک در فاصله‌ی l_3 با ضخامت t_p و طول $l_4 - l_3$ قرار داده شده است. در اینجا فرض می‌شود که عرض تیر و قطعات پیزوالکتریک، به صورت تابع خطی $b(x) = b_1(1 - \frac{x}{2L})$ در طول تیر تغییر کند و نسبت طول تیر به ضخامت آن نسبتاً بزرگ باشد (بزرگ‌تر از ۱۰ برابر)؛ بنابراین در استخراج روابط می‌توان از فرض تیر اولر-برنولی استفاده کرد.

در یک تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی طولی، سطح سمت چپ یک لایه‌ی فلزی و سطح سمت راست لایه‌ای سرامیکی است. فرض کنید که E_c ، E_m ، ρ_c و ρ_m به ترتیب مقادیر مدول الاستیک و چگالی جرم طولی (جرم بر واحد طول) را در لایه‌های سرامیکی سمت راست و فلزی سمت چپ تیر نشان دهد. این دو مشخصه به طور پیوسته در جهت طول طبق رابطه‌های زیر تغییر می‌کند:

$$E(x, k) = (E_c - E_m)g(x) + E_m \quad (1)$$

$$\rho(x, k) = (\rho_c - \rho_m)g(x) + \rho_m \quad (2)$$

که در رابطه‌های بالا $g(x) = (\frac{1}{2} + x/L)^k$ کسر حجم^۱ و k نمای تیر حجم^۲ است. این تابع چگونگی تغییر خصوصیات مواد را در طول تیر نشان می‌دهد. توزیع چگالی طولی نیز به طور مشابه است و ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته شده است [۲۰].

۳- مدل سازی ریاضی

همان‌گونه که در مقدمه اشاره شد، هدف از این پژوهش، کنترل ارتعاشات تیر یک سر گیردار انعطاف‌پذیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر است. برای رسیدن به این هدف، از

¹ Volume Fraction

² Volume Fraction Index

$$a_1(x) = \int_{\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}+t_a} (z - z_{n1})^2 dz \quad (37)$$

$$a_2(x) = \int_{\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}+t_a} (z - z_{n1}) dz \quad (38)$$

$$a_3(x) = \int_{\frac{t_b}{2}-t_s}^{\frac{t_b}{2}} (z - z_{n2})^2 dz \quad (39)$$

$$a_4(x) = \int_{\frac{t_b}{2}-t_s}^{\frac{t_b}{2}} (z - z_{n2}) dz \quad (40)$$

با توجه به این نکته که در ابتدا و انتهای تیر توابع $G_1(x)$ و $G_2(x)$ برابر صفر هست، معادلات شرایط مرزی (۲۰) و (۲۱) را می‌توان این‌گونه ساده نمود:

$$w(0, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w(L, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (32)$$

همچنین ولتاژهای خروجی دو حسگر را می‌توان این‌گونه برحسب جابجایی تیر نوشت [۲۱]:

$$V_{s1}(t) = \frac{E_p^s h_{31}^s t_{eq}^s}{2\beta_{33}^s C_p^l} \int_{l_3}^{l_{31}} b(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (33)$$

$$V_{s2}(t) = \frac{E_p^s h_{31}^s t_{eq}^s}{2\beta_{33}^s C_p^l} \int_{l_{31}}^{l_4} b(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (34)$$

در حالی که $C_p^l = (t_p^s + t_b - 2z_{n1})$ و t_{eq}^s ضرفیت معادل پیزوالکتریک لایه‌ای است.

با توجه به بیچیدگی معادله (۱۹) و غیرممکن بودن محاسبه‌ی پاسخ تحلیلی آن، استفاده از روش‌های تقریبی عددی منطقی به نظر می‌رسد. در این پژوهش از روش تفاضل محدود^۱ برای حل مسئله استفاده می‌شود؛ دلیل این گزینش، دقت، سرعت، سادگی و هزینه‌ی محاسباتی نسبتاً پایین این روش نسبت به روش‌های مشابه است.

۴- روش کنترلی پیشنهادی

در روش پیشنهادی، با حل معادلات حاکمه سیستم تحت شرایط اولیه و بارگذاری خارجی داده شده با استفاده از روش تفاضل محدود، از راه‌کار تجزیه‌ی متعمد مناسب یا POD برای بهدست آوردن مودهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی که بیشترین انرژی را در تحريك دارد، بهره برده می‌شود. سپس با کمک شیوه‌ی تصویرسازی گالرکین معادلات دیفرانسیل زمانی سیستم رتبه کاسته بهدست آمده و به صورت فضایی حالت بیان می‌شود. در پایان، با در نظر گرفتن کنترل کننده‌ی بازخوردی مبتنی بر رؤیتگر، حل مسائل تنظیم کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی و تنظیم کننده‌ی مرتبه‌ی دوم گوسی یا جایابی قطب گستته، به محاسبه‌ی بهره‌های بهینه‌ی بازخورد حالت و رویتگر منجر می‌شود.

۴-۱- محاسبه‌ی مودهای بهینه‌ی به روش بی-۱-دی

در اینجا، برای بهدست آوردن مودهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی، از راه‌کار تجزیه‌ی متعمد مناسب یا POD استفاده می‌شود. این روش برای بیان یک سیستم پارامتر گسترده با تعداد بهینه‌ی مودها یا درجه‌های آزادی به کار برده می‌شود و به کمک آن دینامیک سیستم با کمترین مرتبه و همچنین دقت نسبتاً خوبی نشان داده می‌شود.

روشن است جایی که قطعه‌ی پیزوالکتریک وجود ندارد، صفحه‌ی خنثی همان صفحه‌ی مرکزی هندسی تیر می‌باشد ($z = 0$) و رابطه‌ی جابجایی-کرنش به صورت زیر است:

$$S_{1b} = S_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (42)$$

که در این رابطه $w(x, t)$ جابجایی محور خنثی می‌باشد. برای بخشی که قطعه‌ی پیزوالکتریک به تیر اتصال دارد، با صفر قرار دادن مجموع نیروها در جهت x برای یک سطح مقطع عرضی، صفحه‌ی خنثی و درنتیجه کرنش برای محرك از رابطه‌های (۱۳) و (۱۵) و همچنین برای حساسه از رابطه‌های (۱۴) و (۱۶) محاسبه می‌شود [۲۱].

$$z_{n1} = \frac{E_p^a t_a (t_a + t_b)}{2[E_b(x)t_b + E_p^a t_a]} \quad (43)$$

$$z_{n2} = \frac{-E_p^s t_s (t_s + t_b)}{2[E_b(x)t_b + E_p^s t_s]} \quad (44)$$

$$S_{1p}^a = -(z - z_{n1}) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (45)$$

$$S_{1p}^s = -(z - z_{n2}) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (46)$$

کار مجازی الکتریکی ایجاد شده در اثر ولتاژ وارد شده به محرك پیزوالکتریک را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$\delta W_e^{ext} = \int_0^L b(x) V'_a(x, t) \delta D_1(x, t) dx \quad (47)$$

توجه به این نکته ضروری است که همانطور که در رابطه (۱۷) نشان داده شده است، ولتاژ ورودی محرك فقط در بخشی از طول تیر قرار دارد، همچنین با توجه به اینکه محرك فقط در بخشی از طول تیر قرار دارد، ولتاژ ورودی تابعی از طول تیر نیز است. در محرك‌های پیزوالکتریک عرضی فرض می‌شود که در طول اتصال آن با تیر، ولتاژ ورودی یکنواخت است و جاهای دیگر ولتاژ صفر است. بر این اساس وابستگی مکانی ولتاژ، با استفاده ازتابع هوي سايد قابل بيان است:

$$V'_a(x, t) = V_a(t) G_1(x) \quad (48)$$

حال با جایگذاری از معادلات (۴)-(۱۸) در (۳)، به کارگیری انگرال گیری جزء به جزء و فرض صفر بودن واریاسیون متغیرها در زمان‌های t_1 و t_2 ، معادله‌ی حاکم بر ارتعاش عرضی تیر مورد نظر شکل ۱ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(c(x) - \frac{b(x)h_1}{\beta_1} \right) \times \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) = - \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(\frac{b(x)h_2}{\beta_2} \right) \right] V_a(t) \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(c(x) - \frac{h_1}{\beta_1} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{b(x)h_2}{\beta_2} V_a(t) \right) \times \delta w(x, t)|_0^L = 0 \quad (50)$$

$$\left(\left(c(x) - \frac{h_1}{\beta_1} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{b(x)h_2}{\beta_2} V_a(t) \right) \times \delta \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)|_0^L = 0 \quad (51)$$

که پارامترهای معادله‌ی فوق به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$c(x) = b(x)(E_b(x)\frac{t_b^2}{12} + G_1(x)E_p^a a_1(x) + G_2(x)E_p^s a_3(x)) \quad (52)$$

$$h_1 = t_s \beta_{33}^s G_1(x)[h_{31}^a a_2(x)]^2 + t_a \beta_{33}^a G_2(x) \times [h_{31}^s a_4(x)]^2 \quad (53)$$

$$\beta_1 = t_a \beta_{33}^a + t_s \beta_{33}^s \quad (54)$$

$$h_2 = G_1(x)h_{31}^a a_2(x) \quad (55)$$

$$\beta_2 = t_a \beta_{33}^a \quad (56)$$

^۱ Finite Difference Method:FDM

۲-۴- استفاده از روش تصویرسازی گالرکین برای بهدست

آوردن مدل کاهش مرتبه یافته‌ی سیستم

پس از آنکه با کمک روش POD مودهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی بهدست آمد، از روش تصویرسازی گالرکین برای استخراج معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش مرتبه یافته بهره برد می‌شود. در این روش، معادله‌ی دیفرانسیل مشتقی جزئی حاکم روی مودهای ارتعاشی POD تصویر می‌شود.

فرض کنید که $\varphi(x) \in [\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^{N_1}(x)]$ یکی از مودهای بهدست آمده از روش POD باشد که $N < N_1$ معرف تعداد مودهای در نظر گرفته شده در ساخت مدل کاهش مرتبه یافته است. برای گزینش N_1 از مقادیر تکین σ_i استفاده می‌شود؛ با توجه به اینکه در روش POD مودهای اول بیشترین انرژی را دارد، با در نظر گرفتن چند مود اول با بزرگترین مقادیر σ_i ، با تقریب خیلی خوبی می‌توان به مدلی بهینه دست یافت. با ضرب داخلی $(x)^j \varphi$ در معادله‌ی حاکم بر حرکت، یعنی (۱۹)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \varphi^j(x) dx \\ & + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(c(x) - \frac{b(x)h_1}{\beta_1} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] \\ & \times \varphi^j(x) dx \\ & = \int_0^L -\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{b(x)h_2}{\beta_2} \right] V_a(t) \varphi^j(x) dx \end{aligned} \quad (۳۷)$$

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{N_1} q_i(t) \varphi^i(x) \quad (۳۸)$$

و جاذداری آن در رابطه‌ی (۳۷)، می‌توان به مدل کاهش مرتبه یافته زیر رسید:

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = FV_a(t) \quad (۳۹)$$

که در آن M و K ماتریس‌های $N_1 \times N_1$ بوده و درایه‌های آن‌ها به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$M_{ij} = \int_0^L \rho(x) \varphi^i(x) \varphi^j(x) dx \quad (۴۰)$$

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(c(x) - \frac{b(x)h_1}{\beta_1} \right) \frac{d^2 \varphi^i(x)}{dx^2} \right] \times \varphi^j(x) dx \quad (۴۱)$$

همچنین F و $q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_{N_1}(t)]^T$ یک بردار $N_1 \times 1$ که درایه‌های آن برابر است با:

$$F_j = \int_0^L -\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{b(x)h_2}{\beta_2} \right] \varphi^j(x) dx \quad (۴۲)$$

شرط اولیه‌ی این مدل نیز به صورت زیر قابل تعیین است:

$$q_j(t) = \int_0^L w(x, 0) \varphi^j(x) dx \quad (۴۳)$$

$$\dot{q}_j(t) = \int_0^L \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} \varphi^j(x) dx \quad (۴۴)$$

آشکار است که در این روابط $j = 1, 2, \dots, N_1$ است.

این مدل بهینه حداقل مرتبه را می‌توان با نمایش فضای حالت نیز

مشخص نمود. این‌کار، با تعریف بردار حالت (۴۵) انجام می‌شود:

$$X = [q_1 q_2 \dots q_{N_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_{N_1}]^T \quad (۴۵)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (۴۶)$$

همچنین این روش با نام‌های تحلیل مؤلفه‌های اصلی^۱، تجزیه کارهونن-لوو^۲ و تجزیه مقدار تکین نیز شناخته می‌شود.

آنالیز داده‌ها به روش POD به استخراج شکل مودها یا توابع پایه^۳ از داده‌های تجربی و یا شبیه‌سازی دقیق سیستم‌های با ابعاد بالا منجر می‌شود و معمولاً در پی آن از روش‌هایی مانند گالرکین برای رسیدن به مدل دینامیکی کم مرتبه استفاده می‌شود. بیان ریاضی بهینه بودن مودها به این صورت است که باید شکل مود φ نرمالی محاسبه شود که متوسط تصویر جابجایی W بر روی آن که به صورت رابطه‌ی (۳۵) تعریف می‌شود را بیشینه کند [۲۲]:

$$\max \frac{\langle |(w(x, t), \varphi(x))|^2 \rangle}{\|\varphi(x)\|^2} \quad (۳۵)$$

که $\langle \cdot, \cdot \rangle = \int_0^L w(x, t) \varphi(x) dx$ و $\|\varphi(x)\| = (\varphi(x), \varphi(x))^{\frac{1}{2}}$ مجموعه، قدرمطلق آن، ضرب داخلی تابع پیوسته‌ی $w(x, t)$ و $\varphi(x)$ و نرم $\varphi(x)$ است. بنابراین می‌توان گفت پیدا کردن این مودهای نرمال، در قالب مسئله‌ی حساب تغییرات محاسبه‌ی بیشینه‌ی تابع $\|\varphi(x)\|^2$ تحت اثر قید $\langle |(w(x, t), \varphi(x))|^2 \rangle = 1$ قابل بیان است.

اکنون از روش تصاویر^۴ که توسط سیرویج پیشنهاد شده است برای محاسبه‌ی این مدها استفاده می‌شود [۲۳]. برای تفسیر این روش، فرض می‌شود که یک شبیه‌سازی عددی بر روی تعداد زیادی از گره که با N نشان داده می‌شود، صورت پذیرفته است. همچنین، شمار نمونه‌هایی که برای تشریح این فرآیند مناسب است، M در نظر گرفته می‌شود، در حالی که در ادامه، برای نوشتار ساده‌تر، داده‌هایی از پاسخ سیستم که در لحظه‌ی t_k ثبت شده‌اند، با $w(x, t_k) = w^k(x) = w^k \in R^N$ نمایش داده می‌شود. با $W \in R^{N \times M} = [w^1, w^2, \dots, w^M]$ باشد، توابع پایه را می‌توان از طریق تجزیه مقدار تکین یا SVD^۵ نیز به دست آورد:

$$W = U \Sigma V^T \quad (۴۶)$$

در رابطه (۴۶)، $U = [\varphi_x^1, \varphi_x^2, \dots, \varphi_x^{N_1}]$ ماتریس معتمد $V = [v^1, v^2, \dots, v^M]$ و $UU^T = I_{N \times N}$ نیز یک ماتریس معتمد $N \times M$ است. یک ماتریس $VV^T = I_{M \times M}$ است که درایه‌های تمام درایه‌های صفر بجز در طول قطر اصلی آن است که درایه‌های قطری آن شامل مقادیر تکین ماتریس W ، یعنی σ_i ها، بزرگتر به کوچکتر مرتب شده‌اند. ستون‌های ماتریس U ، یعنی φ_x^i ها، مودهای POD گستته می‌باشد، که می‌توان بر اساس داده‌های آن و استفاده از روش‌های برآزش نمودار، تابع پیوسته‌ی $(x)^j \varphi$ را محاسبه نمود. ذکر این نکته ضروری است که مودهای مختلف در ماتریس U به ترتیب میزان انرژی آنها مرتب می‌شود [۲۴].

¹ Principal Component Analysis

² Karhunen-Loeve Decomposition

³ Basis functions

⁴ Snapshots

⁵ Singular Value Decomposition

$$0 \leq \frac{(W_c)_{i,i}}{\max_{a_1, \dots, a_{N_a}} (W_c)_{i,i}} \leq 1 \quad (54)$$

مشابه با محرکها، برای محاسبه مکان بهینه حسگرها،
 $i = 1, \dots, N_1$ ماتریس قطری با درایه‌های قطر اصلی زیر، بهازای تعريف می‌شود:

$$(W_o)_{i,i} = (W_o)_{i+N_1, i+N_1} = \frac{1}{4\omega_i} \sum_{j=1}^{N_s} c_{ji}^2 \quad (55)$$

درایه‌ی $(W_o)_{i,i}$ این ماتریس برابر با انرژی انتقالی از محرک‌ها به مود i تیر است، c_{ji} درایه‌ی j ماتریس C و N_s شمار حساسه‌هاست. بنابراین، اگر مقدار ویژه‌ی $(W_o)_{i,i}$ کوچک باشد، رویت مود i سخت بوده و سیستم رویت‌ناپذیر است. در این صورت شمار بیشتری حسگر برگزیده می‌شود. اکنون مسئله‌ی بهینه‌سازی را می‌توان بهصورت زیر تعريف نمود:

• مکان حسگرهای s_1, s_2, \dots, s_{N_s} را به‌گونه‌ای پیدا کنید که تابع هدف زیر بیشینه شود،

$$\begin{aligned} J_S &= \min_{i=1, \dots, N_1} \frac{\max_{s_1, \dots, s_{N_s}} (W_o)_{i,i}}{\sum_{j=1}^{N_s} c_{ji}^2} \\ &= \min_{i=1, \dots, N_1} \frac{\max_{s_1, \dots, s_{N_s}} \sum_{j=1}^{N_s} c_{ji}^2}{\sum_{j=1}^{N_s} c_{ji}^2} \end{aligned} \quad (56)$$

و به ازای $i = 1, \dots, N_1$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$0 \leq \frac{(W_o)_{i,i}}{\max_{s_1, \dots, s_{N_s}} (W_o)_{i,i}} \leq 1 \quad (57)$$

۴-۴- طراحی کنترل‌کننده‌ی کاهش مرتبه یافته

همان‌گونه که در بخش ۴ مشاهده شد، تنها در بازه‌های زمانی Δt ورودی ولتاژ محرک پیزوالکترونیک را می‌توان تغییر داد و در بین دو بازه زمانی ورودی ثابت در نظر گرفته شده است. این مسئله در اعمال ورودی به سیستم‌های دارای حلقه‌های کنترلی ناپیوسته، زمان گستته یا دیجیتال نیز قابل مشاهده است. برای نمونه، اگر ارتعاشات واقعی یک سیستم از طریق یک حلقه‌ی کنترلی دیجیتال میرا شود، حساسه‌ی دیجیتال پیزوالکترونیک در دوره‌های تناوب نمونه‌برداری خروجی را اندازه‌گیری نموده، برای کنترل‌کننده ارسال و بر آن اساس دستور مناسب کنترلی طراحی می‌شود. این دستور توسط نگهدارنده‌ی مرتبه‌ی صفر دریافت و در بازه‌ی زمانی یک تناوب نمونه‌برداری، توسط محرک پیزوالکترونیک به تیر اعمال می‌شود. آشکار است که کنترل‌کننده‌ی دیجیتال در واقع سیستم تحت کنترل را تنها در زمان‌های نمونه‌برداری می‌بیند و در بین آن از رفتار سیستم آگاهی ندارد. این مسئله، چالش‌هایی را به همراه می‌آورد که در صورت درنظر نگرفتن و عدم جردن آن‌ها در طراحی سیستم کنترلی، به کاهش کارایی و یا حتی ناپایداری سیستم تحت کنترل منجر خواهد شد.

در این پژوهش، مدل زمان گستته‌ی مناسبی از سیستم تحت کنترل برای طراحی مستقیم کنترل‌کننده‌ی گستته به کار برده می‌شود. این مدل ناپیوسته از سیستم تحت کنترل، در واقع همان مدل ناپیوسته موسوم به معادل نگهدارنده‌ی مرتبه‌ی صفر^۱ است. فرض کنید که معادلات حالت زمان‌پیوسته و کاهش مرتبه‌ی یافته‌ی سیستم

که در آن $B = \begin{bmatrix} 0_{N_1 \times 1} & I_{N_1 \times N_1} \\ M^{-1}K & 0_{N_1 \times N_1} \end{bmatrix}$ ماتریس سیستم، $A = \begin{bmatrix} 0_{N_1 \times N_1} & I_{N_1 \times N_1} \\ -M^{-1}K & 0_{N_1 \times N_1} \end{bmatrix}$ ماتریس اثر ورودی و $u = V_a(t)$ همان ورودی سیستم است. چون تنها عامل مؤثر خارجی تولیدکننده‌ی کار محرک پیزوالکترونیک در نظر گرفته شده است، تعداد ورودی‌ها با شمار محرک‌های به کار رفته است؛ پس مدل در نظر گرفته شده در این پژوهش دارای یک ورودی است. البته ذکر این نکته ضروری است که گزینش شمار محرک‌ها و حسگرها، به ترتیب، بر اساس معیارهای کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم انجام می‌شود که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. همچنان با ترکیب روابط (۳۳)، (۳۴) و (۳۸) معادله‌ی خروجی این مدل را نیز می‌توان بهصورت زیر بیان نمود:

$$Y = CX + Du \quad (47)$$

که در آن $Y = [y_1, y_2]^T$ خروجی‌های ولتاژ دو حساسه‌ی پیزوالکترونیک، $C = 0_{2 \times N_1}$ و $D = 0_{2 \times N_1}$ بهصورت زیر است:

$$C = \gamma_{ps} \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_1^2 & \dots & \theta_1^{N_1} \\ \theta_2^1 & \theta_2^2 & \dots & \theta_2^{N_1} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\gamma_{ps} = \frac{E_p^s h_{31}^s t_{eq}^s}{2\beta_{33}^s C_p^s} \quad (49)$$

$$\theta_1^j = \int_{l_3}^{l_{31}} b(x) \frac{d^2 \varphi^j(x)}{dx^2} dx \quad (50)$$

$$\theta_2^j = \int_{l_{31}}^{l_4} b(x) \frac{d^2 \varphi^j(x)}{dx^2} dx \quad (51)$$

۴-۳-۴- انتخاب بهینه‌ی مکان عملگرها و حسگرها

مکان بهینه‌ی حسگرها و محرک‌ها تأثیر زیادی بر کارایی سیستم کنترلی دارد؛ چرا که مکان‌یابی بد آن‌ها به ترتیب به از دست رفتن رویت‌پذیری و کنترل‌پذیری سیستم تحت کنترل می‌انجامد. در این تحقیق، با استفاده از روش ارائه شده به‌وسیله‌ی بورانت و همکاران [۲۰] مکان بهینه‌ی حسگرها و محرک‌ها بهصورت مستقل پیدا می‌شود. برای پیدا کردن مکان بهینه‌ی محرک‌ها که باعث کمینگی انرژی موردنیاز برای رساندن سیستم به وضعیت موردنظر می‌شود، ماتریس قطری با درایه‌های قطر اصلی زیر، بهازای $i = 1, \dots, N_1$ تعريف می‌شود:

$$(W_c)_{i,i} = (W_c)_{i+N_1, i+N_1} = \frac{1}{4\omega_i} \sum_{j=1}^{N_a} b_{ij}^2 \quad (52)$$

درایه‌ی $(W_c)_{i,i}$ این ماتریس برابر با انرژی انتقالی از محرک‌ها به مود i تیر است، b_{ij} درایه‌ی j ماتریس B و N_a شمار محرک‌های است. بنابراین، اگر مقدار ویژه‌ی $(W_c)_{i,i}$ کوچک باشد، کنترل مود i سخت بوده و سیستم کنترل‌ناپذیر است. در این صورت شمار بیشتری محرک برگزیده می‌شود. اکنون مسئله‌ی بهینه‌سازی را می‌توان بهصورت زیر تعريف نمود:

• مکان محرک‌ها a_1, a_2, \dots, a_{N_a} را به‌گونه‌ای پیدا کنید که تابع هدف زیر بیشینه شود،

$$\begin{aligned} J_A &= \min_{i=1, \dots, N_1} \frac{(W_c)_{i,i}}{\max_{a_1, \dots, a_{N_a}} (W_c)_{i,i}} \\ &= \min_{i=1, \dots, N_1} \frac{\sum_{j=1}^{N_a} b_{ij}^2}{\max_{a_1, \dots, a_{N_a}} \sum_{j=1}^{N_a} b_{ij}^2} \end{aligned} \quad (53)$$

و به ازای $i = 1, \dots, N_1$ نامساوی زیر برقرار باشد:

¹Zero-order hold equivalent

با توجه به اینکه برای سیستم‌های خطی اصل جداسازی^۳ برقرار است، اگر به صورت مستقل از هم، بهره‌های K_c و L_c به ترتیب ماتریس‌های $(A_d - L_c B_d A_d)$ و $(A_d - B_d K_c)$ را پایدار سازد، سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود.

۵- شبیه‌سازی عددی

برای شبیه‌سازی مسئله و بررسی نتایج روش پیشنهادی، از پارامترهای جدول ۱ استفاده می‌شود. همچنین بخش فلزی و سرامیک تیر مدرج تابعی به ترتیب از جنس آلمینیوم و زیرکونیوم در نظر گرفته می‌شود [۲۰]. خواص مواد پیزوالکتریک بر اساس [۲۱] گزینش شده است.

۵-۱- اعتبار سنجی حل عددی

جهت اعتبارسنجی برنامه‌ی تفاضل محدود نوشته شده، نخست پاسخ آزاد ارتعاش تیر همگن آلمینیوم با مقطع ثابت و بدون قطعات پیزوالکتریک به روش تفاضل محدود به دست آمده و بر آن اساس، سه فرکانس طبیعی اول آن محاسبه می‌شود. همچنین فرکانس‌های طبیعی این سیستم با کمک حل تحلیلی مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی دیفرانسیلی و بر اساس معادله‌ی زیر نیز قابل محاسبه است:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{(\beta_n L)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (68)$$

که $(\beta_n L)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) = -1 \quad (69)$$

در جدول ۲ مقادیر فرکانس طبیعی به دست آمده از دو روش گفته شده با هم مقایسه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که با هم همخوانی بسیار خوبی دارند.

۵-۲- محاسبه‌ی مودهای بهینه به روش POD و طراحی

کنترل کننده

در گام بعد با در نظر گرفتن تیر حلقه‌باز، یعنی بدون سیستم کنترلی، اقدام به اعمال ولتاژ تصادفی ($V'_a(x, t)$ در مدت زمان ده ثانیه می‌شود. در این مرحله با هدف به دست آوردن مودهای بهینه‌ی سیستم ارتعاشی، فرآیند مشابه با شناسایی سیستم انجام می‌شود. برای این کار، با اعمال یک ورودی تصادفی، پاسخ سیستم به دست آمده و بر اساس روش تصاویر، مودهای سیستم ارتعاشی و میزان انرژی هر کدام در تحريك مشخص می‌شود. به کارگیری روش تصاویر به محاسبه‌ی یک ماتریس \sum منجر شده و درایه‌های قطعی آن شامل مقادیر تکین ماتریس تصاویر W ، یعنی σ_i است که با مقدار ویژه‌ی مود λ_i سیستم به صورت $\sigma_i^2 = \lambda_i$ ارتباط دارد و هر چه این مقدار ویژه بزرگ‌تر باشد، نشان‌دهنده‌ی آن است که انرژی این مود بیشتر است. در قطع اصلی ماتریس \sum این مقادیر ویژه به صورت کاهنده مرتباً شده‌اند؛ پس مودهای اول آن، بیشترین انرژی را دارد. شکل ۲ توزیع مقادیر تکین را برای این سیستم نشان می‌دهد. بنابراین بیشترین انرژی مربوط به دو مود نخست است و بر آن اساس می‌توان گفت مدلی که با این دو مود (یعنی دو ستون اول ماتریس V) ساخته می‌شود،

ارتعاشی (یا همان معادلات مختصه‌های تعیین یافته) به صورت (۴۶) تشکیل شود. مدل زمان گسسته‌ی معادل نگهدارنده‌ی مرتبه‌ی صفر این سیستم به صورت زیر است:

$$X(k+1) = A_d X(k) + B_d u(k) \quad (58)$$

$$Y(k) = C_d X(k) + D_d u(k) \quad (59)$$

که در آن $C_d = C$ ، $B_d = \int_0^{T_s} e^{At} dt B$ و $A_d = e^{AT_s}$ و $D_d = D$. $T_s = \Delta t$ دوره‌ی تناوب نمونه‌برداری است [۲۵]. در اینجا، برای ساده‌سازی نوشتار، دوره‌ی تناوب نمونه‌برداری T_s از هر متغیر زمانی $t = kT_s \equiv k$ فاکتور گرفته شده و به صورت t نمایش داده می‌شود. اکنون، با فرض اینکه سیستم بالا کنترل پذیر است، کنترل کننده‌ی بازخورد حالت زیر برای پایدارسازی سیستم طراحی می‌شود:

$$u(k) = -K_c X(k) \quad (60)$$

K_c بهره‌ی کنترل کننده است و می‌توان آن را با به کارگیری روش‌های تنظیم کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی^۱ یا جایابی قطب به دست آورد. در ادامه، برای طراحی از روش نخست استفاده می‌شود، که به بهره‌ی کنترلی بهینه منجر می‌شود. این روش در رسته‌ی روش‌های کنترلی بهینه قرار دارد که در آن گزینش و محاسبه‌ی K_c با کمینه شدن یک تابع هدف به صورت زیر همراه است:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [X^T(k) Q_1 X(k) + u^T(k) Q_2 u(k)] \quad (61)$$

که $Q_1 \geq 0$ و $Q_2 > 0$ ماتریس‌های وزنی متقارن بوده و با توجه به بیشینه‌ی دستور کنترلی قابل تولید به سیله‌ی محرك و همچنین مشخصه‌های کارایی پاسخ موردنظر توسط طراح برگزیده می‌شود. بر این اساس، بهره‌ی کنترلی برابر خواهد بود:

$$K_c = [Q_2 + B_d^T S B_d]^{-1} B_d^T S A_d \quad (62)$$

در حالی که $S > 0$ از حل معادله‌ی جبری ریکاتی زیر محاسبه می‌شود:

$$S = A_d^T [S - S B_d (Q_2 + B_d^T S B_d)^{-1} B_d^T S] A_d + Q_1 \quad (63)$$

اما آشکار است که متغیرهای حالت \dot{q}_j و q_j سیستم قابل اندازه‌گیری نیوده و تنها ولتاژهایی که توسط حسگرهای پیزوالکتریک اندازه‌گیری می‌شود، به عنوان خروجی سیستم در دسترس است. برای تخمین بردار حالت ($X(k)$ ، یک رویتگر حالت جاری با دینامیک زیر در کنترل کننده جاده‌ی شده است:

$$\hat{X}(k+1) = A_d \hat{X}(k) + B_d u(k) + L_c [Y(k+1) - C_d (A_d \hat{X}(k) + B_d u(k))] \quad (64)$$

در (۶۴)، L_c بهره‌ی رویتگر است که با فرض روبرویی جفت‌های A_d و C_d به کمک روش جایابی قطب طراحی می‌شود. برای این کار، قطب‌های رویتگر در درون دایره‌ی واحد و در نزدیکی‌های مبدأ برگزیده می‌شود. بنابراین ورودی کنترلی سیستم برابر خواهد بود با:

$$u(k) = -K_c \hat{X}(k) \quad (65)$$

اکنون با تعریف خطای تخمین حالت، به صورت

$$\tilde{X}(k) = X(k) - \hat{X}(k) \quad (66)$$

معادله‌ی سیستم حلقه‌بسته را می‌توان این‌گونه نوشت:

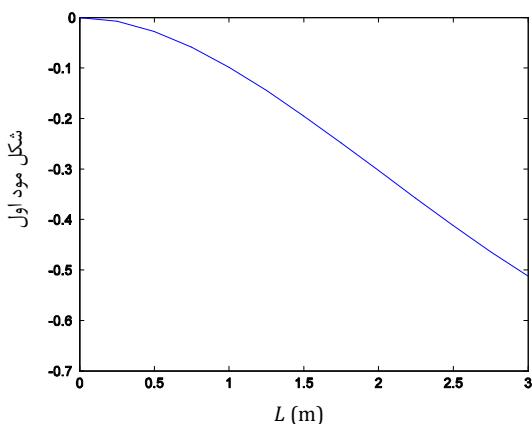
$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ \tilde{X}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d - B_d K_c & B_d K_c \\ 0_{N_1 \times N_1} & A_d - L_c B_d A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ \tilde{X}(k) \end{bmatrix} \quad (67)$$

²Separation principal

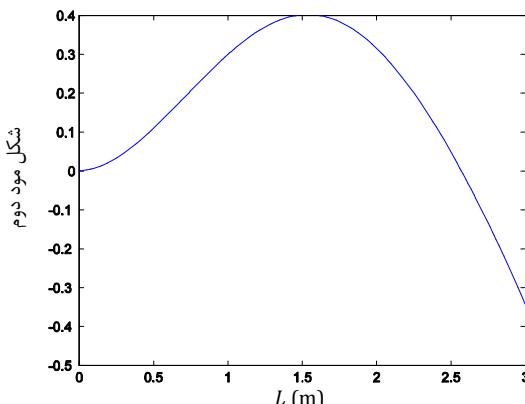
¹Linear quadratic regulator (LQR)

جدول ۲- مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش‌های تفاضل محدود و تحلیلی بر حسب رادیان بر ثانیه

فرکانس طبیعی به دست آمده از روش تحلیلی	فرکانس طبیعی به دست آمده از روش تفاضل محدود	شماره مود ارتعاشی
۱۰۳/۳۶	۱۰۳/۳۹	n=۱
۶۴۷/۷۵	۶۴۷/۳۶	n=۲
۱۸۱۳/۳۳	۱۸۱۲/۰۰	n=۳



شکل ۳- مود اول به دست آمده از روش پی-آ-دی



شکل ۴- مود دوم به دست آمده از روش پی-آ-دی

همان‌گونه که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، نوساناتی مانا با دامنه ثابت در این سیستم ایجاد می‌شود. اکنون برای نشان دادن کارایی روش کنترلی پیشنهادی بر روی این سیستم، با در نظر گرفتن دو مود به دست آمده از POD و کنترل کننده‌ی (۶۵)، بهره‌های کنترلی و روابط‌گری که به صورت زیر طراحی شده‌اند، استفاده شده و پاسخ سیستم حلقه بسته بررسی می‌شود.

$$K_c = [-38.6796 \quad 3.9886 \quad -2.3569 \quad -1.5814]$$

$$L_c = [1.9995 \quad -0.3276 \quad 98.9849 \quad -56.0406]$$

$$\quad \quad \quad 0.1319 \quad 1.4250 \quad 22.5701 \quad 0.7037]$$

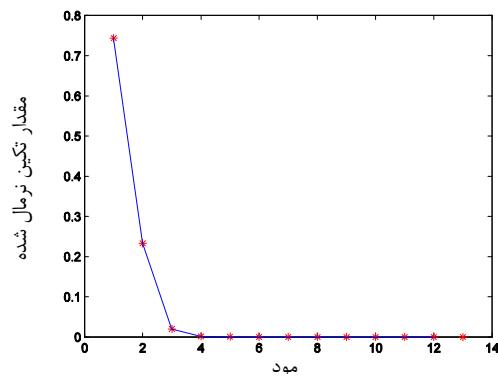
سیستم کنترلی فعال و سپس تیر از شرایط اولیه مشابه W_0 رها می‌شود. پاسخ این سیستم حلقه بسته در شکل ۶ نشان داده است. همان‌گونه که مشخص است، روش پیشنهادی با اعمال ورودی کنترلی شکل ۷ به خوبی این سیستم را پایدار می‌سازد.

بهترین تقریب مرتبه‌ی پایین از رفتار سیستم اصلی را به همراه خواهد داشت.

در شکل ۳ و شکل ۴ این دو مود مشخص شده‌اند. سپس با کمک تصویرسازی گالرکین، معادلات حالت کاوش مرتبه‌یافته‌ی سیستم به دست می‌آید. اکنون از الگوریتم گفته شده در زیربخش ۳-۵ برای گزینش محل بهینه‌ی محرك‌ها و سنسورها استفاده شده و برای آن بهره‌ی بازخوردی K_c و همچنین رؤیت‌گر حالت جاری با دینامیک (۶۴) طراحی می‌شود.

۳-۵- کنترل تیر موردنظر

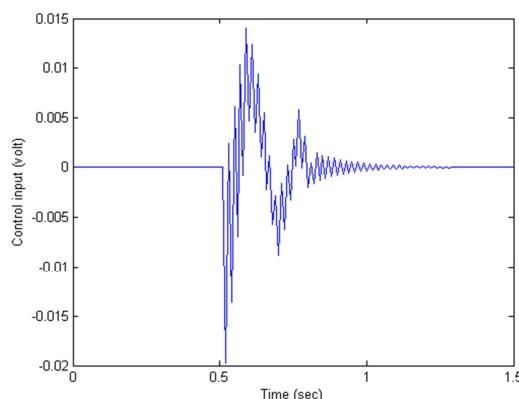
نخست محرك پیزوالکتریک قرار گرفته بر تیر مورد نظر را به صورت حلقه‌باز تحت اثر یک ولتاژ ورودی قرار داده تا شروع به نوسان کند. در لحظه‌ی $t_0 = 0.5 \text{ sec}$ ، این ولتاژ خارجی را برداشته و نوسانات آزاد تیر تحت اثر جابجایی در لحظه‌ی t_0 ، به عنوان شرایط اولیه‌ی غیر صفر W_0 بررسی می‌شود.



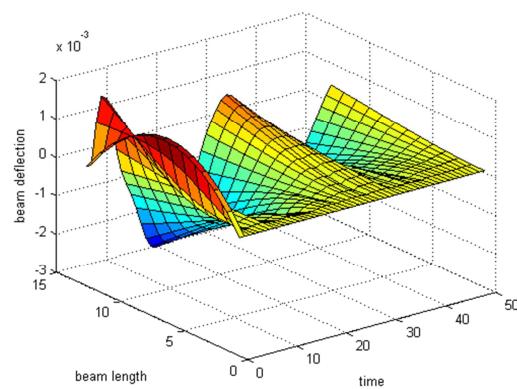
شکل ۲- توزیع نقاط تکین پس از پیاده سازی روش تصاویر

جدول ۱- مشخصات هندسی و خواص مواد تیر مساله

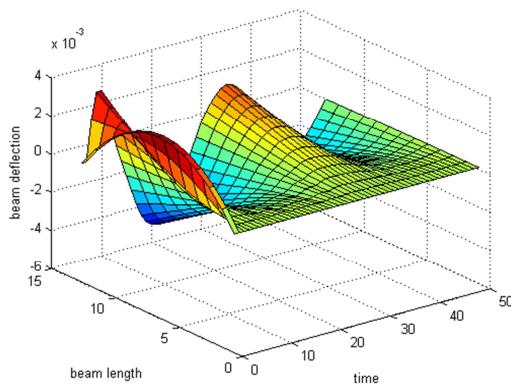
واحد	مقدار	ثابت
m	۰/۶۲	L
m	۰/۰۰۱۷۸	t_b
m	۰/۰۰۱	t_p
Kg/m³	۷۶۵۰	ρ_p
Kg/m³	۳۰۰۰	ρ_c
Kg/m³	۱۸۶۵	ρ_m
Gpa	۶۳	C_p^a
Gpa	۱۵۰	C_c
Gpa	۲۴/۶۴	C_m
v/m	-۴۸۰۰۰۰۰	h_{31}^a
m/F	۶۶۶۰۰۰۰	β_{31}^a
m	۰/۰۵	l_1
m	۰/۱	l_2
m	۰/۰۵	l_3
m	۰/۱	l_4
sec	۰/۰۱	Δt
m	۰/۰۵	Δx
m	۰/۱۶	b



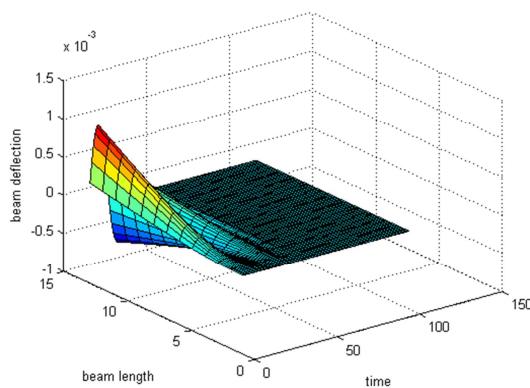
شکل ۷- ورودی کنترلی اعمال شده به محرک پیزوالکترونیک
تیر مدرج تابعی



شکل ۵- پاسخ سیستم حلقه‌باز به شرایط اولیه‌ی ایجاد شده در
 $t_0 = 0.5 \text{ sec}$



شکل ۸- پاسخ سیستم حلقه‌باز تیر همگن به شرایط اولیه‌ی غیرصفر



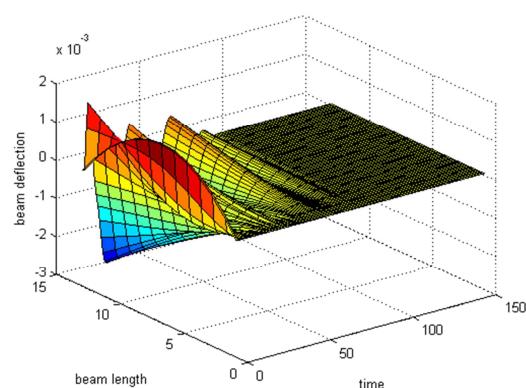
شکل ۹- پاسخ تیر حلقه‌بسته به شرایط اولیه‌ی غیر صفر

۴-۴- اعتبار سنجی روش کنترلی
اعتبارسنجی روش کنترلی پیشنهادی، برای یک تیر آلومینیومی و همگن با ابعاد هندسی و مکانیکی [۳] صورت می‌پذیرد. ابعاد مورد نظر در جدول ۱ ارائه شده است. در این راستا، فرض می‌شود که تیر تحت شرایط اولیه‌ی غیرصفری قرار گیرد و پاسخ آن بررسی شود. همان‌گونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، در حالتی که کنترل کننده غیرفعال است، نوساناتی با دامنه‌ی مانا در تیر ایجاد می‌شود. کیو و همکاران [۳] کنترل کننده‌ای طراحی کردند که با زمان نشست ۴ ثانیه نوسانات پاسخ را از بین برد. در ادامه و برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، روند پیشنهاد شده در مثال بالا تکرار شده، از کنترل کننده‌ی (۶۵) و پهله‌های کنترلی و روبت‌گری که به صورت زیر طراحی شده‌اند، استفاده شده و پاسخ سیستم حلقه‌بسته بررسی می‌شود.

$$K_c = [-7.9538, -139.9163, 0.9894, -2.2567]$$

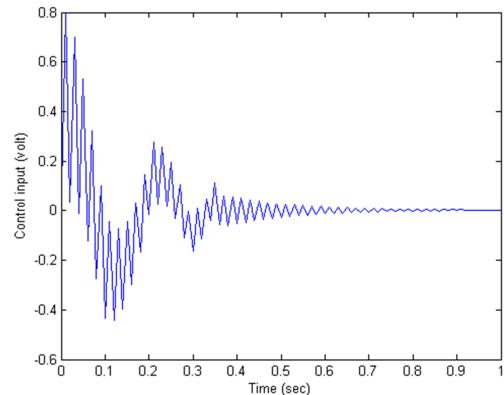
$$L_c = [1.9641, 0.1101, 92.8542, 20.4186]$$

همان‌گونه که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، با اعمال ورودی کنترلی با تاریخچه‌ی شکل ۱۰، نوسانات سیستم در یک ثانیه از بین می‌رود.



شکل ۶- پاسخ سیستم حلقه‌بسته به شرایط اولیه‌ی ایجاد
شده در $t_0 = 0.5 \text{ sec}$

- [9] Garcia-Sanz M., Huarte A., Asenjo A., A quantitative robust control approach for distributed parameter systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 17, pp. 135-153, 2007.
- [10] Khaled A., Alhazza A., Nayfe A., Daqaq M. F., Non-linear vibrations of parametrically excited cantilever beams subjected to non-linear delayed-feedback control, *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 43, pp. 801-812, 2008.
- [11] Qinglei H., Lihua X. , Adaptive variable structure and active vibration reduction for flexible spacecraft under input nonlinearity, *Journal of Vibration and Control*, vol. 13, pp. 1573-1602, 2007.
- [12] Xue X. and Tang J., Vibration control of nonlinear rotating beam using piezoelectric actuator and sliding mode approach, *Journal of Vibration and Control*, vol. 14, pp. 885, 2008.
- [13] Vasques C. and Dias Rodrigues J., Active vibration control of smart piezoelectric beams: Comparison of classical and optimal feedback control strategies, *Computers & Structures*, vol. 84, pp. 1402-1414, 2006.
- [14] Zabihollah A., Sedaghati R., Ganesan R., Active vibration control of a smart beam through piezoelectric actuation and laser vibrometer sensing: simulation, design and experimental implementation, *Smart Materials and Structures*, vol. 16, No. 6, 2007.
- [15] Kapuria S., YaqoobYasin M., Active vibration control of piezoelectric laminated beams with electroded actuators and sensors using an efficient finite element involving an electric node, *Smart Materials and Structures*, vol. 19, No. 4, 2010.
- [16] Z. C. Qiu, J. D. Han, X. M. Zhang, Y. C. Wang, Z. w. Wu, Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, pp. 438–455, 2009.
- [17] Librescu L., Oh S.Y., Song O., Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment, vibration and instability, *Journal of Thermal Stresses*, pp. 694–712, 2005.
- [18] Fazelzadeh S., Malekzadeh P., Zahedinejad P., Hosseini M., Vibration analysis of functionally graded thin-walled rotating blades under high temperature supersonic flow using the differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 306, pp. 333-348, 2007.
- [19] Gharib A., Salehi M., Fazeli S., Deflection control of functionally graded material beams with bonded piezoelectric sensors and actuators, *Materials Science and Engineering*, Vol. 498, pp. 110–114. 2010
- [20] Bruant I., Prostlier L., Improved active control of a functionally graded material beam with piezoelectric patches, *Journal of Vibration and Control*, 2013.
- [21] Jalili N., Piezoelectric-Based Vibration Control, pp. 180-215, Springer, 2010.
- [22] Emdad H., Mostofizadeh A. R., Mousavina S. A., Optimal control of vortex shedding around square cylinder via reduced order model, *Modares Mechanical Engineering*, pp. 53-55, 1391.(In Persian)
- [23] sirovich L., Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures. Part 1: Coherent Structures, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 45, pp. 524-529, 1987.
- [24] Holme P.s, Lumley J.L., Berkooz G., Rewley C.W., *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical System and Symmetry*, second Edition, USA, Cambridge, 2012.



شکل ۱۰- ورودی کنترلی اعمال شده به محرک پیزوالکتریک تیر همگن

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای کنترل بهینه ارتعاشات تیر با سطح مقطع متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی پیشنهاد شد. در این روش، ابتدا مدل بهینه و کاهش مرتبه یافته‌ای سیستم به کمک روش POD استخراج شد. سپس از کنترل کننده دیجیتال بازخوردی مبتنی بر رؤیتگر برای پایدارسازی سیستم استفاده شد. برای نشان دادن کارایی روش کنترلی پیشنهادی، از دو مود به دست آمده از روش POD و بهره‌های کنترلی و رویتگر طراحی شده، استفاده شده و نشان داده شد که ورودی کنترلی به خوبی این سیستم را پایدار می‌سازد. در پایان برای تیر آلومنیومی و همگن، روش کنترلی پیشنهادی با روش کیو و همکاران (Qui et al) مقایسه شد و کارایی روش کنترلی پیشنهادی نشان داده شد.

۷- مراجع

- [1] Ming-Hung H., Dynamic behaviour of wind turbine blades, *Journal of Mechanical Engineering Sciene*, pp. 1453-1464, 2008.
- [2] Fazelzadeh S., Hosseini M., Aerothermoelastic behavior of supersonic rotating thin-walled beams made of functionally graded materials, *Journal of Fluids and Structures*, vol. 3, pp. 1251-1264, 2007.
- [3] Qiu Z. C., Han J., Zhang Y. m., Wang X. W., Wu Z. W., Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, pp. 438-455, 2009.
- [4] Radhakan P., Faruque A., An account of chronological developments in control of distributed parameter systems, *Annual Reviews in Control*, vol. 33, pp. 59-68, 2009.
- [5] Christofides P.D., Daoutidis P., Finite-dimensional control of parabolic PDE systems using approximate inertial manifolds, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 216, pp. 398-420, 1997.
- [6] Christofides P.D., Nonlinear and robust control of PDE system, methods and applications to transport-reaction processes, Sprinrger, 2001.
- [7] M. Kim, H. Erzberger, On the design of optimum distributed parameter system with boundary control function, *IEEE conference on automatic control*, 1967.
- [8] Dadfarnia M., Jalili N., An observer-based piezoelectric control of flexible Cartesian robot arms, theory and experiment, *Control Engineering Practice*, vol. 12, pp. 1041-1053, 2004.