

بررسی تحلیلی تغییرات دمایی در جریان جابجایی اجباری در یک بستر متخلخل با در نظر گرفتن اتلاف لزجتی

اسداله کریمی
 رضا علیزاده*
 هادی سلطانی

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه صنعتی سهند، سهند، ایران
 دانشیار، دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه صنعتی سهند، سهند، ایران
 دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه صنعتی سهند، سهند، ایران

چکیده

در این مقاله، مطالعه تحلیلی تغییرات دمایی سیالی که در یک بستر متخلخل استوانه‌ای (لوله‌ای) همگن و در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته جریان دارد انجام شده است، در حالتیکه دیواره لوله از بیرون تحت تأثیر شار گرمایی (مثبت یا منفی) ثابت است. با بکار بردن مدل ریاضی، با استفاده از معادلات پیوستگی، ممتنم و انرژی در شرایط پایا که در آن جمله گرمای اصطکاکی حاصل از اتلاف لزجت در نظر گرفته شده است، با فرض اینکه صرفاً در جهت محوری حرکت سیال داشته، حل تحلیلی برای توزیع سرعت، دما و عدد بی بعد ناسلت (Nu) بر حسب عدد بی بعد داری (Da) (که نشان دهنده اثر نسبی تراوش پذیری متوسط به سطح مقطع آن، که معمولاً مجذور قطر است) و عدد بی بعد برینکمن اصلاح شده (Br_c^*) (که نشان دهنده انتقال گرما به طریق رسانش به سیال اطراف با لزجت معلوم است) به دست آمد. توزیع سرعت، برای اعداد داری کوچکتر در نواحی مرکزی داخل لوله به صورت یکنواخت بوده در حالیکه در نواحی نزدیک دیواره دارای شیب تندی است. با بررسی تأثیرات این پارامترها بر روی عدد بی بعد ناسلت، مشاهده شد در برینکمن‌های خاصی (که با Br_c^* نشان داده شده) با تغییر عدد بی بعد داری علامت عدد بی بعد ناسلت نیز تغییر می‌کرد. با بکار بردن روش‌های برازش منحنی، تابعیت Br_c^* با عدد بی بعد داری با دقت خوبی به دست آمد.

واژه‌های کلیدی: اتلاف ویسکوزیته، جابجایی اجباری، بستر متخلخل لوله‌ای، عدد برینکمن اصلاح شده.

Analytical Investigation of Temperature Variation by the Forced Convection in a Porous Bed with Consideration of Viscous Dissipation

A. Karimi Ph.D student, Chemical Engineering Faculty, Sahand University of Technology, Sahand, Iran
R. Alizadeh Associate Professor, Chemical Engineering Faculty, Sahand University of Technology, Sahand, Iran
H. Soltani Ph.D student, Chemical Engineering Faculty, Sahand University of Technology, Sahand, Iran

Abstract

In this paper, an analytical study has been carried out in homogeneous porous media and in the fully developed pipe flow, as constant heat flux tube wall from outside influences. Using a mathematical model, the equations of continuity, momentum, and energy dissipation due to viscous friction intended heat of the semester in which it is, Analytical solution for the profile of velocity, temperature and Nusselt number (Nu) obtained versus dimensionless Darcy numbers (Da) (represents the relative effect of the permeability of the medium versus its cross-sectional area commonly the diameter squared) and Brinkman (Br_c^*) which is a dimensionless number related to heat conduction from a wall to a flowing viscous fluid. The profile of velocity, for smaller Darcy numbers uniformly in the central region of the tube, whereas in the area near the wall has sharp slope. The effect of these parameters was observed on the Nusselt number in certain Brinkman (as shown by Br_c^*) and also Darcy can be changed with the Nusselt number. Using curve fitting techniques, function of Br_c^* was obtained Darcy number with good accuracy.

Keyword: Viscous dissipation, Forced convection, Porous media and modified Brinkman.

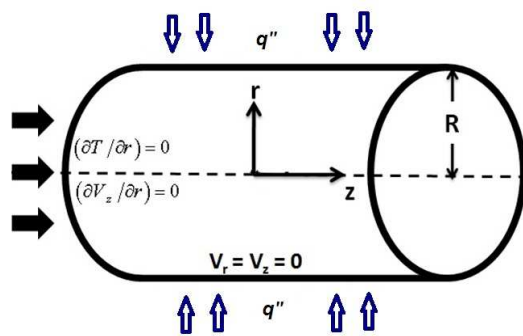
۱- مقدمه

امروزه در بیشتر بخش‌های صنعتی، انتقال گرما و سیالات در محیط‌های متخلخل دارای کاربردهای متنوعی بوده، و استفاده از این نوع سیستم‌ها در عرصه‌های فناوری روز به روز افزایش می‌یابد. از جمله صنایع تأثیرگذار در استفاده از محیط‌های متخلخل، می‌توان به خنک کردن میکرو کانال‌ها در صنایع الکترونیک، راکتورهای هسته‌ای و راکتورهای کاتالیستی اشاره کرد [۱]. در چند سال اخیر، اهمیت استفاده از این نوع محیط‌ها بسیار مورد توجه قرار گرفته است و همین امر باعث شده که، مطالعات تحلیلی زیادی در این زمینه انجام گیرد. در بیشتر تحقیقات گذشته که تاکنون انجام گردیده است، عموماً از جمله اتلاف لزجی صرف‌نظر شده است [۲ و ۳]. نادیده گرفتن این جمله در معادلات انرژی می‌تواند خطاهایی زیادی را در محاسبات بوجود آورد. اثرات جمله اتلاف لزجی را در جابجایی اجباری را می‌توان در کار نیلد و همکاران مشاهده کرد [۴]. اتلاف لزجی باعث افزایش دمای سیال شده، که این پارامتر در سرعت‌های زیاد سیال، سیالات با لزجی بالا [۵]، سیالاتی که داخل لوله‌هایی با نسبت طول به عرض زیاد جریان دارند و جریان‌های داخل میکرو کانال‌ها اهمیت فوق العاده‌ی دارد [۶]. مطالعات اندکی روی اینگونه جریان‌ها که، جمله اتلاف لزجی را نیز در نظر بگیرند، وجود دارد. نیلد و همکاران جمله اتلاف لزجی را برای دو صفحه موازی، در ناحیه توسعه یافته با شرط مرزی دما ثابت در نظر گرفتند [۷]. آنها عدد بی بعد ناسلت و دیگر اعداد بدون بعد را نظیر پکلت، دارسی و برینکمن مورد ارزیابی قرار دادند. در مطالعه‌ای دیگر بیو و همکاران جمله اتلاف لزجی را برای دو صفحه موازی برای شرط مرزی شار ثابت در نظر گرفته و تغییرات عدد ناسلت را مورد تحلیل قرار دادند. رنجبر و همکاران با در نظر گرفتن جمله اتلاف لزجی در دو صفحه موازی به صورت عددی معادلات حاکم را مورد مطالعه قرار دادند [۸]. در این مطالعه سعی شده است، تغییرات دمایی، در یک بستر متخلخل استوانه‌ای (لوله‌ای) همگن در ناحیه کاملاً توسعه یافته که جمله اتلاف لزجی نیز در معادله انرژی مربوط به آن لحاظ شده است، مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد. سپس عدد ناسلت به عنوان تابعی از عدد دارسی و برینکمن مورد بررسی قرار گرفته، و نهایتاً با بکار بردن روش‌های برازش منحنی، تابعیتی برای عدد برینکمن بحرانی که در آن علامت عدد ناسلت تغییر پیدا می‌کند، به دست آید. با استفاده از نتایج چنین مواردی می‌توان، در مورد پدیده‌های واقعی‌تر، اقدامات منطقی و درستی را جهت بهبود کارکرد سیستم‌هایی که در آنها از بسترهای متخلخل استفاده می‌شود از لحاظ ملاحظات گرمایی و سیالاتی در نظر گرفت.

رنجبر و همکاران با در نظر گرفتن جمله اتلاف لزجی در دو صفحه موازی به صورت عددی معادلات حاکم را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۸]. در سال‌های اخیر مطالعاتی درباره انتقال گرمای همرفتی در مواد ناهمسانگرد انجام گرفته شده که می‌توان به، بررسی اثرات نفوذپذیری ناهمسانگرد انتقال گرمای همرفتی توسط یووگن و دگان که بر روی بستر متخلخل رودخانه‌ای که به‌صورت لایه سیالی که در زیر قرار گرفته است [۹] و بررسی انتقال گرمای همرفتی ناهمسانگرد در مواد ریز شبکه‌ای توسط روپر و همکاران [۱۰] اشاره کرد. در این پروژه سعی بر این است که، تغییرات دمایی در یک بستر متخلخل همگن که جمله اتلاف لزجی نیز لحاظ شده، مورد تجزیه و تحلیل قرار بگیرد. عموماً پژوهش‌هایی که در این زمینه انجام گرفته شده است در سیستم‌های دکارتی بوده است و مطالعات کمی بر روی سیستم‌های استوانه‌ای که جمله اتلاف لزجی را نیز لحاظ کرده باشد وجود دارد. در نهایت عدد ناسلت به عنوان تابعی از عدد دارسی و برینکمن مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات ریاضی

در این بخش هدف به دست آوردن معادلات حاکم بر بسترهای متخلخل استوانه‌ای (لوله‌ای) می‌باشد. همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است، یک بستر متخلخل همسانگرد با شعاع R و شار گرمایی ثابت q'' در نظر گرفته شده است که سیال از داخل آن عبور می‌کند. دیواره‌ها نفوذ ناپذیر بوده و شرایط عملیاتی پایا می‌باشد. با فرض اینکه سیال صرفاً در جهت طولی دارای سرعت V_z بوده و ناحیه در نظر گرفته شده کاملاً توسعه یافته باشد و هیچ تغییر فازی در سیستم رخ ندهد، معادله برینکمن مومنوم برای جهت محوری به صورت زیر خواهد بود [۱۱ و ۱۲].



شکل ۱- بستر متخلخل همسانگرد با شار حرارتی ثابت

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_f} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right) \right) - \frac{1}{K} \times V_z - \frac{1}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho C_p V_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + \Phi \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{q''}{k}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

شرایط مرزی حاکم بر این معادله ناشی از شرط تقارن محوری و شار گرمایی ثابت اعمال شده به دیواره استوانه افقی می‌باشد. در معادله (۸) دمای تعادلی برای جسم جامد و فاز سیال محیط متخلخل، C_p ظرفیت گرمایی ویژه سیال، k رسانایی گرمایی موثر محیط متخلخل، q'' شار گرمایی ثابت در دیواره، که علامت مثبت برای گرم کردن و علامت منفی آن برای سرد کردن دیواره استفاده می‌شود و Φ جمله اتلاف لزجتی است. در ناحیه کاملاً توسعه یافته با در نظر گرفتن شار گرمایی ثابت و فرض اینکه عدد پکلت^۱ به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توان از جمله رسانش در جهت طولی صرفنظر کرد [۱۳]. جریان سیال داخل محیط متخلخل به صورت تراکم ناپذیر فرض شده است. کار جریانی باعث افزایش گرما می‌شود ولی با توجه به این موضوع که در مقابل گرمای ایجاد شده توسط جمله اتلاف لزجتی قابل صرفنظر کردن است، از معادله انرژی حذف می‌شود [۷]. مدل‌های مختلفی برای آنالیز تأثیر اتلاف لزجتی استفاده شده است، که بطور اساسی این جمله گرمای داخلی درون محیط متخلخل و گرمای اصطکاکی دیواره را دربر می‌گیرد. در این مطالعه اتلاف لزجتی براساس معادله‌ای که الهادرمی^۲ و همکاران پیشنهاد کرده‌اند [۱۴]، نوشته شده است که در معادله (۹) اتلاف لزجتی هر دو جمله گرمای داخلی درون محیط متخلخل و گرمای اصطکاکی دیواره را شامل می‌شود. بنابراین جمله اتلاف لزجتی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Phi = \mu_{eff} \left(\frac{dV_z}{dr} \right)^2 + \frac{\mu_f}{K} V_z^2 \quad (9)$$

با جایگذاری معادله (۹) در معادله (۸) و انتگرال‌گیری از مرکز تا دیواره لوله خواهیم داشت:

$$\rho C_p \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r V_z T dr = \int_0^R k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) dr + \int_0^R \mu_{eff} \left(\frac{dV_z}{dr} \right)^2 dr + \int_0^R \frac{\mu_f}{K} V_z^2 dr \quad (10)$$

برای سمت چپ تساوی معادله (۱۰) از تعریف دمای متوسط خواهیم داشت:

که در معادله فوق μ_{eff} لزجتی موثر سطح متخلخل، μ_f لزجتی سیال و K ضریب نفوذ پذیری می‌باشد. پس از ساده سازی و استفاده از اعداد بی‌بعد که در معادله (۲) آورده شده است. معادله (۱) را می‌توان به صورت معادله (۳) نشان داد.

$$\gamma = -\frac{1}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad M = \frac{\mu_{eff}}{\mu_f} \quad (2)$$

$$\frac{M}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_z}{dr} \right) - \frac{1}{K} V_z + \gamma = 0 \quad (3)$$

$$V_z (r=R) = 0, \quad \frac{dV_z}{dr} = 0 (r=0)$$

معادله (۳) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن بوده که جواب عمومی آن به صورت معادلات بسل به دست خواهد آمد. شرایط مرزی اول و دوم به ترتیب با فرض شرط عدم لغزش سیال در دیواره و شرایط تقارن محوری حاکم بر مدل حاصل شده است. با توجه به شرایط مرزی معادله توزیع سرعت در جهت محوری z به صورت زیر خواهد بود:

$$V_z(r) = \gamma K \left[1 - \frac{I_0 \left(\alpha \frac{r}{R} \right)}{I_0(\alpha)} \right] \quad (4)$$

در این معادله α فاکتور شکل محیط متخلخل و Da عدد بدون بعد داری بوده که در معادله (۵) تعریف شده‌اند.

$$Da = \frac{K}{R^2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{MDa}} \quad (5)$$

بنابراین سرعت متوسط سیال در یک سیستم استوانه‌ای به صورت معادله (۶) قابل محاسبه خواهد بود:

$$\overline{V_z} = \frac{\int_0^1 r^* V_z dr^*}{\int_0^1 r^* dr^*} = \frac{\gamma R^2}{M \alpha^2} \left[1 - \frac{2I_1(\alpha)}{\alpha I_0(\alpha)} \right] \quad (6)$$

که در آن $r^* = r/R$ می‌باشد. در نهایت توزیع سرعت بی‌بعد نرمالایز شده که تابعی از عدد بدون بعد α می‌باشد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V^*(r^*) = \frac{V_z(r^*)}{\overline{V_z}} = \frac{\alpha [I_0(\alpha) - I_0(\alpha r^*)]}{[\alpha I_0(\alpha) - 2I_1(\alpha)]} \quad (7)$$

با فرض اینکه سیستم همگن بوده و تعادل گرمایی وجود دارد و با فرض ثابت بودن پارامترهای فیزیکی سیال، معادله انرژی برای سیستم استوانه‌ای به صورت معادله (۸) خواهد بود [۱۲ و ۱۱].

¹ Peclet Number

² A.K. Al-Hadhrani et al.

شرایط مرزی حاکم بر این معادله نیز به صورت معادله (۱۶) می‌باشد:

$$T^*(r^*=1) = 0, \quad \left. \frac{dT^*}{dr^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (16)$$

این شرایط مرزی با استفاده از شرایط مرزی تعریف شده در معادله (۸) و در نظر گرفتن عبارات بی‌بعد تعریف شده در معادله (۱۴) حاصل شده‌اند. معادله (۱۵) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن می‌باشد. با دو بار انتگرال‌گیری از این معادله و استفاده از شرایط مرزی موجود در معادله (۱۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^*(r^*) = & b_1 r^{*2} + \\ & b_2 \left[I_1(\alpha r^*)^2 - \right] r^{*2} + \\ & b_3 \left[I_1(\alpha r^*) I_0(\alpha r^*) \right] r^* + \\ & b_4 I_0(\alpha r^*)^2 + b_5 I_0(\alpha r^*) + b_6 \end{aligned} \quad (17)$$

که ثوابت b_1 تا b_6 به ترتیب در زیر آورده شده‌اند:

$$b_1 = \frac{\alpha \tau(\alpha)}{8W} - \frac{Br^* \alpha^2}{16DaW^2} \quad (18)$$

$$b_2 = \frac{Br^* \alpha^2 (1 - Da.M \alpha^2)}{8DaW^2 I_0(\alpha)^2} \quad (19)$$

$$b_3 = \frac{Br^* \alpha (1 - Da.M \alpha^2)}{8DaW^2 I_0(\alpha)^2} \quad (20)$$

$$b_4 = \frac{-M Br^* \alpha^2}{8W^2 I_0(\alpha)^2} \quad (21)$$

$$b_5 = \frac{\alpha Br^* - DaW \cdot \tau(\alpha)}{2Da \cdot \alpha W^2 I_0(\alpha)} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} b_6 = & \frac{\tau(\alpha)(4 - \alpha^2)}{8\alpha W} + \\ & \frac{Br^*}{8W^2} \left[\frac{M(\alpha^4(\lambda^2 - 1) + \alpha^2(\alpha\lambda + 1))}{2Da} \right. \\ & \left. - \frac{8 - \alpha^2(3 - 2\lambda^2) + 2\alpha\lambda}{2Da} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

که در این معادلات $\tau(\alpha)$ و W توابعی از α هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\int_0^R r V_z T dr = \int_0^R r V_z T dr = \int_0^R r V_z dr = \quad (11)$$

$$= \bar{T} \int_0^R r V_z dr = \bar{T} \int_0^R r dr = \bar{T} V_z \frac{2}{R^2}$$

برای جریان کاملاً توسعه یافته حرارتی، گرادیان دما در امتداد جهت محوری z مستقل از جهت عرضی r می‌باشد [۱۳]. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d\bar{T}}{dz} \quad (12)$$

پس از جایگذاری شرایط مرزی گرمایی و انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۱۰) و استفاده از رابطه دمای میانگین سیستم استوانه‌ای که در معادله (۱۱) تعریف شد، خواهیم داشت:

$$\rho C_p V_z \frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{2}{V_z} \frac{V_z}{R^2} \left(Rq'' + \frac{\alpha \mu_{eff} K^2 \gamma^2}{2} (\alpha(\lambda)^2 - \alpha + 2(\lambda)) + \frac{K \mu_f R^2 \gamma^2}{2} \left(2 - (\lambda)^2 - \frac{4}{\alpha}(\lambda) \right) \right) \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)}$$

عبارت سمت راست معادله (۱۳) با توجه به معادله (۱۲) با عبارت سمت راست معادله (۸) برابر است. با مساوی قرار دادن این دو عبارت و تعریف عبارات و پارامترهای بی‌بعد جهت حل بهتر مسئله خواهیم داشت:

$$T^* = \frac{k(T - T_w)}{Rq''}, \quad Br^* = \frac{\mu_f V_z^2}{Rq''} \quad (14)$$

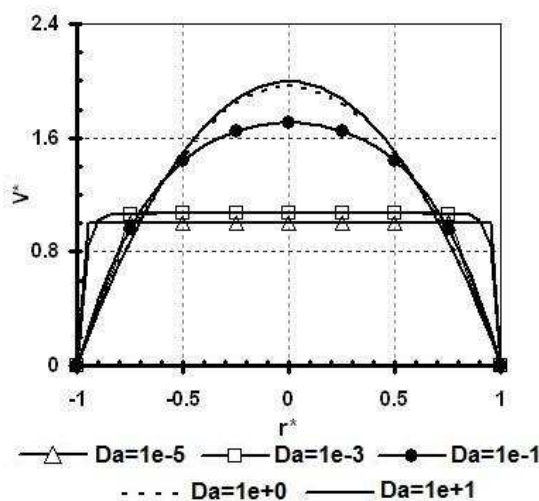
و در نتیجه معادله دیفرانسیل مربوط به معادله انرژی به صورت معادله (۱۵) در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dT^*}{dr^*} \right) = & \left[2 + \frac{\psi(\alpha)}{Da} Br^* + M \phi(\alpha) Br^* \right] r^* V_z^* - \\ & \left[\frac{Br^*}{Da} r^* (V_z^*)^2 + M \cdot Br^* \cdot r^* \left(\frac{dV_z^*}{dr^*} \right)^2 \right] r^* \end{aligned} \quad (15)$$

$$\phi(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\eta} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\alpha} \lambda - 1 \right),$$

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{\eta} \left(2 - \lambda^2 + \frac{4}{\alpha} \lambda \right)$$

در نظر گرفته شده است. بنابراین برای مقایسه نتایج حاصله با مراجع در این مقاله نیز مقدار M یک در نظر گرفته شد. شکل (۲) تغییرات سرعت نرمالایز شده در اعداد دارسی مختلف را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل (۲) مشخص است سرعت در دیواره‌ها صفر بوده و در مرکز لوله به بیشترین مقدار خود می‌رسد. این رفتار مطابق با شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای به دست آوردن معادله سرعت حاکم بر مدل می‌باشد. علاوه بر این مقدار بیشینه سرعت نرمالایز شده در مرکز لوله با افزایش عدد دارسی، و نزدیک شدن به سیال نیوتنی، افزایش می‌یابد. علت این رفتار با توجه به تعریف عدد دارسی مشخص است. با افزایش عدد دارسی، در حقیقت نفوذپذیری در جهت جریان افزایش یافته در نتیجه با افزایش عدد دارسی مقدار سرعت نرمالایز در جهت جریان افزایش خواهد یافت. پروفایل سرعت نرمالایز شده برای دارسی‌های کوچکتر در نواحی مرکزی داخل لوله به صورت یکنواخت بوده در حالیکه در نواحی نزدیک دیواره، شیب تندی به خصوص برای $Da = 1e-5$, $1e-3$ مشاهده خواهد شد. این پدیده با توجه به تعریف جمله اتلاف لزجتی، باعث بیشتر شدن اهمیت جمله اتلاف لزجتی در این نواحی و در این اعداد دارسی خواهد شد.



شکل ۲- نحوه تغییرات سرعت نرمالایز شده در دارسی‌های مختلف

شکل (۳) نمودار دمای بی‌بعد با شعاع بی‌بعد را برای اعداد برینکمن -1 ، 0 ، و 1 برای بازه‌ای از اعداد دارسی نشان می‌دهد. نمودارهای موجود در این شکل با توجه به تعریف دمای بی‌بعد (معادله (۱۴))، به نوعی اختلاف دمای بین سیال داخل محیط متخلخل و دیواره نفوذ ناپذیر را نمایش می‌دهند. بطور معمول در فرآیندهای گرمایش و سرمایش مرسوم در کانال‌های غیر

$$\tau(\alpha) = \left[2 + \frac{\psi(\alpha)}{Da} Br^* + M \phi(\alpha) Br^* \right], \quad (24)$$

$$W = \left(\frac{\alpha - \lambda}{2} \right)$$

همانطور که در معادله نیز می‌توان ملاحظه کرد، دمای بی‌بعد به دست آمده وابسته به سه پارامتر بی‌بعد عدد برینکمن، عدد دارسی و فاکتور شکل محیط متخلخل است. ضریب انتقال گرمای جابجایی از رابطه (۲۴) قابل محاسبه است که در این رابطه تمامی جملات از قبل مشخص شده است.

$$h = - \frac{k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R}}{T - T_w} = - \frac{k \frac{q''}{k}}{T - T_w} = - \frac{q''}{T - T_w} \quad (25)$$

نهایتاً از معادله فوق می‌توان استفاده کرد و عدد بی‌بعد ناسلت را برای یک بستر متخلخل استوانه‌ای (لوله‌ای) شار ثابت که دارای چشمه گرمایی است، به دست آورد.

$$Nu = \frac{h(2R)}{k} \quad (26)$$

$$Nu = \frac{-2}{T^*} = - \left[\frac{a_1 + a_2 I_1(\alpha) + a_3 I_1(\alpha) I_0(\alpha) + a_4 I_0(\alpha)^2 + a_5 I_1(\alpha)^2}{a_3 I_1(\alpha) I_0(\alpha) + a_4 I_0(\alpha)^2 + a_5 I_1(\alpha)^2} \right]^{-1} \quad (27)$$

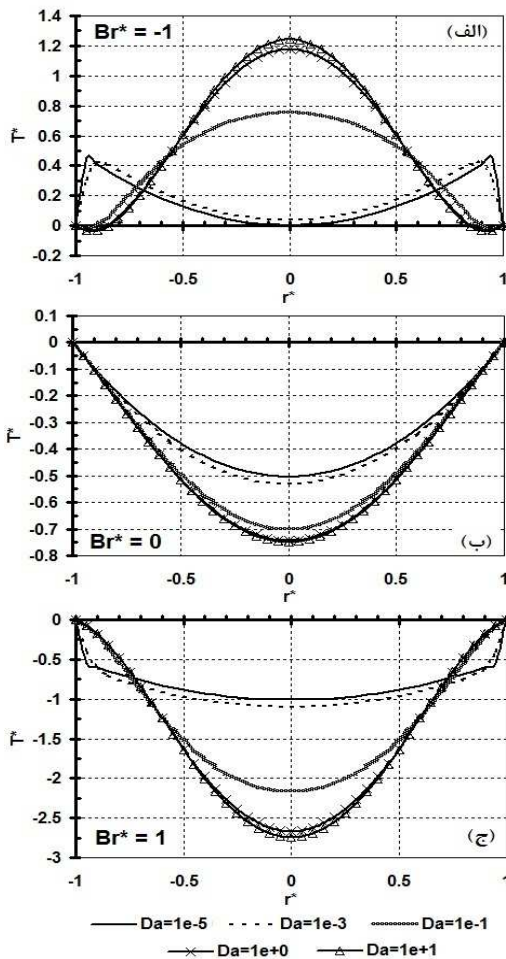
که در آن T^* دمای متوسط بی‌بعد بوده و ضرایب a_1 تا a_5 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b_1}{4} + \frac{b_6}{2}, \quad a_2 = \frac{b_5}{\alpha}, \quad a_3 = \frac{b_2}{3\alpha} \\ a_4 &= \frac{b_4}{2} - \alpha a_3, \\ a_5 &= \frac{b_3 - \alpha b_4}{2\alpha} + \frac{b_2(\alpha^2 - 1)}{3\alpha^2} \end{aligned} \quad (28)$$

همانطور که معادله (۲۶) گویا است تغییرات عدد ناسلت در یک لوله استوانه‌ای متخلخل نیز تابعی از گروه‌هایی بدون بعد برینکمن و عدد دارسی می‌باشد.

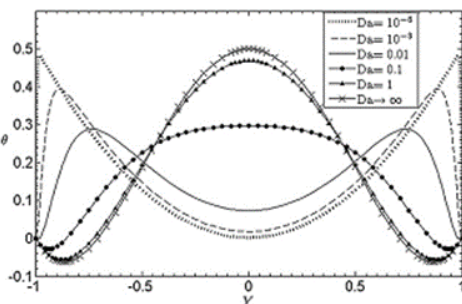
۳- نتایج و بحث

در این قسمت به تحلیل نمودارهای سرعت نرمالایز شده بی‌بعد، دمای بی‌بعد و عدد ناسلت با تغییر متغیرهای چون عدد برینکمن و عدد دارسی پرداخته شده است. هر چند پارامتر بی‌بعد لزجتی M رابطه معکوسی با میزان تخلخل داشته [۱۵] اما در اکثر مراجع مانند [۱] و [۳] مقدار M برابر ۱



شکل ۳- تغییرات دمای بی‌بعد در داری‌های مختلف در Br^* های ثابت

برای بررسی درستی رفتار دمای بی‌بعد به دست آمده، شکل (۴) از مرجع [۱] آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، هم‌رفتاری نمودارهای این شکل با شکل ۳-الف، بیانگر درستی روش استفاده شده در این تحقیق است. تفاوت در مقادیر بین این دو شکل، به تفاوت در مدل‌های استفاده شده (مکعب مستطیلی در مرجع [۱] و استوانه افقی در این مطالعه) بر می‌گردد.



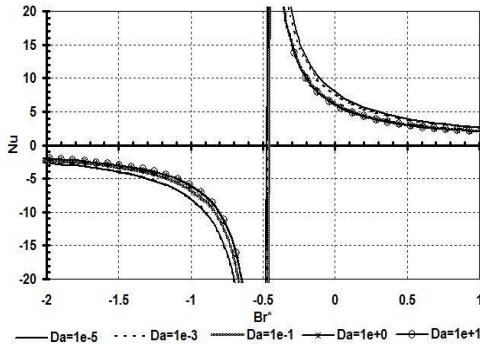
شکل ۴- تغییرات دمای بی‌بعد در داری‌های مختلف برای $Br^* = -1$ - مرجع [۱]

متخلخل (خالی) دمای دیواره بیشتر از دمای سیال برای فرآیند گرمایش و عکس آن برای فرآیند سرمایش است.

همانطوری که ملاحظه می‌شود، مقدار دمای بی‌بعد در انتهای دیواره نفوذ ناپذیر صفر بوده و طبق حالت تقارن دمای بی‌بعد به مقدار بیشینه خود در مرکز لوله می‌رسد. توزیع دما زمانی که عدد دارسی بزرگتر می‌شود هم پوشانی خواهد داشت. از آنجایی که عدد برینکمن اهمیت نسبی اتلاف لزجی را نشان می‌دهد، این عدد تأثیر معکوس را برای فرآیند سرمایش و گرمایش ایفا می‌کند. برای Br^* مثبت در فرآیند گرمایش که به سیال گرما داده شده است، توزیع دما برای اعداد دارسی کوچک به صورت خمیده بوده بطوریکه شیب توزیع دما از منفی به مثبت تغییر پیدا کرده است. اتلاف لزجی درون محیط متخلخل گرمای داخلی تولید کرده و باعث می‌شود اختلاف دمای بین سیال در مرکز لوله و دمای اطراف دیواره کاهش یابد. در فرآیند سرمایش تأثیر گرمای داخلی با کاهش عدد دارسی شدیدتر می‌شود. اعداد دارسی کوچک نفوذ کمی را در محیط متخلخل از خود نشان می‌دهند و بنابراین جابجایی کمتری را نسبت به یک محیط محدود کننده فراهم می‌آورد. شکل (۳-ج) توزیع دمای بی‌بعد منفی را نمایش می‌دهد، که نشان دهنده این مطلب است که دمای دیواره بیشتر از دمای سیال در محیط متخلخل برای تمامی اعداد دارسی است. برای اعداد دارسی کوچک گردایان دمای بی‌بعد بطور خاص در اطراف دیوار بیشتر بوده که دلیل آن تأثیر گرمای اصطکاکی است که با کاهش عدد دارسی شدیدتر می‌شود. در یک زمان یکسان با کاهش عدد دارسی تأثیر گرمای داخلی درون محیط متخلخل بر تأثیر گرمای اصطکاکی بیشتر می‌شود، که نهایتاً منجر به اختلاف دمای کمتری بین دیواره و سیال می‌شود.

شکل (۳-ب) شرایطی را نشان می‌دهد که در آن جمله گرمای اصطکاکی در معادله انرژی نادیده گرفته شده است. در غیاب این جمله، با افزایش عدد دارسی بزرگی پروفایل‌های دمای بی‌بعد (یعنی اختلاف دمای سیال و دیواره) افزایش می‌یابد. این افزایش برای داری‌های کوچکتر بیشتر بوده و برای داری‌های بزرگتر یعنی $Da=1, 10$ (که از ویژگی‌های محیطی با تخلخل بالا است) این روند کند می‌باشد.

انتقال گرما بین دیواره لوله و محیط متخلخل با مقدار عدد ناسلت مشخص می‌شود. با توجه به فرمول (۲۶) عدد ناسلت توابعی از عدد دارسی و عدد برینکمن می‌باشد. تغییرات عدد ناسلت با افزایش عدد دارسی در اعداد برینکمن مختلف در شکل (۵) رسم شده است.



شکل ۶- تغییرات عدد ناسلت با عدد برینکمن در اعداد دارسی مختلف

این تغییر علامت بیانگر وجود Br^* بحرانی خاصی که با Br_c^* نشان داده می‌شود است که در آن جهت انتقال گرما بین سیال نواحی مرکزی و نزدیک دیواره تغییر می‌کند. با توجه به نمودارهای شکل (۵) این مقدار بحرانی عدد برینکمن تابعی از عدد دارسی خواهد بود. برای پیدا کردن این تابعیت نمودار تغییرات Nu در مقابل Br^* در اعداد دارسی مختلف در شکل (۶) نشان داده شده است. همانطور که این شکل نشان می‌دهد در اطراف $Br_c^* = 0.5$ و در اعداد دارسی مختلف علامت عدد ناسلت و در نتیجه جهت انتقال گرما بین سیال نواحی مرکزی و نزدیک دیواره عوض شده است. برای $Br^* < -0.5$ (مثلاً $Br^* = -1$) با توجه به نمودار دمایی (شکل ۳-الف) تمامی این نمودارها دارای مقادیر مثبت می‌باشند که نشان دهنده بیشتر بودن دمای سیال نزدیک دیواره از سیال نواحی مرکزی است. درحالی‌که برای $Br^* > -0.5$ (مثلاً $Br^* = -0.4$) حالت عکس اتفاق می‌افتد. (توجه: برای این حالت نمودار دمایی بی‌بعد رسم نشده است).

برای پیدا کردن تابعیت این مقادیر بحرانی اعداد برینکمن بازه وسیعی از اعداد دارسی متشکل از ۵۵ عدد بین 0.00001 تا 10 در نظر گرفته شد. نمودارهای شبیه شکل (۶) برای هر کدام رسم گردید. مقدار Br_c^* برای هر کدام مشخص شد و با استفاده از روش‌های برازش منحنی تابعیتی برای Br_c^* بر اساس عدد دارسی با خطایی کمتر از 0.15 درصد به دست آمد. این تابعیت در معادله (۲۹) نشان داده شده است.

$$Br_c^* = \frac{a + c.Da^{0.5} + e.Da}{1 + b.Da^{0.5} + d.Da + f.Da^{1.5}} \quad (29)$$

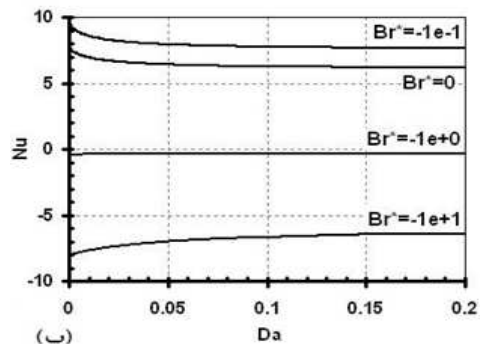
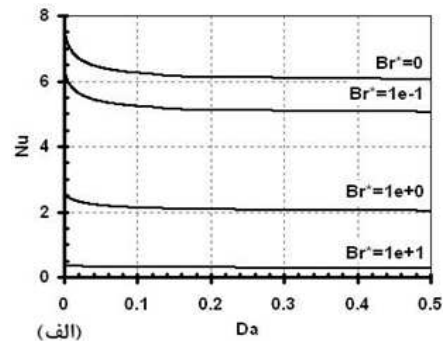
$$a = -0.50062813, \quad b = -0.38393229$$

$$c = -0.2184523, \quad d = 49.021786$$

$$e = -24.113426, \quad f = -0.19566344$$

برای فرآیند گرمایش (یعنی $Br^* > 0$) همانطور که در شکل (۵-الف) نشان داده شده است، با افزایش عدد دارسی، عدد ناسلت در Br^* های مختلف کاهش می‌یابد هر چند شدت کاهش با افزایش عدد برینکمن کندتر شده است اما تمامی نمودارهای در اعداد دارسی بزرگتر به عدد خاصی که Nu بی‌نهایت نامیده می‌شود، میل می‌کنند (در $Br^* = 0.1$ عدد ناسلت بی‌نهایت برابر ۵ در $Br^* = 1$ برابر ۲ و در $Br^* = 10$ برابر 0.286 می‌باشد).

برای فرآیند سرمایش شکل (۵-ب)، با افزایش عدد دارسی رفتار عدد ناسلت بجز در $Br^* = -0.1$ حالت صعودی به خود گرفته است. برای این حالت نیز در اعداد دارسی بی‌نهایت مشاهده می‌شود که عدد ناسلت در هر Br^* به مقدار مشخصی میل می‌کند. (در $Br^* = -0.1$ عدد ناسلت بی‌نهایت برابر $7/5$ در $Br^* = -1$ برابر ۶ و در $Br^* = -10$ برابر 0.316 می‌باشد). ناسلت بی‌نهایت بیان کننده عدد ناسلت برای سیالی است که از داخل لوله‌ای فاقد مواد متخلخل عبور می‌کند. از آنجایی که Br^* با توجه به تعریف آن (معادله (۱۴)) به نوعی بیانگر اهمیت نسبی گرمای اصطکاکی به ویژه اتلاف لزجی می‌باشد زمانیکه $Br^* = 0$ است یعنی حالتی که این جمله نادیده گرفته شده است، با افزایش عدد دارسی حالت نزولی داشته و در اعداد دارسی بزرگتر به ۶ میل می‌کند. نقطه قابل توجهی که در شکل (۵-ب) قابل توجه است تغییر علامت عدد ناسلت بین $Br^* = -1 (Nu < 0)$ و $Br^* = -0.1 (Nu > 0)$ است.



شکل ۵- تغییرات عدد ناسلت با عدد دارسی در اعداد مختلف برینکمن (الف) فرآیند گرمایش، (ب) فرآیند سرمایش

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله مطالعه تحلیلی روی انتقال گرما اجباری پایا در داخل یک بستر متخلخل استوانه‌ای (لوله‌ای) همراه با شار گرمای ثابت به دیواره‌ها، با بکار بردن جمله حرارت اصطکاکی حاصل از اتلاف لزجتی در معادله انرژی، انجام گرفته شد. برای بررسی متغیرهای تأثیرگذار Br^* و عدد دارسی Da روی پروفایل‌های سرعت نرمالایز شده، دمای بی‌بعد و عدد ناسلت، مقادیری برای آنها در نظر گرفته شد. در بررسی نمودارهای سرعت نرمالایز شده مشاهده گردید این نمودارها برای اعداد دارسی کوچکتر در نواحی مرکزی داخل لوله به صورت یکنواخت بوده در حالیکه در نواحی نزدیک دیواره شیب تندی به خصوص برای اعداد دارسی خیلی کوچک داشتند. این پدیده با توجه به تعریف جمله اتلاف لزجتی، باعث بیشتر شدن اهمیت جمله اتلاف لزجتی در این نواحی و در این اعداد دارسی خواهد شد. همچنین برای Br^* های خاصی که Brc^* نامیده شدند، در اعداد دارسی مختلف علامت عدد ناسلت که بیانگر جهت انتقال حرارت بین سیال نزدیک دیواره و سیال نواحی دورتر است، عوض می‌شد. تابعیت این Brc^* با استفاده از روشهای برازش منحنی با دقت بسیار خوبی درآید شد. با استفاده از نتایج چنین مواردی می‌توان اقدامات منطقی و درستی از لحاظ ملاحظات حرارتی و سیالاتی، جهت بهبود کارکرد سیستم‌هایی که در آنها از بسترهای متخلخل استفاده می‌شود، انجام داد.

مراجع

- convective heat transfer in microchannels" Int. J. Heat Mass Transf. vol. 41, pp. 1759–1769, 1998.
- [7] Nield D.A., Kuznetsov A.V., Xiong M., "Effects of viscous dissipation and flow work on forced convection in a channel filled by a saturated porous medium", Transp. Porous Med. vol. 56, pp. 351–367, 2004.
- [8] Ranjbar-Kani A.A., Hooman K "Viscous dissipation effects on thermally developing forced convection in a porous medium: circular duct with isothermal wall", Int. Commun. Heat Mass Transf. vol. 31, pp. 897–907, 2004.
- [9] Yovogan J., and G. Degan, Effect of anisotropic permeability on convective heat transfer through a porous river bed underlying a fluid layer. Journal of Engineering Mathematics, vol. 81, no. 1, pp. 127–140, 2013.
- [10] Roper C.S., et al., Anisotropic convective heat transfer in microlattice materials. AIChE Journal, vol. 59, no. 2, pp. 622–629, 2013.
- [11] Bejan A., "Convection Heat Transfer", Wiley, New York, 2004.
- [12] Degan, M. Gibigaye, C.Akowanou and N.C. Awanou, "The similarity regime for natural convection in a vertical cylindrical well filled with an anisotropic porous medium", Journal of engineering mathematics. 2008.
- [13] Kays W., Crawford M., Weigand B. "Convective Heat and Mass Transfer" McGraw Hill, New York, 2005.
- [14] A.K. Al-Hadhrami, L. Elliott, D.B. Ingham, "A new model for viscous dissipation in porous media across a range of permeability values", Transport in Porous Media, vol. 53, pp. 117–122, 2003.
- [15] Nield D.A., Bejan A., "Convection in Porous Media", Springer, New York, 2006.
- [1] Yew-Mun Hung C.P. Tso., "Effects of viscous dissipation on fully developed forced convection in porous media", International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 36, pp. 597–603, 2009.
- [2] Alazmi B., Vafai K., "Analysis of variants within the porous media transport models", J. Heat Transfer, vol. 122, pp. 303–325, 2000.
- [3] Lee D.-Y., Vafai K., "Analytical characterization and conceptual assessment of solid and fluid temperature differentials in porous media", Int. J. Heat Mass Transf. vol. 42, pp. 423–435, 1999.
- [4] Nield D.A., Kuznetsov A.V., Xiong M., "Thermally developing forced convection in a porous medium: parallel plate channel with walls at uniform temperature, with axial conduction and viscous dissipation Effects", Int. J. Heat Mass Transf. vol. 46, pp. 643–651, 2003.
- [5] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N., (2002): Transport Phenomena. Wiley, New York.
- [6] Tso C.P., Mahulikar S.P., "The use of the Brinkman number for single phase forced