

ارتعاش آزاد تیر کامپوزیتی متورق تیموشنکو با در نظر گرفتن ضریب پواسون برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف

استادیار، دانشگاه تبریز، دانشکده فنی مهندسی مکانیک

حسن بیگلری*

دانشجو، دانشگاه تبریز، دانشکده فنی مهندسی مکانیک

میلاذ ستاری ساربانقلی

چکیده

در این مقاله، حل دقیق ارتعاش آزاد برای بررسی تأثیر تورق بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر کامپوزیتی نسبتاً ضخیم توسط ساده‌سازیهایی صورت گرفته است. تئوری مورد استفاده تئوری تیموشنکو می‌باشد که برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. در فرمول‌بندی ارتعاش تیر، اثر اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی جانبی و اثر پواسون در نظر گرفته شده است. در بررسی تورق، هر دو مود آزاد و مقید بررسی شده‌اند. تأثیر اندازه و موقعیت تورق بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. شکل مودهای ارتعاشی علت تفاوت در نتایج مود آزاد و مود مقید را به خوبی نشان می‌دهد. فرکانس طبیعی تیر نسبت به طول تورق‌های بزرگ و نزدیک به صفحه میانی حساسیت بیشتری نشان می‌دهد. در حالی که برای دیگر تورق‌ها (کوتاه و دور از صفحه میانی) حساسیت پایین است. در نظر گرفتن اثر پواسون، تأثیر زیادی بر روی فرکانس چندلایه‌های متعامد (cross-ply) ندارد. درحالی‌که عدم در نظرگیری اثر پواسون برای چندلایه‌های زاویه‌دار (angle-ply) موجب خطای فاحشی می‌شود. نتایج بدست آمده از حل دقیق با داده‌های موجود در مقاله‌های قبلی مقایسه و صحت‌گذاری شده است. با در نظر گرفتن اثر پواسون برای چندلایه‌های زاویه‌دار داده‌های جدیدی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تیر چندلایه کامپوزیتی ضخیم متقارن، مود آزاد و مقید تورق، شرایط مرزی مختلف، شکل مود ارتعاشی، حل دقیق

Free Vibration of Delaminated Composite Timoshenko Beam Considering Poisson's Effect

H. Biglari

Assistant Professor, University of Tabriz, Faculty of Mechanical Engineering

M. Sattari Sarebangholi

B.Sc., Student, University of Tabriz, Faculty of Mechanical Engineering

Abstract

In this paper, exact solution of free vibration analysis has been established to study the effect of delamination on natural frequencies of thick laminated composite beams. Timoshenko beam theory with various boundary conditions has been employed. The Poisson's effect is considered in the formulation. Both free and constrained modes have been considered. The influence of the size and location of the delamination on the natural frequencies and mode shapes of a beam are investigated. Studying of mode shapes clarifies the reason of difference of free and constrained modes results, well. The natural frequency shows a high sensitivity for the long and close-to-the-midplane delaminations, but low sensitivity for the others. Considering the Poisson's effect has almost not influence the cross-ply laminate natural frequencies. But, ignoring it in angle-ply laminates may cause large error. Obtained results are compared with the analytical and experimental data reported in the literature to verify the validity of the present analysis. By considering Poisson's effect for angle-ply laminates new data has been released.

Keywords: Thick laminated composite beam, Free and constraint delamination mode shapes, Various boundary conditions, Exact solution.

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hbiglari@tabrizu.ac.ir

۱- مقدمه

کامپوزیت به مفهوم امروزی آن، عبارت است از ترکیب فیزیکی چند نوع ماده ناهمگون برای دستیابی به ماده جدید با خواص بهبود یافته نسبت به اجزای سازنده آن. به دلیل خواص مطلوب از جمله استحکام و صلبیت بالا، چگالی پایین و مقاوم در برابر ضربه و ساییدگی، مواد کامپوزیتی در صنایع پیشرفته مثل صنایع هوایی و خودرو کاربرد فراوان دارند. تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای چندلایه کامپوزیتی یک مساله مهم در طراحی برای کاربردهای مکانیکی، عمرانی و هوافضایی می‌باشد.

رایج ترین مود خرابی در چندلایه‌های کامپوزیتی تورق^۱ می‌باشد. این مود خرابی در اثر بارهای ضربه‌ای، متناوب یا استاتیکی و یا عدم چسبیده شدن کامل اجزای کامپوزیت در مرحله ساخت، بوجود می‌آید و عبارت است از جدا شدن دو لایه مجاور در مرز مشترک خود با یکدیگر. تورق باعث کاهش سفتی تیر و کاهش فرکانس طبیعی آن می‌شود.

در زمینه بررسی تأثیر تورق بر روی فرکانس طبیعی تیرهای فلزی و کامپوزیتی مطالعات قابل توجهی در سالهای اخیر انجام شده است. از اولین افرادی که در این زمینه تحقیق و پژوهش کردند می‌توان از رامکومار و همکارانش [۱] در سال ۱۹۷۹ و لی و همکارانش [۲] در سال ۱۹۸۷ نام برد. آنها کاهش فرکانس طبیعی قابل توجهی را به واسطه تورق پیش‌بینی کردند. اما این پیش‌بینی با نتایج تجربی همخوانی خوبی نداشت. در سال ۱۹۸۲ ونگ و دوستانش [۳] با معرفی اثر کوپلینگ کششی-خمشی مدل تحلیلی را بهبود بخشیدند. بدین ترتیب برای تورقهای با طول کوتاه و در صفحه میانی نتایج بدست آمده به نتایج تجربی نزدیک تر شد. آنها فرض کردند که دو لایه بالا و پایین تورق به هم برخورد نمی‌کنند (مود آزاد). سپس در سال ۱۹۸۸ موجومدار و سوریانارایان [۴] تئوری تحلیلی دیگری بر اساس تئوری تیر اوپلر-برنولی ارائه دادند. آنها فرض کردند که دو بخش بالایی و پایینی تورق همیشه با هم در تماس‌اند. شن و گریدی [۵] با استفاده از مدل "مود مقید" نتوانستند بازشوندگی تورق را در شکل موده‌های ارتعاشی پیش‌بینی کنند. لو و هاناگود [۶] برای رفتار باز و بسته شونده‌گی محل تورق، یک مدل تحلیلی بر اساس تئوری تیر تیموشنکو با استفاده از فنرهای خطی ارائه دادند. بر همین مبنا جعفری و همکارانش [۷] ارتعاشات آزاد تیر فلزی متورق بر مبنای تئوری تیموشنکو را بررسی نمودند. در این مقاله روش نیمه تحلیلی جدیدی بر مبنای توابع ویژه لژاندر و ضرایب لاگرانژ ارائه گردیده است. اخیراً نیز کارگرنوین و همکارانش [۸و۹] بر مبنای همین روش تأثیر ضریب پواسون بر پاسخ ارتعاش آزاد و ارتعاش اجباری تیر کامپوزیتی متورق را بررسی نمودند.

برای تحلیل کامپوزیت‌های با تورق‌های همزمان نیز بررسیهای مختلفی صورت گرفته است. در سال ۱۹۹۴ جو و همکارانش [۱۰] بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و به روش اجزاء محدود مطالعاتی را انجام دادند. در سال ۱۹۹۵ شو [۱۱] یک تیر ساندویچی با دو تورق را بررسی کرد. مطالعه او بر روی اهمیت مود مقید تأکید می‌کرد. دلا و شو [۱۲و۱۳] نیز تحقیقات مشابهی را انجام دادند و از موده‌های آزاد، مقید و نسبتاً مقید در بررسی تورق‌های همزمان استفاده کردند.

در مقاله حاضر، تأثیر وجود یک تورق در فرکانسهای طبیعی تیر چندلایه کامپوزیتی نسبتاً ضخیم توسط تئوری تیموشنکو توسط حل دقیق مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تئوری مورد بررسی اثر پواسون در نظر گرفته می‌شود. نتایج برای شرایط مرزی مختلف ارائه می‌شود. در بررسی تورق، دو مود آزاد و مقید بررسی شده است. بررسی همزمان موده‌های تورق آزاد و مقید تأثیر اثر پواسون در تیر کامپوزیتی متورق ضخیم برای شرایط مرزی مختلف توسط حل دقیق از نوآوری‌های مقاله حاضر می‌باشد.

۲- فرمول‌بندی ریاضی

۲-۱- ارتعاش آزاد تیر سالم

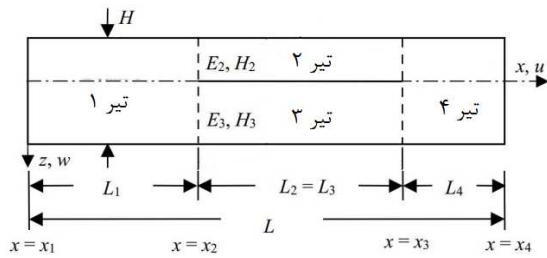
در این قسمت، معادلات ارتعاشی حاکم بر تیر چندلایه کامپوزیتی بیان می‌شود. تئوری تیر اوپلر-برنولی همان تئوری کلاسیک صفحات چندلایه^۲ به صورت یک بعدی می‌باشد. در این تئوری از دوران تیر در اثر نیروی برشی صرف نظر شده و چرخش تیر را فقط در اثر خمش در نظر می‌گیرند. در تئوری تیر تیموشنکو، اثر تغییر شکل برش جانبی نیز اعمال می‌شود و به همین دلیل خطوط عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل، دیگر عمود بر صفحه میانی نیستند. معادله حاکم بر ارتعاش خیز جانبی تیر کامپوزیتی متقارن بدون تورق، طبق تئوری تیموشنکو و با صرف نظر از ارتعاشات محوری، به صورت زیر است [۱۴]:

$$kG_{xy}A \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) = bI_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - kG_{xy}A \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = bI_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

در رابطه فوق، A ، b پهنا و سطح مقطع تیر، I_0 ، I_2 جمله‌های اینرسی خطی و دورانی، k ضریب تصحیح برشی، w_0 خیز صفحه میانی و ϕ دوران نرمال بر صفحه میانی حول محور y است. همچنین EI ، G_{xy} سفتی خمشی معادل و مدول برشی معادل تیر چندلایه کامپوزیتی می‌باشند.

² Classical Laminated Plate Theory¹ Delamination



شکل ۱- هندسه و پارامترهای تیر با یک تورق

سپس با توجه به شرایط تکیه‌گاهی تیر و بسته به نوع تماس در نظر گرفته شده بین دو زیرتیر بالایی و پایینی ۲ و ۳ (مود آزاد یا مقید)، روابط سازگاری اعمال می‌شوند. با توجه به شرایط سازگاری، مساله مقدار ویژه حل گردیده و فرکانس طبیعی و شکل مدهای ارتعاشی تیر متورق مشخص می‌شوند.

۲-۲-۱- مود آزاد^۱

در این حالت فرض می‌شود که دو زیرتیر بالا و پایین تورق در تمام مدت ارتعاش با هم تماسی نداشته و مستقل از هم نوسان می‌کنند. به عبارت دیگر دهانه تورق همیشه باز است. برای حل ارتعاش آزاد تیر به ۱۶ رابطه نیاز است که ۴ تا از شرایط تکیه‌گاهی تیر در نقاط x_1, x_4 بدست می‌آید و ۱۲ شرط سازگاری نیز از شرایط پیوستگی در نقاط x_2, x_3 بدست می‌آیند. در مود آزاد، شرایط پیوستگی خیز، شیب و تعادل نیروهای برشی و لنگر خمشی در ابتدا و انتهای تورق برقرار است. با توجه به شکل ۲، شرط پیوستگی هندسی در ابتدای تورق بصورت زیر است:

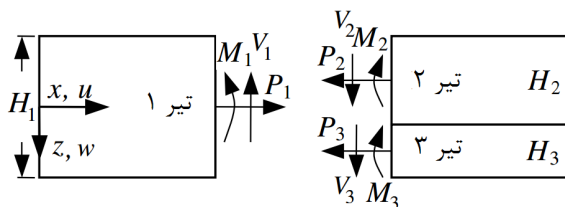
$$w_1 = w_2 = w_3 \quad (5)$$

$$\phi_{x1} = \phi_{x2} = \phi_{x3}$$

شرایط تعادل استاتیکی نیروی برشی و گشتاور خمشی در ابتدای تورق با توجه به شکل ۲، به قرار زیر است:

$$V_1 = V_2 + V_3$$

$$M_1 = M_2 + M_3 + P_3 \left(\frac{H_1 - H_3}{2} \right) - P_2 \left(\frac{H_1 - H_2}{2} \right) \quad (6)$$



شکل ۲- نیروها و گشتاورهای عمل و عکس‌العمل زیرتیرها

در ارتعاش آزاد تیر، پاسخ نوسانی با فرکانس زاویه‌ای ω به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\phi_x = \Phi(x)e^{i\omega t}, \quad w_0 = W(x)e^{i\omega t} \quad (2)$$

حال با جایگذاری رابطه (۲) در معادلات (۱) و پس از مجزا کردن دو معادله و انجام مقداری ساده‌سازی، معادله دیفرانسیل معمولی زیر بدست برای $W(x)$ می‌آید:

$$p \frac{d^4 W}{dx^4} + q \frac{d^2 W}{dx^2} - rW = 0$$

$$p = EI, \quad q = \left(\frac{EI}{\kappa GA} + \frac{I_2}{I_0} \right) bI_0 \omega^2, \quad (3)$$

$$r = \left(1 - \frac{\omega^2 b I_2}{\kappa GA} \right) \omega^2 b I_0$$

حل عمومی معادله دیفرانسیل (۳) به صورت زیر است:

$$W(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + c_3 \sinh \mu x + c_4 \cosh \mu x \quad (4)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4pr}}{2p}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4pr}}{2p}}$$

ثابت‌های موجود در حل (۴) از شرایط مرزی تیر بدست می‌آیند.

۲-۲-۲- ارتعاش آزاد تیر متورق

در این بخش، نحوه مدل‌سازی تیر کامپوزیتی دارای یک تورق بررسی می‌شود. برای این منظور، تیر از محل تورق به چهار زیرتیر کوچک‌تر تبدیل می‌شود (شکل ۱). حال معادله تیر تیموشنکو (۳) و پاسخ آن (رابطه ۴) برای هر زیرتیر نوشته می‌شود.

پارامترهای هندسی تیر متورق مورد بررسی در شکل ۱ مشخص شده است. مطابق شکل، مختصات ابتدای تیر با $x=x_1$ ، ابتدای تورق با $x=x_2$ ، انتهای تورق با $x=x_3$ و انتهای تیر با $x=x_4$ مشخص شده است. طول کل تیر برابر l بوده، طول تورق l_2 (همان l_3) و طول زیرتیر ۱ و ۴ به ترتیب برابر l_1 و l_4 می‌باشد. ارتفاع کل تیر H و ارتفاع زیرتیر ۲ و ۳ به ترتیب برابر H_2 و H_3 است. برای تحلیل تیر متورق، ابتدا برای هر زیرتیر پاسخ معادله حرکت (رابطه ۴) نوشته می‌شود.

¹ Free mode

که در آن b پهنای تیر، k شماره‌ی لایه، N تعداد لایه‌ها، \bar{Q}_{11} سفتی لایه‌ی k ام و Z_k ارتفاع سطح زیرین لایه‌ی k ام از تار خنثی می‌باشد.

۲-۲-۲- مود مقید^۱

در این حالت، فرض بر این است که دو زیرتیر بالا و پایین تورق (تیر ۲ و ۳) در تمام مدت ارتعاش کاملاً به هم چسبیده‌اند و با هم نوسان می‌کنند ($W_2=W_3$). در این حالت دو زیرتیر ۲ و ۳ به عنوان یک تیر عمل می‌کنند. لذا معادله حرکت (۳) برای دو زیرتیر ۲ و ۳ بصورت زیر یکپارچه می‌گردد:

$$\begin{aligned} (p_2+p_3)\frac{d^4W_i}{dx^4} + (q_2+q_3)\frac{d^2W_i}{dx^2} - (r_2+r_3)W_i &= 0 \\ q_i &= \left(\frac{EI^{(i)}}{kGA^{(i)}} + \frac{I_2^{(i)}}{I_0^{(i)}} \right) bI_0^{(i)}\omega^2 \\ r_i &= \left(1 - \frac{\omega^2 bI_2^{(i)}}{kGA^{(i)}} \right) \omega^2 bI_0^{(i)}, \quad p_i = EI^{(i)} \quad i=2,3 \end{aligned} \quad (12)$$

در مود مقید، شرایط پیوستگی در ابتدا و انتهای تورق همانند مود آزاد است. با این تفاوت که دو زیرتیر ۲ و ۳ به عنوان یک زیرتیر عمل می‌کنند. لذا شرایط پیوستگی خیز، شیب، نیروی برشی و ممان در ابتدا و انتهای تورق بصورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} x=x_2: \\ W_1=W_2, \quad W_1'=W_2' \\ EI_1W_1''' &= (EI_2+EI_3)W_2''' \\ EI_1W_1'' + \frac{EA_2 \times EA_3}{EA_2+EA_3} \left(W_1' \Big|_{x_2} - W_4' \Big|_{x_3} \right) \frac{h^2}{4I_2} \\ &= (EI_2+EI_3)W_2'' \\ x=x_3: \\ W_4=W_2, \quad W_4'=W_2' \\ EI_4W_4''' &= (EI_2+EI_3)W_2''' \\ EI_4W_4'' + \frac{EA_2 \times EA_3}{EA_2+EA_3} \left(W_1' \Big|_{x_2} - W_4' \Big|_{x_3} \right) \frac{h^2}{4I_2} \\ &= (EI_2+EI_3)W_2'' \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به بررسی ارتعاش آزاد، مساله مقدار ویژه حاصله باید حل گردد. با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، مقدار فرکانس طبیعی تیر بدست می‌آید.

۲-۳- اعمال اثر پواسون

در تئوری تیرها، با توجه به میدان جابجایی در نظر گرفته شده کرنش عرضی تیر (ϵ_{yy}) صفر می‌شود. اما لزوماً تنش عرضی

با توجه به پاسخ رابطه (۴) بر حسب $W(x)$ ، تمامی شرایط پیوستگی نیز باید بر حسب $W(x)$ بازنویسی شود. در تیر تیموشنکو، روابط نیروی برش و لنگر خمشی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} V_x &= kG_{xy}A \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \\ M_{xx} &= EI \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$

از معادلات حاکم بر تیر (روابط ۱) در حالت استاتیکی ($\ddot{w}_0, \ddot{\phi}_x = 0$) نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi_x &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \rightarrow M_{xx} = -EI \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ V_x &= \frac{dM_{xx}}{dx} = -EI \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (8)$$

همچنین روابط زیر برای نیروی محوری زیرتیرها برقرار است [۶]:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 + P_3 = 0 \\ \frac{P_3 I_2}{EA_3} - \frac{P_2 I_2}{EA_2} &= \left(W_1' \Big|_{x_2} - W_4' \Big|_{x_3} \right) \frac{H_1}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

با استفاده از روابط (۹ و ۸) و جایگذاری آنها در روابط (۶ و ۵) و انجام مقداری ساده‌سازی، شرایط پیوستگی به قرار زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} x=x_2: \\ W_1=W_2=W_3, \quad W_1'=W_2'=W_3' \\ EI_1W_1''' &= EI_2W_2''' + EI_3W_3''' \\ EI_1W_1'' + \frac{EA_2 \times EA_3}{EA_2+EA_3} \left(W_1' \Big|_{x_2} - W_4' \Big|_{x_3} \right) \frac{H^2}{4I_2} \\ &= EI_2W_2'' + EI_3W_3'' \\ x=x_3: \\ W_4=W_2=W_3, \quad W_4'=W_2'=W_3' \\ EI_4W_4''' &= EI_2W_2''' + EI_3W_3''' \\ EI_4W_4'' + \frac{EA_2 \times EA_3}{EA_2+EA_3} \left(W_1' \Big|_{x_2} - W_4' \Big|_{x_3} \right) \frac{H^2}{4I_2} \\ &= EI_2W_2'' + EI_3W_3'' \end{aligned} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، سفتی کششی معادل (EA) و سفتی خمشی معادل (EI) تیر چندلایه کامپوزیتی برابر است با:

$$\begin{aligned} EA_i &= A_{11}^{(i)} = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \\ EI_i &= D_{11}^{(i)} = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (11)$$

¹ Constrain mode

که ماتریس T حاوی بردارهای ویژه است. ثوابت موجود در حل رابطه (۴) همان مولفه‌های T_i می‌باشند. به عنوان نمونه، خیز زیرتیر شماره ۱ در شکل ۱ به صورت زیر است:

$$W_1(x) = T_1 \sin \lambda_1 x + T_2 \cos \lambda_1 x + T_3 \sinh \mu_1 x + T_4 \cosh \mu_1 x \quad (17)$$

برای اعمال شرایط مرزی یکسرگیردار در معادله (۱۶)، المان T_1 برابر یک فرض می‌شود. به عبارت دیگر در رابطه (۱۶) یک سطر از تمام ماتریسهای $A, T, 0$ برداشته شده و به جای آن معادله زیر جایگذاری می‌شود:

$$1 \times T_1 + 0 \times T_2 + 0 \times T_3 + \dots + 0 \times T_{16} = 1 \quad (18)$$

به این ترتیب، معادله همگن به یک معادله ناهمگن تبدیل می‌شود و ماتریس مجهولات و شکل مودها بدست می‌آید.

$$[T]_{16 \times 1} = [A]_{16 \times 16}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{16 \times 1} \quad (19)$$

۳- نتایج

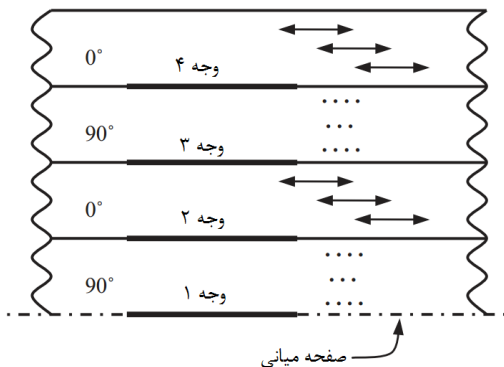
۳-۱- صحنه‌گذاری

نمونه ۱- تیر یک سر گیردار با چیدمان $[0/90]_{2s}$ به مشخصات مادی زیر و به ابعاد $127 \times 127 \times 10.16 \text{ mm}^3$ بر اساس تئوری تیر تیموشنکو برای مود تورق آزاد و مقید تحلیل می‌شود:

$$E_{11} = 134 \text{ (GPa)}, E_{22} = 10.3 \text{ (GPa)}, G_{12} = G_{13} = 5 \text{ (GPa)}$$

$$\nu_{12} = 0.33, \rho = 1480 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

موقعیت‌های قرارگیری تورق در جهت ضخامت در شکل ۳ مشخص شده است. موقعیت طولی تورق در وسط تیر است. در جدول ۱، نتایج فرکانس پایه برای موقعیت تورق در وجه ۱ با نتایج موجود در مرجع [۱۲] مقایسه و صحنه‌گذاری گردیده است.



شکل ۳- موقعیت قرارگیری تورق در وجوه بین‌لایه‌ای

تیر (σ_{yy}) صفر نیست و با توجه به اثر پواسون بر رفتار تیر تأثیرگذار است. اثر پواسون در تیرهای فلزی و در تیرهای چندلایه متعامد (زاویه الیاف ۰ و ۹۰ درجه) ناچیز است. اما این اثر در چندلایه‌های زاویه‌دار^۱ غیر قابل اغماض است. برای در نظرگیری اثر پواسون دو روش عمده وجود دارد.

روش اول: در این روش، برآیند نیرویی و گشتاوری تنش‌های چندلایه در جهت عرضی در روابط ساختاری چندلایه برابر صفر قرار داده می‌شود. البته این روش برای حالتی که چندلایه متقارن باشد ($B=0$)، ساده و مفید است. در این روش، سفتی خمشی معادل اصلاح شده تیر، بجای رابطه (۱۱) از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۴]:

$$EI = b/D_{11}^*$$

$$D_{11}^* = D_{11}/D^*, D^* = D_{11}D_1 + D_{12}D_2 + D_{16}D_3$$

$$\begin{cases} D_1 = D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26} \\ D_2 = D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}, D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \\ D_3 = D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16} \end{cases} \quad (14)$$

در روابط بالا، D_{ij} سفتی خمشی چندلایه می‌باشد.

روش دوم: این روش نسبت به روش اول کلی‌تر می‌باشد. یعنی در چندلایه‌های نامتقارن نیز قابل بکارگیری است. در این روش، تنش‌های عرضی (σ_{yy} و τ_{xy}) در روابط ساختاری هر لایه از چندلایه برابر صفر قرار داده می‌شود. لذا سفتی کششی تیر در راستای X بصورت زیر اصلاح می‌شود [۱۵]:

$$\sigma_{xx} = \left(\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{12} \frac{\bar{Q}_{14}\bar{Q}_{24} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{44}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{44} - \bar{Q}_{24}^2} + \bar{Q}_{14} \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{24} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{14}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{44} - \bar{Q}_{24}^2} \right) \epsilon_x = \bar{Q}_{11}^* \epsilon_x \quad (15)$$

یعنی کافی است در روابط (۱۱) به جای سفتی \bar{Q}_{11} از مقدار اصلاح شده آن یعنی \bar{Q}_{11}^* استفاده شود.

۲-۴- شکل مودهای ارتعاشی

پس از یافتن فرکانس طبیعی، شکل مودهای ارتعاشی مورد توجه قرار می‌گیرند. برای یافتن شکل مودها باید بردارهای ویژه بدست آیند. در حل معادلات ارتعاشی برای یافتن فرکانس طبیعی، یک دستگاه معادله همگن به فرم زیر بدست می‌آید:

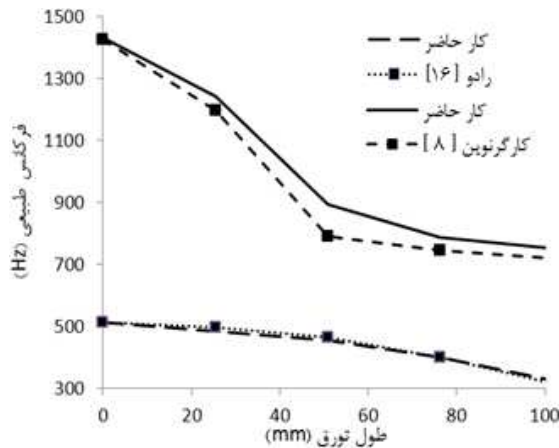
$$[A]_{16 \times 16} [T]_{16 \times 1} = [0]_{16 \times 1} \text{ (free mode)} \quad (16)$$

$$[A]_{12 \times 12} [T]_{12 \times 1} = [0]_{12 \times 1} \text{ (constrain mode)}$$

¹ Angle-ply

جدول ۱- فرکانس پایه (Hz) تیر کامپوزیتی متورق (تورق در وجه ۱)

طول تورق		کار حاضر (تیموشنکو)		دلا و شو [۱۲]	
مقید	آزاد	مقید	آزاد	مقید	آزاد
۰	۸۱,۹۲	۸۱,۹۲	۸۱,۸۸	۸۱,۸۸	۸۱,۸۸
۲۵,۴	۸۰,۱۳	۸۰,۱۳	۸۰,۴۷	۸۰,۴۷	۸۰,۴۷
۵۰,۸	۷۵,۳۲	۷۵,۳۲	۷۵,۳۶	۷۵,۳۶	۷۵,۳۶
۷۶,۲	۶۷,۰۰	۶۷,۰۰	۶۶,۱۳	۶۶,۱۴	۶۶,۱۴
۱۰۱,۶	۵۷,۳۱	۵۷,۳۱	۵۵,۶۷	۵۵,۶۷	۵۵,۶۷



شکل ۵- تأثیر طول تورق در فرکانس طبیعی دوم و سوم

نمونه ۲- تیر یک سر گیردار با چیدمان [۰,۹۰/۹۰,۰] به مشخصات مادی زیر و به ابعاد $26.67 \times 2.54 \times 0.1778 \text{ cm}^3$ دارای تورق به طول 10.16 cm در وجه میانی تحلیل می‌شود:

$$E_{11}=42.34(\text{GPa}), E_{22}=11.72(\text{GPa}), G_{12}=G_{13}=4.14(\text{GPa})$$

$$v_{12}=0.27, \rho=1901.5(\text{kg/m}^3)$$

در جدول ۲، فرکانس طبیعی چهار مود اول تیر با نتایج تجربی حاصل از مرجع [۱۷] مقایسه گشته است. در روابط (۱) بیان شد که از ارتعاشات محوری تیر صرف نظر می‌گردد. در مرجع [۸] نشان داده شده است که تأثیر ارتعاشات طولی در فرکانس طبیعی مودهای پایین تیر متورق ناچیز است. در جدول ۴ نیز مشاهده می‌شود که تطابق نتایج حاصله با نتایج تست در مودهای پایین عالی است. ولی در مودهای بالاتر، این اختلاف افزایش می‌یابد.

جدول ۲- فرکانس طبیعی چهار مود اول تیر متورق نمونه ۲

شماره مود	نتایج تست	کار حاضر	خطا %
۱	۱۶	۱۵.۵۸	۲/۶
۲	۹۸	۹۵.۶۲	۲/۴
۳	۲۲۳	۲۲۹.۹۸	-۳/۱
۴	۴۴۱	۴۶۶.۱۸	-۵/۷

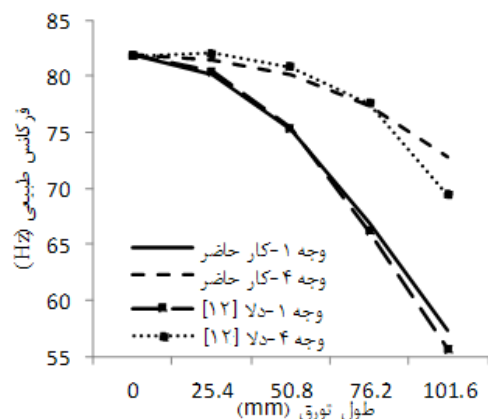
۳-۲- تأثیر ضریب لاغری تیر

برای نشان دادن تفاوت نتایج حاصل از تئوری اوپلر-برنولی و تیموشنکو، تأثیر ضریب لاغری (L/H) بر فرکانس پایه تیر متورق، در جدول ۳ نشان داده شده است. مشخصات هندسی و مادی تیر همانند نمونه ۱ می‌باشد. طول تورق 10 mm ثابت و در وجه ۱ قرار گرفته است. در این جدول، ضخامت تیر ثابت ($H=10.16 \text{ mm}$) و طول تیر تغییر یافته است.

با توجه به نتایج جدول، با افزایش طول تورق، فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد. همچنین با بررسی نتایج دو حالت آزاد و مقید، مشاهده می‌شود که نتایج یکسان است. یعنی در حالتی که تورق در وجه ۱ است، مود آزاد تورق تحریک نمی‌شود. در شکل ۴، تأثیر طول تورق و محل تورق (وجه ۱ و ۴) بر روی فرکانس پایه با نتایج موجود در مرجع [۱۲] مقایسه گشته است. مطابق شکل، موقعیت ضخامت تورق نیز تأثیر به بسزایی در فرکانس طبیعی دارد. وجود تورق در وجه ۱ (نزدیک به صفحه میانی) باعث افت شدیدتر فرکانس طبیعی نسبت به وجود تورق در وجه ۴ (نزدیک سطح خارجی) گشته است. لذا می‌توان گفت وجود تورق در لایه‌های نزدیک به صفحه میانی خطرناک‌تر از وجود آن در وجوه نزدیک سطح خارجی است.

تأثیر تورق بر کاهش فرکانس طبیعی تیر در مودهای بالاتر شدیدتر است. در شکل ۵، تأثیر طول تورق بر فرکانس طبیعی دوم و سوم تیر کامپوزیتی یکسرگیردار محاسبه و با مراجع [۱۶ و ۸] مقایسه شده است. تورق در وجه ۱ قرار دارد. مطابق شکل، کاهش فرکانس بر اثر تورق در فرکانس‌های بالا بسیار شدیدتر است. لذا برای تشخیص تورق در یک سازه بهتر است تا فرکانس‌های طبیعی بالا مورد توجه قرار گیرند.

در کل، با مقایسه نتایج ارائه شده در جدول ۱ و شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از کار حاضر در تطابق خوبی با مراجع دیگر می‌باشد.



شکل ۴- تأثیر محل و طول تورق بر فرکانس پایه (مود مقید)

جدول ۴- فرکانس پایه (Hz) تیر کامپوزیتی متورق دو سر لولا بر پایه تئوری تیموشنکو برای مودهای مقید و آزاد

وجه ۴		وجه ۱		طول تورق
آزاد	مقید	آزاد	مقید	
۲۲۹,۷۷	۲۲۹,۷۷	۲۲۹,۷۷	۲۲۹,۷۷	۰
۲۲۵,۶۸	۲۲۵,۷۳	۲۱۶,۷۹	۲۱۶,۷۹	۲۵,۴
۲۲۰,۵۹	۲۲۲,۳۷	۲۰۶,۸۶	۲۰۶,۸۶	۵۰,۸
۱۹۰,۵۵	۲۱۹,۰۵	۱۹۶,۹۰	۱۹۶,۹۰	۷۶,۲
۱۱۸,۰۰	۲۱۳,۹۰	۱۸۱,۶۷	۱۸۱,۶۷	۱۰۱,۶

مطابق نتایج جدول، با حرکت تورق به سمت لایه‌های بیرونی و فاصله گرفتن از مرکز چندلایه، تفاوت نتایج بین مود آزاد و مقید بیشتر می‌شود. این تفاوت در طول‌های بزرگتر تورق مشهودتر است. علت این امر تاثیر تنشهای خمشی فشاری در لایه‌های بیرونی تیر و در نتیجه تغییر مود ارتعاشی تورق از مقید به آزاد می‌باشد. این موضوع در بخش شکل مود بیشتر بررسی می‌شود.

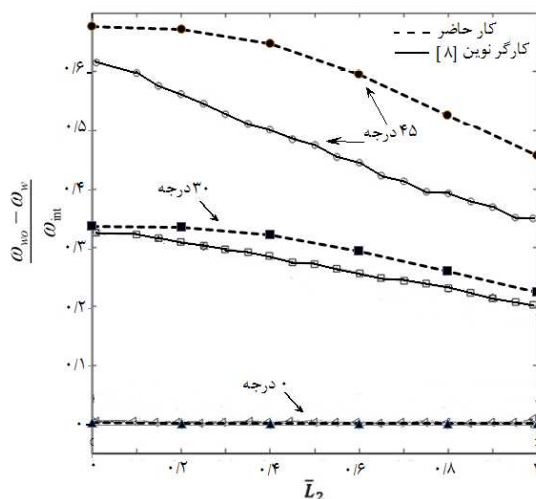
۴-۳- اثر پواسون

در این بخش اهمیت در نظریه ضریب پواسون در محاسبات مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمونه ۳- تیر یک سر گیردار کامپوزیتی متورق با چیدمان $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]_s$ با مشخصات مادی زیر را در نظر بگیرید:

$$E_{11}=144.8(\text{GPa}), E_{22}=9.65(\text{GPa}), G_{12}=G_{13}=4.14(\text{GPa})$$

$$v_{12}=0.33, \rho=1389.23(\text{kg/m}^3)$$

ضریب لاغری تیر ($L/H=15$)، طول تورق بی‌بعد ($\bar{L}_2 = L_2/L$) و تورق از نظر طولی در وسط تیر قرار دارد.



شکل ۷- تأثیر ضریب پواسون بر فرکانس پایه تیر متورق در طول تورقهای مختلف تیر کامپوزیتی نمونه ۳ (مود آزاد)

مشاهده می‌شود که با کاهش L/H ، اختلاف نتایج دو تئوری افزایش می‌یابد. علت این تفاوت، لحاظ کردن تأثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی در تئوری تیموشنکو می‌باشد.

۳-۲- تأثیر موقعیت طولی تورق

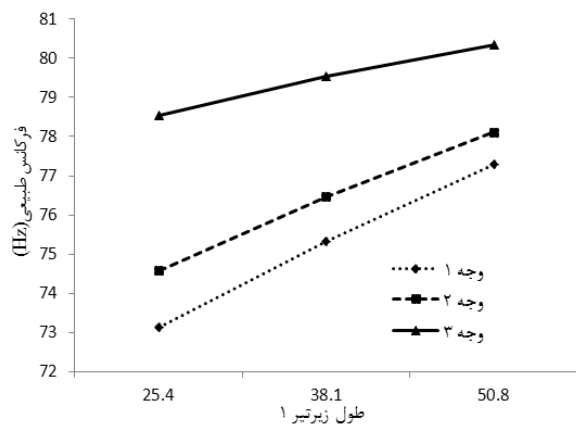
در شکل ۶، تأثیر تغییر موقعیت طولی تورق بر فرکانس طبیعی پایه تیر متورق برای داده‌های نمونه ۱ نشان شده است. نتایج هر دو مود آزاد و مقید یکسان است. مطابق شکل، با حرکت تورق به سمت انتهای آزاد تیر یکسرگیردار، تأثیر تورق کاهش یافته و کاهش فرکانس کمتر می‌شود. در واقع کاهش سفتی تیر بر اثر تورق در نزدیکی تکیه‌گاه تیر که سفتی تیر بیشتر است، محسوس‌تر است.

۳-۳- شرایط تکیه‌گاهی دو سر لولا

در جدول ۴، فرکانس طبیعی پایه تیر متورق و سالم برای داده‌های نمونه ۱ و حالت دوسر لولا بررسی شده است. تورق از نظر طولی در وسط تیر قرار دارد. مطابق جدول، در حالت تیر دو سر لولا نیز با افزایش طول تورق، فرکانس طبیعی کاهش یافته است. همچنین با حرکت محل تورق به سمت سطوح خاجی تیر چندلایه، تأثیر تورق روی فرکانس طبیعی کمتر شده است.

جدول ۳- تأثیر ضریب لاغری (L/H) بر فرکانس پایه (Hz) تیر کامپوزیتی متورق نمونه ۱

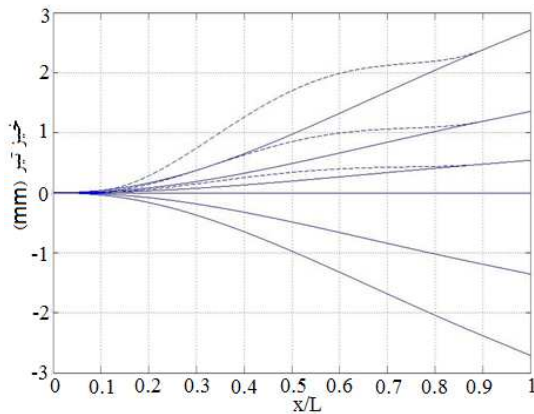
L/H	اویلر-برنولی	تیموشنکو	اختلاف %
۴۰	۷۷۳,۵۷	۷۲۷,۳۷	۶,۴
۶۰	۳۴۹,۷۳	۳۳۲,۳۶	۵,۲
۸۰	۱۹۷,۸۹	۱۸۹,۶۸	۴,۳
۱۰۰	۱۲۷,۰۲	۱۲۲,۵۲	۳,۷



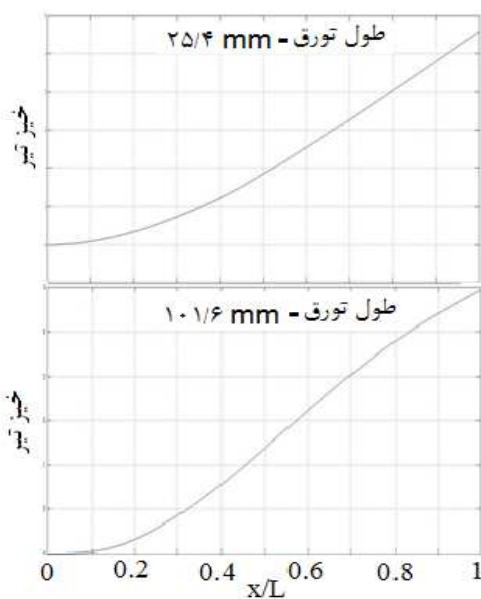
شکل ۶- فرکانس پایه تیر متورق یکسر گیردار برای موقعیت‌های طولی مختلف (طول تورق ۵۰,۸ میلی‌متر)

در شکل ۹ و ۱۰، تأثیر طول و محل تورق در مود ارتعاش اول تیر کامپوزیتی $[0,90]_{2s}$ یکسرگیردار متورق (آزاد یا مقید) نشان داده شده است. در شکل ۹ محل تورق در وجه ۱ (نزدیک صفحه میانی تیر) و در شکل ۱۰ محل تورق در وجه ۴ می باشد. مطابق شکل ۹، در هنگامی که تورق در وجه ۱ قرار دارد، در طولهای مختلف تورق، دهانه تورق باز نمی شود (مود مقید). این خود دلیلی بر یکسان بودن فرکانس های دو حالت مود مقید و آزاد در وجه ۱ می باشد.

مطابق شکل ۱۰، هنگامیکه تورق در وجه ۴ قرار دارد و طول تورق کوچک است، مود ارتعاش تورق مقید است. اما با افزایش طول تورق، مود ارتعاش تورق بصورت آزاد است. با مقایسه شکل ۹ و ۱۰ نتیجه می شود که افزایش طول تورق و قرارگیری آن در وجوه بالایی تیر باعث تغییر مود ارتعاش تورق از حالت مقید به آزاد می شود.



شکل ۸- نحوه ارتعاش تیر $[0,90]_{2s}$ یکسرگیردار متورق در لحظات مختلف (طول تورق $101/6$ میلی متر و در وجه ۴)



شکل ۹- شکل مود ارتعاشی اول تیر یکسرگیردار متورق برای طول های مختلف تورق (تورق در وجه ۱)

در شکل ۷، تأثیر اثر پواسون بر فرکانس طبیعی بی بعد شده $(\omega_{w0} - \omega_w)/\omega_{int}$ در طول تورقهای مختلف با نتایج حاصل از مرجع [۸] مقایسه گشته است. ω_{int} فرکانس پایه تیر سالم، ω_w فرکانس پایه تیر متورق با اثر پواسون و ω_{w0} فرکانس پایه تیر متورق بدون اثر پواسون است. در مرجع [۸] برای اعمال اثر پواسون از روش اول بخش (۲-۳) و در نتایج کار حاضر از روش دوم استفاده گردیده است.

همانگونه که مشاهده می شود، اثر پواسون در زوایای کوچک الیاف ناچیز و قابل اغماض است. ولی در زاویه الیاف ۴۵ درجه، نادیده گرفتن اثر پواسون خطای فاحشی (۴۶٪) ایجاد می کند. همچنین، اثر پواسون با افزایش طول تورق کاهش می یابد. مقایسه نتایج نشان می دهد اختلاف روش اول و دوم در زوایای الیاف بزرگ، بیشتر می شود. البته مقداری از این خطا نیز مربوط به اختلاف روش حل ارتعاش تیر متورق بین مرجع [۸] و کار حاضر می باشد.

برای مقایسه دقیق تر اختلاف روش اول و دوم، در جدول ۵، فرکانس پایه تیر متورق برای تیر نمونه ۱ محاسبه گردیده است. طول تورق $25/4$ mm، از نظر طولی در وسط تیر و در وجه ۴ تیر واقع شده است. مجدداً ملاحظه می شود که اختلاف بین دو روش در زوایای الیاف ۴۵ درجه به حداکثر خود می رسد.

جدول ۵- اختلاف فرکانس پایه تیر متورق نمونه ۱ با استفاده از روش اول و دوم (نمونه ۱)

لایه چینی	روش اول	روش دوم
$[0/90]_{2s}$	۸۱/۴۲	۸۱/۰۰
$[30/-30]_{2s}$	۵۹/۳۸	۵۶/۷۹
$[45/-45]_{2s}$	۳۷/۴۸	۳۵/۴۶

۳-۵- شکل مودهای ارتعاشی

بسته به موقعیت و طول تورق این امکان وجود دارد که دهانه تورق کاملاً باز شده و یا اصلاً باز نشود و تیر به فرم مود مقید ارتعاش کند. برای بررسی مودهای آزاد یا مقید، در این قسمت شکل مود ارتعاشی تیر متورق مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل ۸، شکل مود ارتعاشی اول تیر کامپوزیتی یکسرگیردار متورق (نمونه ۱) نشان داده شده است. تورق در وجه ۴ و به طول $101/6$ میلی متر می باشد. با توجه به شکل، در حرکت تیر به سمت بالا، بر اثر تنش خمشی فشاری دهانه تورق باز می شود. اما در هنگام حرکت به سمت پایین، به دلیل برخورد با لایه پایین امکان باز شونده گی تورق وجود ندارد و دهانه بسته باقی می ماند. به عبارت دیگر، فرکانس پایه تلفیقی از فرکانس مود آزاد و مود مقید می باشد که البته به دلیل نزدیک بودن این مقادیر نیازی به میانگین گرفتن از فرکانس ها نیست.

Institute, Society of Plastics Industry, Section 22-E, pp. 1-5, 1979.

[2] Lee B. T., Sun C. T., and Lin D., "An assessment of damping measurement in evaluation of integrity of composite beams", J. Reinf. Plastics. Compos. vol. 6, pp. 114-125, 1987.

[3] Wang J. T. S., Liu Y. Y., and Gibby J. A., "Vibration of split beams", J. Sound Vib., vol. 84(4), pp. 491-502, 1982.

[4] Mujumdar P. M., and Suryanarayan S., "Flexural vibrations of beams with delaminations", J. Sound Vib. vol. 125(3), pp. 441-61, 1982.

[5] Shen M. H. H., and Grady J. E., "Free vibrations of delaminated beams", AIAA J., vol. 30(5), pp. 1361-70, 1992.

[6] Luo H., and Hanagud S., "Dynamics of delaminated beams", Int. J. Solids Struct, vol. 37, pp. 1501-19, 2000.

[7] Jafari-Talookolaei R. A., and Abedi M., "Analytical solution for the free vibration analysis of delaminated Timoshenko beams", The Scientific World Journal, vol. 2014, A. ID 280256, 10 pages, 2014.

[8] Kargarnovin M. H., Ahmadian M. T., Jafari-Talookolaei R. A., and Abedi M., "Semi-analytical solution for the free vibration analysis of generally laminated composite Timoshenko beams with single delamination", Composites: part B, vol. 45(1), pp. 587-600, 2012.

[9] Kargarnovin M. H., Jafari-Talookolaei R. A., and Ahmadian M. T., "Vibration analysis of delaminated Timoshenko beams under the motion of a constant amplitude point force traveling with uniform velocity", Int. J. Mechanical. Sci., vol. 70, pp. 39-49, 2013.

[10] Ju F., Lee H. P., and Lee K. H., "Free-vibration analysis of composite beams with multiple delaminations", Compos. Eng., vol. 4(7), pp. 715-30, 1994.

[11] Shu D., "Vibration of sandwich beams with double delaminations", Compos. Sci. Tech., vol. 54(1), pp. 101-9, 1995.

[12] Della C. N., and Shu D., "Vibration of beams with double delaminations", J. Sound Vib., vol. 282(3-5), pp. 919-35, 2005.

[13] Della C. N., and Shu D., "Vibration of beams with two overlapping delaminations in prebuckled states", Compos: Part B, vol. 38, pp. 109-18, 2007.

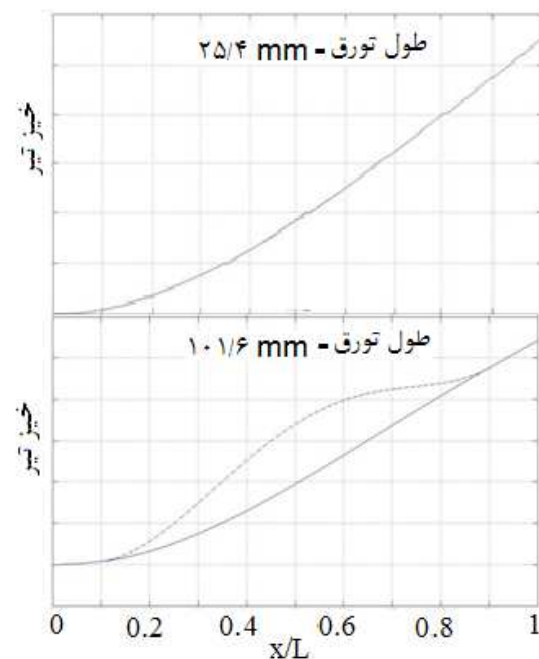
[14] Reddy J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells-Theory and

۴- نتیجه گیری

در مطالعه حاضر تأثیر تورق روی فرکانس طبیعی تیر تیموشنکو بررسی شد. ابتدا معادلات مربوط به ارتعاش آزاد تیر سالم و سپس معادلات ارتعاشی تیر متورق کامپوزیتی بدست آمد. در معادلات تیر اثر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی لحاظ گردید.

تأثیر پارامترهای مختلف از جمله شرایط تکیه گاهی، طول تورق، موقعیت ضخامتی و طولی تورق و چیدمان الیاف روی فرکانس طبیعی و شکل مود ارتعاش تیر کامپوزیتی متورق مورد بررسی قرار گرفت. در بررسی تورق از دو مود آزاد و مقید استفاده گردید. نتایج بدست آمده از این دو مود بجز در مواردی که طول تورق زیاد و تورق در وجوه خارجی تیر قرار گرفته باشد، نزدیک به هم است.

همچنین تأثیر ضریب پواسون بر فرکانس طبیعی تیر متورق بررسی شد. اعماض از اثر پواسون می تواند باعث تخمین بیشتر فرکانس طبیعی تا حدود ۵۰٪ در چندلایه های زاویه دار می گردد. مشاهده گردید تأثیر تورق در کاهش فرکانس طبیعی در فرکانس های بالاتر افزایش می یابد.



شکل ۱۰- شکل مود ارتعاشی اول تیر یکسرگیردار متورق برای طول های مختلف تورق (تورق در وجه ۴)

مراجع

[1] Ramkumar R. L., Kulkarni S. V., and Pipes R. B., "Free vibration frequencies of a delaminated beam", 34th Annual Technical Conference Proceedings, Reinforced/Composite

Analysis", Second edition, CRC Inc., New York, 2004.

[15] Aldraihem O. J., and Khdeir A. A., "Exact deflection solutions of beams with shear piezoelectric actuators", Int. J. Solids Structures, vol. 40, pp. 1–12, 2003.

[16] Radu A.G., and Chattopadhyay A., "Dynamic stability analysis of composite plate including delaminations using a higher order theory and transformation matrix approach", Int. J. Solids Struct, vol. 39: pp. 1949–65, 2002.

[17] Okafor A., Chandrashekhara K., and Jiang Y. P., "Delamination prediction in composite beams with built-in piezoelectric devices using modal analysis and neural network", Smart Mater Struct, vol. 5, pp. 338–47, 1996.