نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۴، جلد ۵۳، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۲، صفحه ۱۶۳-۱۷۱ – پژوهشی کامل
DOI: 10.22034/jmeut.2023.44801.2891

حلّ کامل استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی

نوید بهادرانی دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، nvdbhd1@gmail.com

مهدی قنّاد* دانشیار، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، mghannadk@shahroodut.ac.ir

محمدحسین سوهانی دانشجوی دکتری، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، mh.sohani@yahoo.com

چکیده

در این مقاله، معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تحت فشار، ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی (NPET) استخراج شده است. به‌دلیل وجود تغییرشکل‌های بزرگ در جهت شعاعی و درنتیجه معادلات سینماتیک با جملات غیرخطی، معادله دیفرانسیل حاکم از نوع مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیّر است که به کمک تکنیک اغتشاشات در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای حل شده است. با توجه به معادلات تعادل، شرایط مرزی و هم‌چنین شرایط انتهایی متفاوت استوانه، تنش‌های شعاعی، محیطی و محوری و نیز جابه‌جایی شعاعی به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است. با توجه به نتایج حاصل از حل تحلیلی، تأثیر ضخامت، جنس و شرایط مرزی بر مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی در پوسته‌ی استوانه‌ای، بررسی شده است. به‌منظور راستی‌آزمایی نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدل‌سازی اجزای محدود استوانه‌ی مذکور به کمک نرم‌افزار ABAQUS انجام و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این پژوهش نشان می‌دهد که روند حل تحلیلی ارائه شده برای پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری از دقّت خوبی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: استوانه‌ی جدار ضخیم، تحلیل الاستیک، تحلیل تنش، تغییرشکل بزرگ، نظریه‌ی کلاسیک، تکنیک اغتشاشات.

Complete Solution of Pressurized Thick Cylinders with Large Deformation Using Nonlinear Plane Elasticity Theory

N. Bahadorani Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.
M. Ghannad Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.
M.H. Sohani Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

In this paper, governing equation of pressurized axisymmetric cylinders made of homogeneous and isotropic materials with large deformations is derived using the Nonlinear Plane Elasticity Theory (NPET). Because of large deformations along the radial direction and hence existence of nonlinear terms in kinematic equations, the governing equation is a nonlinear second-order equation with variable coefficients, which is solved in plane stress and plane stress states using perturbation theory. According to the equilibrium equation, boundary conditions and different end conditions of the cylinder; radial and circumferential normal stresses and radial displacement in cylindrical shells are calculated analytically. The effect of thickness, material and boundary conditions on stresses and displacement in cylindrical shell is studied by the results obtained from analytical solution. For investigating the accuracy of the results obtained from the analytical solution, the numerical finite element modeling of mentioned cylinder is done with ABAQUS software and the results of the two methods are compared. This research reveals that the obtained results by the mentioned analytical solution procedure have good accuracy for cylindrical shells under pressure loading.

Keywords: Thick-walled cylinder, Elastic analysis, Stress analysis, Large deformation, Classical theory, Perturbation technique.

۱- مقدّمه

پوسته‌ها، سازه‌های خمیده‌ای هستند که بعد ضخامت در آن‌ها نسبت به دو بعد دیگر به‌طور قابل ملاحظه‌ای کوچک‌تر است. در چند دهه‌ی گذشته، مطالعه‌ی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری‌های مختلف، به‌دلیل کاربرد فراوانی که دارند، بیش‌تر از انواع دیگر سازه‌ها توجه پژوهشگران را جلب کرده است. لذا پژوهشگران همواره به‌دنبال اعمال تغییرات روی هندسه، ضخامت و جنس این پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر اعمال نیروها افزایش و وزن آن‌ها را تا حدّ امکان کاهش دهند.

برای نخستین بار، لامه در سال ۱۸۵۲، تحلیل الاستیک خطی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با ضخامت ثابت و ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی را با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک الاستیسیته یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای (PET)[1] ارائه کرد [۱]. نقدی در سال ۱۹۵۶ نظریه‌ی تغییرشکل برشی

[1] Plane Elasticity Theory (PET)

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mghannadk@shahroodut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۰/۰۲/۱۱
تاریخ پذیرش: ۰۲/۰۸/۲۹

(SDT)[1] را با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، برای پوسته‌ها معرفی کرد [۲]. میرسکی و هرمان در سال ۱۹۵۸ تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم (FSDT)[2]، ارائه کردند [۳]. گرینس‌پُن در سال ۱۹۶۰ مقایسه‌ای بین نتایج روش‌های مختلف تحلیل خطی پوسته‌های استوانه‌ای متقارن محوری را انجام داده است [۴].

مواد ناهمگن مدرّج تابعی (FGM)[3] توسّط نینو و همکاران در سال ۱۹۸۴ معرّفی شد [۵]. فوکویی و یاماناکا در سال ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رونگه-کوتا حل کردند [۶]. ژیفای و همکاران در سال ۲۰۰۷ حل دقیق استوانه‌های توخالی از مادّه‌ی ناهمگن FG را با روش چندلایه‌ای کردن استوانه که هر لایه به‌صورت مادّه‌ی همگن با خواص مکانیکی ثابت درنظر گرفته شده، ارائه کردند [۷]. قنّاد و زمانی‌نژاد در سال ۲۰۱۲ حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد FG را بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای برای شرایط مرزی تنش صفحه‌ای[4] و کرنش صفحه‌ای[5] ارائه نمودند [۸]. ایشان در سال ۲۰۱۲ بر مبنای نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم (FSDT)، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم FGM را در حالت کلّی استخراج و سپس برای استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای) به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند و با نتایج حل نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای مقایسه کردند [۹]. قنّاد و قارونی در سال ۲۰۱۲ حل تحلیلی استوانه‌های متقارن محوری تحت فشار FGM را برای شرایط مرزی دو سر گیردار به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا (HSDT)[6] ارائه نمودند [۱۰]. قنّاد و همکاران در سال ۲۰۱۲ حل تحلیلی استوانه‌های جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی و نظریه‌ی اغتشاشات ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند [۱۱]؛ سپس ایشان در سال ۲۰۱۳ معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار متغیّر ساخته شده از مواد ناهمگن FG استخراج و آن‌ها را به کمک روش مجانب‌های انطباق‌یافته (MAM)[7] برگرفته از تئوری اغتشاشات، حل ریاضی نمودند [۱۲]. سندرز در سال ۱۹۶۳ با ارائه نظریه‌ی‌های غیرخطی برای پوسته‌های جدار نازک، نظریه‌ای دقیق برای تغییرشکل‌های بزرگ پوسته‌های جدار نازک ارائه کرد [۱۳]. هاگس و لیو در سال ۱۹۸۱ روش اجزای محدود غیرخطی را برای آنالیز شبه‌استاتیکی سه‌بعدی در پوسته‌هایی که تغییرشکل‌های بزرگ توأم با چرخش دارند، ارائه کردند [۱۴]. تانگ و بیچ در سال ۲۰۱۱ با ارائه‌ی حل تحلیلی، رفتار غیرخطی پوسته‌های کروی متقارن محوری کم‌عمق تحت بارگذاری فشاری خارجی یکنواخت و تحت تأثیر دما را بررسی کردند [۱۵]. عارفی در سال ۲۰۱۳ رفتار غیرخطی استوانه پیزوالکتریک FG را تحت بارهای حرارتی، مکانیکی و الکتریکی بررسی کرد و با نتایج حاصل از حل خطی مقایسه کرد که درنتیجه ۵ درصد بهبود برای پتانسیل الکتریکی و ۹ درصد برای جابه‌جایی شعاعی حاصل گردید [۱۶]. وی در سال ۲۰۱۵ تحلیل غیر خطی یک صفحه‌ی مربّع FG محدود بین دو لایه‌ی پیزوالکتریک FG که بر پایه وینکلر-پاسترناک قرار دارد، ارائه کرد [۱۷]. عسگری و همکاران نظریه‌ی سخت‌شوندگی سینماتیکی غیرخطی فردریک- آرمسترانگ را به منظور بررسی رفتار بارگذاری چرخه‌ای برای یک استوانه‌ی ضخیم FG تحت فشار داخلی برای دو مادّه‌ی ناهمگن فلز-فلز و سرامیک-فلز استفاده کردند. نتایج به‌دست آمده نشان داد که استفاده از مواد FG منجر به طراحی انعطاف‌پذیرتر می‌شود؛ به‌نحوی که گسیختگی چرخه‌ای را می‌توان با انتخاب پروفایل‌های توزیع مواد مناسب بهبود داد [۱۸].

تحلیل الاستیک مواد فراکشسان نیز از موضوعات قابل توجه پژوهشگران می‌باشد تا بتوانند درک صحیحی از رفتار آن‌ها بیابند و گام مؤثری در طرّاحی و ساخت سازه‌ها بردارند. قارونی و قنّاد در سال ۲۰۱۹ حل غیر خطی استوانه‌های جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد فراکشسان (هایپرالاستیک)[8] برمبنای مدل نئوهوکی[9] را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی و نظریه‌ی اغتشاشات ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند [۱۹]؛ سپس ایشان حل غیر خطی استوانه‌های جدار متغیّر تحت فشار نایکنواخت، ساخته‌شده از مواد فراکشسان (هایپرالاستیک) برمبنای مدل مونی-ریولین[10] را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم و روش مجانب‌های همتا ارائه کردند [۲۰]. هاشمی و جعفری در سال ۲۰۲۰ ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های مفصلی از جنس مواد متغیر تابعی دوجهته را برای نخستین بار به‌صورت کاملاً تحلیلی بررسی کردند. ایشان با درنظر گرفتن اثر غیرخطی کرنش و براساس نظریه‌ی کلاسیک ورق‌ها، معادلات غیرخطی حرکت را استخراج کردند. سپس با اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی را به‌دست آوردند [۲۱].

در مقاله‌ی حاضر با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی (NPET)[11] و تکنیک اغتشاشات، حلّ عمومی استوانه‌های متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی با تغییرشکل‌های بزرگ در حالت‌های تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای ارائه و درنهایت مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی انجام می‌شود.

۲- فرمول‌بندی مسأله

در نظریه‌ی کلاسیک یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای (مستوی)، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر لایه‌ی میانی استوانه، پس از بارگذاری و تغییرشکل، هم‌چنان مستوی و عمود بر آن باقی می‌مانند. معنای آن نادیده گرفتن اثر برش و درنتیجه قطری شدن تانسور تنش و تانسور کرنش می‌باشد. به بیانی دیگر، جابه‌جایی‌های شعاعی و طولی به‌صورت $u_r(r)$ و $u_x(x)$ می‌باشند.

[1] Shear Deformation Theory (SDT)
[2] First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
[3] Functionally Graded Materials (FGM)
[4] Plane stress
[5] Plane strain
[6] Higher-order Shear Deformation Theory (HSDT)
[7] Matched Asymptotic Method (MAM)
[8] Hyperelastic
[9] Neo-Hookean
[10] Mooney-Rivlin
[11] Nonlinear Plane Elasticity Theory (NPET)

در غیاب نیروهای حجمی، معادلات تعادل[1] تنش عبارتند از:

$$\operatorname{div}\tilde{\sigma}=0\quad\begin{cases}\sigma_{r,r}+\dfrac{1}{r}\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)=0\\ \sigma_{x,x}=0\end{cases}\qquad(۱)$$

σ_r، σ_θ و σ_x به‌ترتیب تنش‌های شعاعی، محیطی و طولی هستند. جنس استوانه از مواد تراکم‌ناپذیر با تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک می‌باشد. در این پژوهش از مدل غیرخطی سن‌ونان-کیرشهف[2] (کرنش‌های پیکربندی مرجع) با جابه‌جایی‌های بزرگ استفاده شده است. معادلات سینماتیک[3] غیرخطی به‌صورت زیر هستند.

$$\tilde{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left[\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)+\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T+\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)\right]\qquad(۲)$$

با توجه به تقارن محوری استوانه (هندسه، جنس و بارگذاری) و جابه‌جایی‌های بزرگ در راستای شعاعی، معادلات سینماتیک (روابط کرنش–جابه‌جایی) عبارتند از:

$$\begin{cases}\varepsilon_r=u_{r,r}+\dfrac{1}{2}\left(u_{r,r}\right)^2\\ \varepsilon_\theta=\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}u_r\right)^2\\ \varepsilon_x=u_{x,x}\end{cases}\qquad(۳)$$

ε_r، ε_θ و ε_x به‌ترتیب کرنش‌های شعاعی، محیطی و طولی هستند. با توجه به شرایط هندسی، مادّی و مرزی خاص پوسته، تغییرشکل زاویه‌ای (کرنش برشی) و تغییرمکان زاویه‌ای (چرخش صلب) وجود ندارد و لذا از معادلات ساختاری[4] خطی هوکی و تنش کوشی استفاده شده است. معادلات ساختاری (روابط تنش-کرنش) را می‌توان در حالت‌های مختلف برای مواد هوکی همگن و همسانگرد به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد [۸].

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix}=E\begin{bmatrix}A & B\\ B & A\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix}\qquad(۴)$$
$$\sigma_x=\alpha\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right)$$

E مدول یانگ و ν نسبت پواسون، خواص مکانیکی مادّه‌ی استوانه هستند. A، B و α با توجه به شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شوند.

الف) تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

$$\sigma_x=0\ ,\ \varepsilon_x\neq 0\ ,\ \alpha=0$$
$$\begin{cases}A=\dfrac{1}{1-\upsilon^2}\ ,\ B=\dfrac{\upsilon}{1-\upsilon^2}\\ \upsilon^*=\dfrac{B}{A}=\upsilon\end{cases}\qquad(۵)$$

ب) کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته)

$$\sigma_x\neq 0\ ,\ \varepsilon_x=0\ ,\ \alpha=\upsilon$$
$$\begin{cases}A=\dfrac{1-\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ ,\ B=\dfrac{\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\\ \upsilon^*=\dfrac{B}{A}=\dfrac{\upsilon}{1-\upsilon}\end{cases}\qquad(۶)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۴) در معادله‌ی (۱):

$$\left[E\left(A\varepsilon_r+B\varepsilon_\theta\right)\right]_{,r}+\frac{1}{r}\left[E\left(A-B\right)\left(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta\right)\right]=0\qquad(۷)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۳) در معادله‌ی (۷) و با توجه به ثابت بودن E:

$$\left[A\left[u_{r,r}+\frac{1}{2}\left(u_{r,r}\right)^2\right]+B\left[\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_r\right)^2\right]\right]_{,r}+$$
$$\frac{(A-B)}{r}\left[\left[u_{r,r}+\frac{1}{2}\left(u_{r,r}\right)^2\right]-\left[\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_r\right)^2\right]\right]=0\qquad(۸)$$

پس از مشتق‌گیری و ساده کردن، نتیجه می‌شود.

$$\left(1+u_{r,r}\right)u_{r,rr}+\left(1+\frac{\upsilon^*}{r}u_r+\frac{1-\upsilon^*}{2}u_{r,r}\right)\frac{1}{r}u_{r,r}-$$
$$\left(1+\frac{1+\upsilon^*}{2r}u_r\right)\frac{1}{r^2}u_r=0\qquad(۹)$$

معادله‌ی (۹)، معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیّر می‌باشد که برای حل آن از روش بسط اغتشاشی مستقیم[5] استفاده می‌شود. ابتدا باید معادله دیفرانسیل را به کمک پارامترهای معرفی شده در پیوست، بی‌بعد کرد.

$$\left(1+\frac{h}{R}u^*_{r,r^*}\right)\frac{h}{R^2}u^*_{r,r^*r^*}+\left[1+\frac{\upsilon^*h}{Rr^*}u^*_r+\right.$$
$$\left.\left(\frac{1-\upsilon^*}{2}\right)\frac{h}{R}u^*_{r,r^*}\right]\frac{h}{R^2r^*}u^*_{r,r^*}-\qquad(۱۰)$$
$$\left[1+\left(\frac{1+\upsilon^*}{2}\right)\frac{h}{Rr^*}u^*_r\right]\frac{h}{R^2r^{*2}}u^*_r=0$$

با توجه به این‌که مشتقات مراتب بالاتر نسبت به مشتقات مراتب پایین‌تر، غالب نیستند؛ بنابراین معادله‌ی (۱۰) معرّف یک مسأله‌ی اغتشاشی غیرتکین (منظّم)[6] است. جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به‌شکل بسط اغتشاشی زیر قابل بازنویسی است.

$$u^*_r=u_0+\epsilon u_1+\dots\qquad(۱۱)$$

با استفاده از جای‌گذاری بسط اغتشاشی (۱۱) در معادله‌ی (۱۰) و سپس مرتب کردن معادله‌ی حاصل بر اساس توان‌های مختلف پارامتر اغتشاشی، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\left(u_{0,r^*r^*}+\frac{1}{r^*}u_{0,r^*}-\frac{1}{r^{*2}}u_0\right)+$$
$$\epsilon\left[\left(u_{1,r^*r^*}+\frac{1}{r^*}u_{1,r^*}-\frac{1}{r^{*2}}u_1\right)+\left(u_{0,r^*}\right)u_{0,r^*r^*}+\right.\qquad(۱۲)$$
$$\left.\left(\frac{\upsilon^*}{r^*}u_0+\frac{1-\upsilon^*}{2}u_{0,r^*}\right)\frac{1}{r^*}u_{0,r^*}-\left(\frac{1+\upsilon^*}{2r^*}u_0\right)\frac{1}{r^{*2}}u_0\right]+0\left(\epsilon^2\right)=0$$

از آن‌جا که ϵ عدد بسیار کوچکی است، معادله‌ی (۱۲) زمانی برقرار است که ضرایب توان‌های مختلف ϵ، برابر صفر باشند. بنابراین می‌توان یک معادله‌ی پیچیده‌ی غیرخطی را تبدیل به چندین معادله‌ی خطی ساده‌تر نمود که از نظر مرتبه‌ی بزرگی با یکدیگر متفاوت هستند. معادله با بزرگ‌ترین مرتبه‌ی بزرگی (ضریب ϵ^0) عبارت است از:

1 Equilibrium equations
2 Saint Venant-Kirchhoff
3 Kinematic equations
4 Constitutive equations

5 Straightforward perturbed expansion method
6 Nonsingular (regular) perturbed problem

$$u_{0,r^*r^*} + \frac{1}{r^*}u_{0,r^*} - \frac{1}{r^{*2}}u_0 = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{r^*}\left(r^* u_0\right)_{,r^*}\right)_{,r^*} = 0 \qquad (۱۳)$$

که یک معادله‌ی دیفرانسیل اویلر-کوشی است و جواب آن عبارت است از:

$$u_0(r^*) = r^{*m} \Rightarrow u_0 = C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} \qquad (۱۴)$$

که $u_r^* = u_0$ جواب خطی (PET) مسأله می‌باشد. معادله‌ی بعدی ضریب ϵ^1 است.

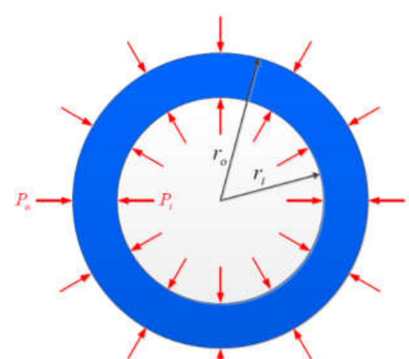
$$u_{1,r^*r^*} + \frac{1}{r^*}u_{1,r^*} - \frac{1}{r^{*2}}u_1 = -\Bigg[\left(u_{0,r^*}\right)u_{0,r^*r^*} + \left(\frac{\upsilon^*}{r^*}u_0 + \frac{1-\upsilon^*}{2}u_{0,r^*}\right)\frac{1}{r^*}u_{0,r^*} - \left(\frac{1+\upsilon^*}{2r^*}u_0\right)\frac{1}{r^{*2}}u_0\Bigg] \qquad (۱۵)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۱۴) در معادله‌ی (۱۵) و پس از مشتق‌گیری و ساده‌سازی نتیجه می‌شود.

$$\left(\frac{1}{r^*}\left(r^* u_1\right)_{,r^*}\right)_{,r^*} = 2\left(1+\upsilon^*\right)\frac{C_2^{\,2}}{r^{*5}} \qquad (۱۶)$$

با حل معادله‌ی (۱۶) مقدار u_1 به‌دست می‌آید.

$$u_1 = C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + \left(\frac{1+\upsilon^*}{4}\right)\frac{C_2^{\,2}}{r^{*3}} \qquad (۱۷)$$



شکل ۱- مقطع استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار

از آن‌جا که بارگذاری به‌صورت فشار داخلی و خارجی است، بنابراین شرایط مرزی به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=r_i} = -P_i \\ \sigma_r|_{r=r_o} = -P_o \end{cases} \qquad (۱۸)$$

برای اعمال شرایط مرزی ابتدا باید آنها را با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در پیوست، بی‌بعد کرد.

$$\begin{cases} \sigma_r^*|_{r^*=r_i^*} = -P_i^* \\ \sigma_r^*|_{r^*=r_o^*} = -P_o^* \end{cases} \qquad (۱۹)$$

با جای‌گذاری روابط تنش در شرایط مرزی (۱۹)، دو رابطه با توان‌های مختلفی از ϵ به‌دست می‌آید که اگر توان‌های مختلف ϵ در دو طرف تساوی با هم برابر قرار داده شوند، شرایط مرزی مربوط به هر معادله به‌دست می‌آید. بنابراین برای به‌دست آوردن ثابت‌های معادلات (۱۴ و ۱۷) از شرایط مرزی زیر استفاده می‌شود.

الف) شرایط مرزی بی‌بعدشده‌ی معادله‌ی (۱۳):

$$\begin{aligned} &a)\quad (A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r_i^{*2}} = -P_i^* \\ &b)\quad (A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r_o^{*2}} = -P_o^* \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

ب) شرایط مرزی بی‌بعدشده‌ی معادله‌ی (۱۶):

$$\begin{aligned} &a)\quad (A+B)C_3 - (A-B)\frac{C_4}{r_i^{*2}} = \frac{(3A-B)\left(1+\upsilon^*\right)}{4}\frac{C_2^{\,2}}{r_i^{*4}} - \frac{A}{2}\left(C_1 - \frac{C_2}{r_i^{*2}}\right)^2 - \frac{B}{2}\left(C_1 + \frac{C_2}{r_i^{*2}}\right)^2 \\ &b)\quad (A+B)C_3 - (A-B)\frac{C_4}{r_o^{*2}} = \frac{(3A-B)\left(1+\upsilon^*\right)}{4}\frac{C_2^{\,2}}{r_o^{*4}} - \frac{A}{2}\left(C_1 - \frac{C_2}{r_o^{*2}}\right)^2 - \frac{B}{2}\left(C_1 + \frac{C_2}{r_o^{*2}}\right)^2 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با حل دستگاه معادلات (۲۰)، ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{P_i^* - k^2 P_o^*}{(A+B)\left(k^2-1\right)} \\ C_2 = \dfrac{\left(P_i^* - P_o^*\right)r_o^{*2}}{(A-B)\left(k^2-1\right)} \end{cases} \qquad (۲۲)$$

که $k = r_o/r_i$ است. هم‌چنین با استدلال مشابه، ثابت‌های C_3 و C_4 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_3 = -\dfrac{C_1^2}{2} - \dfrac{\left(1-\upsilon^*\right)C_2^{\,2}}{4r_i^{*2}r_o^{*2}} \\ C_4 = -C_1C_2 - \dfrac{\left(1+\upsilon^*\right)\left(k^2+1\right)C_2^{\,2}}{4r_o^{*2}} \end{cases} \qquad (۲۳)$$

بنابراین جابه‌جایی شعاعی به‌صورت زیر قابل بازنویسی است.

$$u_r^* = C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} + \epsilon\left(C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + \left(\frac{1+\upsilon^*}{4}\right)\frac{C_2^{\,2}}{r^{*3}}\right) \qquad (۲۴)$$

حال برای به‌دست آوردن تنش‌های نرمال شعاعی، محیطی و محوری بی‌بعد، دو حالت درنظر گرفته می‌شود.

الف) اگر $u_r^* = u_0$ (حلّ خطی):

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \left((A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right) \\ \sigma_\theta^* &= \left((A+B)C_1 + (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right) \\ \sigma_x^* &= \alpha\left(\sigma_r^* + \sigma_\theta^*\right) = 2\alpha(A+B)C_1 \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

ب) اگر $u_r^* = u_0 + \epsilon u_1$ باشد (حلّ غیرخطی):

$$\sigma_r^* = \left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right] + \epsilon\left[(A+B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2r^{*4}}\right) - (A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{r^{*2}}\right) - (3A-B)\frac{(1+\upsilon^*)C_2^2}{4r^{*4}}\right]$$

$$\sigma_\theta^* = \left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right] + \epsilon\left[(A+B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2r^{*4}}\right) + (A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{r^{*2}}\right) + (A-3B)\frac{(1+\upsilon^*)C_2^2}{4r^{*4}}\right]$$

$$\sigma_x^* = 2\alpha\left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right] + 2\alpha\epsilon\left[(A+B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2r^{*4}} - \frac{(1+\upsilon^*)C_2^2}{4r^{*4}}\right)\right] \tag{۲۶}$$

تنش مؤثر با توجه به رابطه‌ی فُن میزس محاسبه می‌شود.

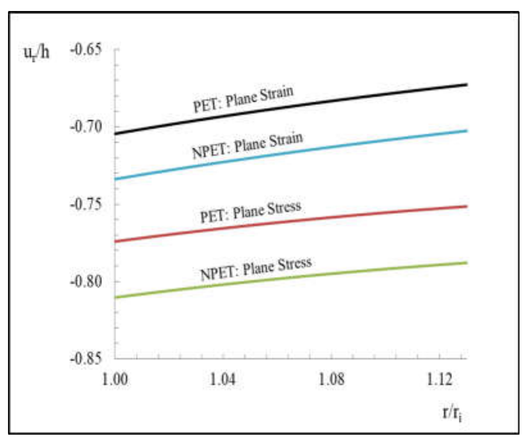
$$\sigma_{eff}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_r^* - \sigma_\theta^*\right)^2 + \left(\sigma_\theta^* - \sigma_x^*\right)^2 + \left(\sigma_x^* - \sigma_r^*\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲۷}$$

۳- اعتبارسنجی نتایج

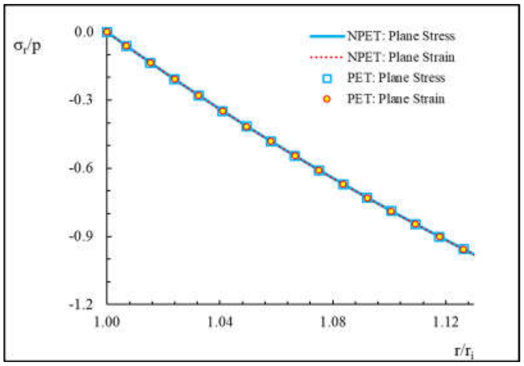
به منظور بررسی نتایج به‌دست آمده، مقایسه‌هایی انجام شده است.

۳-۱- مقایسه با مراجع دیگر

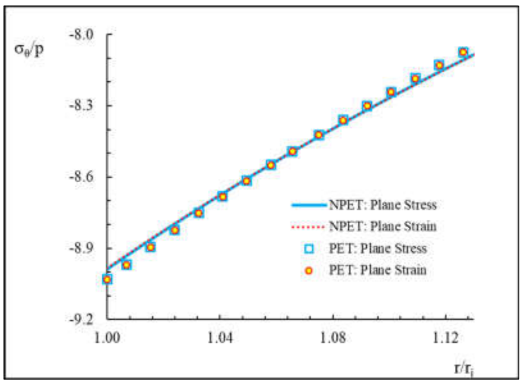
ابتدا توزیع تنش و جابه‌جایی در استوانه‌ی جدار ضخیم با حلّ حاصل از مرجع [۱] مقایسه شده است. استوانه‌ی جدار ضخیم به شعاع داخلی $r_i = 30\,mm$، شعاع خارجی $r_o = 34\,mm$، تحت فشار خارجی $P_o = 8\,MPa$ و مدول کشسانی $E = 0.7\,GPa$ درنظر گرفته شده است. شرط مرزی طولی استوانه در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای هستند.



شکل ۲- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد

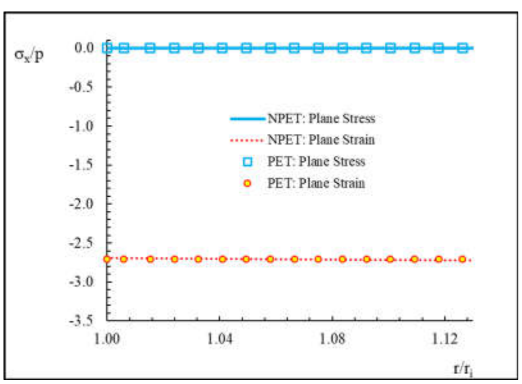


شکل ۳- توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد

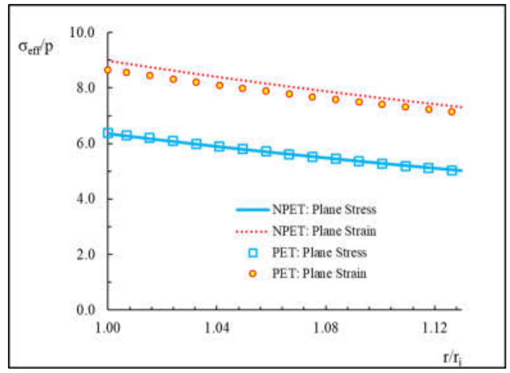


شکل ۴- توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد

شکل ۲ مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، شکل ۳ مقادیر بی‌بعد تنش نرمال شعاعی، شکل ۴ مقادیر بی‌بعد تنش نرمال محیطی، شکل ۵ مقادیر بی‌بعد تنش نرمال محوری (تنش محوری در حالت تنش صفحه‌ای صفر است) و شکل ۶ مقادیر بی‌بعد تنش فُن میزس را در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای نشان می‌دهند. همان‌طور که در تمامی شکل‌های ۲ تا ۶ مشاهده می‌شود، مقادیر به‌دست آمده در مطالعه‌ی حاضر بسیار دقیق‌تر از نتایج حاصل از حلّ نظریه‌ی کلاسیک است.



شکل ۵- توزیع تنش نرمال محوری بی‌بعد

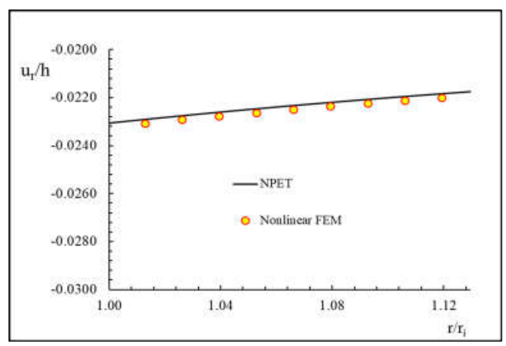


شکل ۶- توزیع تنش مؤثر بی‌بعد

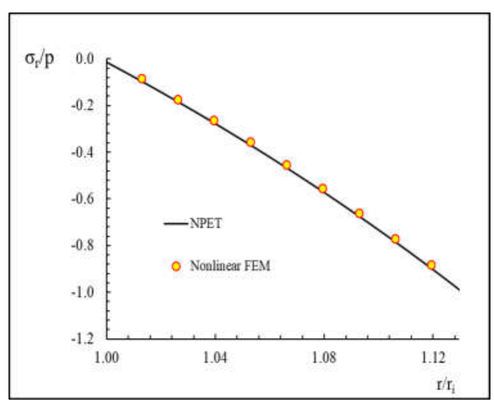
۳-۲- مقایسه با نتایج حلّ عددی

به منظور ارائه‌ی حلّ اجزای محدود، استوانه‌ی جدار ضخیم مذکور تحت فشار خارجی $P_o = 80\,MPa$ و مدول کشسانی $E = 200\,GPa$ با استفاده از نرم‌افزار آباکوس تحلیل شد.

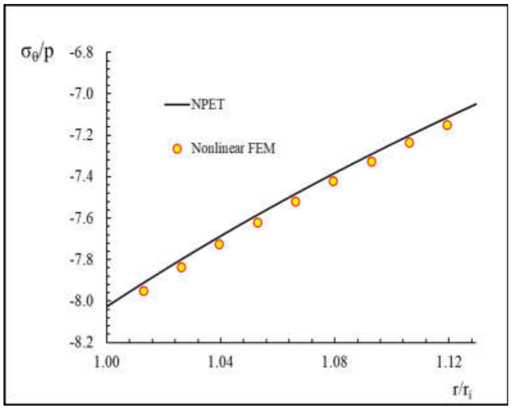
برای مدل‌سازی جداره‌ی استوانه با توجه به متقارن محوری بودن از المان Solid نوع CAX8R استفاده شده است که دارای ۸ گره به‌صورت چهارضلعی با اضلاع خمیده می‌باشد. در این المان علاوه بر گره‌های گوشه، گره‌ی دیگری در وسط اضلاع وجود دارد که امکان استفاده از تابع شکل غیرخطی (درجه‌ی دو) را برای درون‌یابی میسّر می‌کند. ماتریس سفتی این المان ۱۶*۱۶ می‌باشد. با مدل‌سازی مقطع طولی پوسته و اعمال بارگذاری فشاری می‌توان رفتار غیرخطی استوانه را بررسی کرد.



شکل ۷- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد



شکل ۸- توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد



شکل ۹- توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد

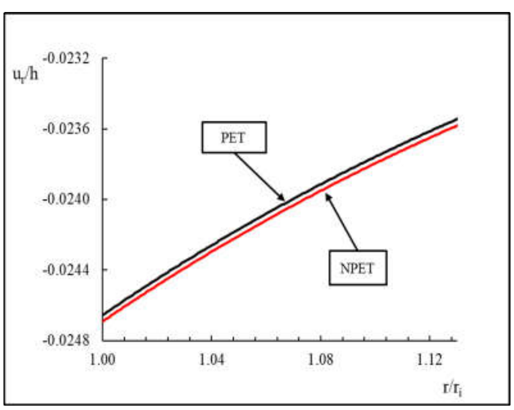
شکل ۷ مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، شکل ۸ مقادیر بی‌بعد تنش نرمال شعاعی و شکل ۹ مقادیر بی‌بعد تنش نرمال محیطی را در حالت کرنش صفحه‌ای نشان می‌دهند. در شکل‌های ۷ تا ۹ حلّ تحلیلی با حلّ عددی مقایسه شده است؛ همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های نرمال شعاعی و محیطی به‌دست آمده از هر دو حل برهم منطبق هستند.

۳-۳- پارامترهای مؤثر بر پاسخ غیرخطی

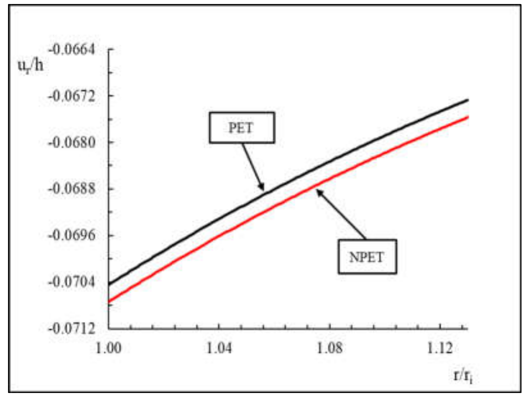
در ادامه، مقایسه‌های دیگری بین دو حل خطی و غیرخطی انجام شده که در آن اثر دو پارامتر، نرمی و ضخامت بر پاسخ غیرخطی بررسی شده است.

۳-۳-۱- اثر نرمی بر پاسخ غیرخطی

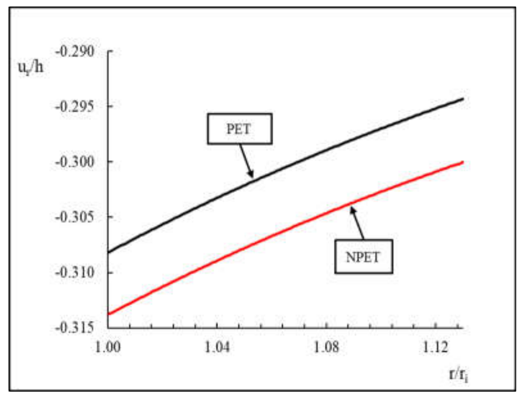
به‌منظور ارائه‌ی اثر پارامتر نرمی بر پاسخ غیرخطی مسأله، جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای همگن جدار ضخیم در شکل‌های ۱۰ تا ۱۳ برای چهار مقدار $P_o^* = 0.00914, 0.0032, 0.0914, 0.04$ رسم شده است، که $P_o^* = \frac{P_o}{\epsilon E}$ است. برای تمام نمودارهای این بخش $r_i = 30\,mm$، $r_o = 34\,mm$ و نسبت پواسون $\upsilon = 0.3$ درنظر گرفته شده است.



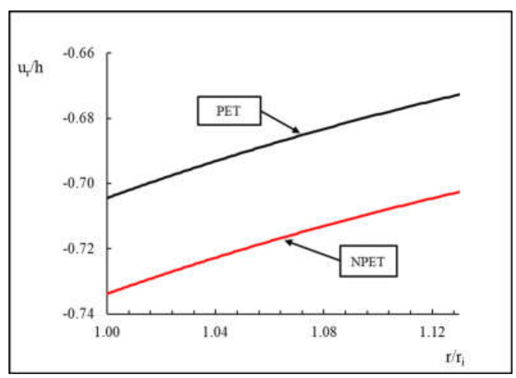
شکل ۱۰- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.0032$



شکل ۱۱- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.00914$



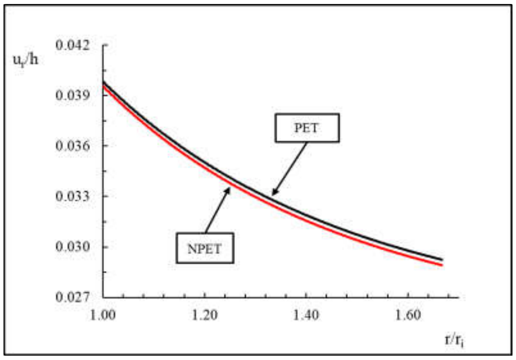
شکل ۱۲- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.04$



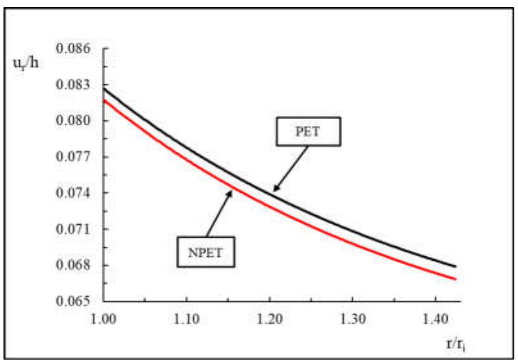
شکل ۱۳- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $P_o^* = 0.0914$

۳-۳-۲- اثر ضخامت بر پاسخ غیرخطی

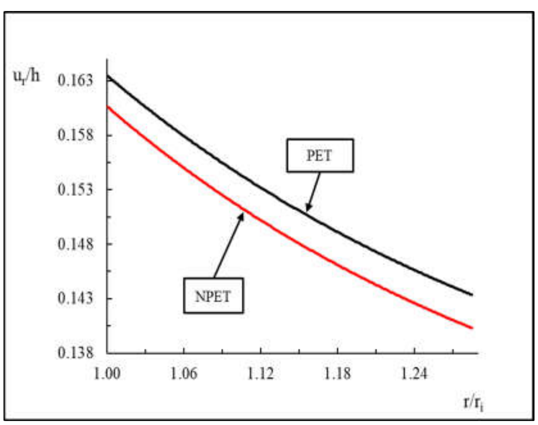
تغییرات ضخامت استوانه، دومین پارامتری است که در این مقاله، بر پاسخ غیرخطی اثر می‌گذارد. بدین منظور جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت فشار داخلی ثابت و یکنواخت $P_i^* = 0.0914$ همراه با ضخامت‌های مختلف بررسی شد که نتایج آن در شکل‌های ۱۴ تا ۱۷ آورده شده‌اند. برای تمامی نمودارها، شعاع لایه‌ی میانی $R = 40\,mm$ درنظر گرفته شده است.



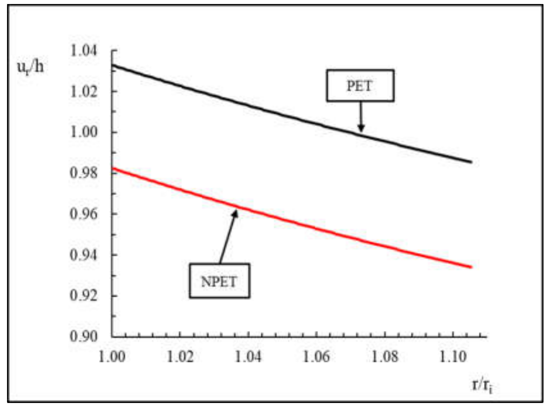
شکل ۱۴- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $h = 20\,mm$



شکل ۱۵- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $h = 14\,mm$



شکل ۱۶- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای $h = 10\,mm$



شکل ۱۷- توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به ازای h = 4 mm

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه به نتایج ارائه شده، ملاحظه می‌شود که توزیع تنش در استوانه‌ی تحت فشار، فقط تابع خواص مکانیکی مخزن می‌باشد. امّا توزیع جابه‌جایی علاوه بر خواص مکانیکی، تابع شرایط انتهایی استوانه نیز می‌باشد. هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر تنش نرمال شعاعی در راستای ضخامت استوانه‌ی تحت فشار خارجی، کاهش را نشان می‌دهند، در حالی‌که جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در راستای ضخامت افزایش می‌یابند. با توجه به تغییر در جنس و ضخامت استوانه، ملاحظه شد که تأثیر دو پاسخ خطی و غیرخطی در جابه‌جایی به دلیل جابه‌جایی‌های بزرگ مشهود است و در تنش‌ها به دلیل کرنش‌های کوچک ناچیز می‌باشد. رفتار پوسته‌های استوانه‌ای بسیار سفت و ضخیم (مانند پوسته‌های فولادی)، کاملاً خطی است. بنابراین در کاربردهای صنعتی و در فشارهای کاری متعارف، چشم‌پوشی از رفتار غیرخطی سازه، به شرط آن‌که پوسته نازک نباشد، خطای بسیار کمی را ایجاد می‌کند.

۵- فهرست علائم

علائم انگلیسی

E	مدول کشسانی، N/m^2
h	ضخامت، m
P	فشار، N/m^2
P^*	فشار بی‌بعد
R	شعاع لایه‌ی میانی، m
r^*	مختصه‌ی شعاعی بی‌بعد
u	جابه‌جایی، m
u^*	جابه‌جایی بی‌بعد

علائم یونانی

σ	تنش، N/m^2
σ^*	تنش بی‌بعد
ε	کرنش، m/m
υ	نسبت پواسون
ϵ	پارامتر اغتشاشی

۶- پیوست

معرفی مشتق‌گیری‌ها و پارامترهای بی‌بعدی که در معادله‌های (۸) تا (۲۷) از آن‌ها استفاده شده است.

$$u_r^* = \frac{u_r}{h} \quad (۲۸)$$

$$r^* = \frac{r}{R} \quad (۲۹)$$

$$\epsilon = \frac{h}{R} \ll 1 \quad (۳۰)$$

$$P^* = \frac{P}{\epsilon E} \quad (۳۱)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\epsilon E} \quad (۳۲)$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{R}\frac{d}{dr^*} \quad (۳۳)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{R^2}\frac{d^2}{dr^{*2}} \quad (۳۴)$$

۷- مراجع

[1] Truesdell C., *Mechanics of solids. Vol. II: Linear theories of elasticity and thermoelasticity*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] Naghdi P.M. and Cooper R.M., Propagation of elastic waves in cylindrical shells, including the effects of transverse shear and rotatory inertia. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, No.1, pp. 56-63, 1956.

[3] Mirsky I. and Hermann G., Axially symmetric motions of thick cylindrical shells, *Journal of the Applied Mechanics*, Vol. 25, No.1, pp. 97-102, 1958.

[4] Greenspon J.E., Vibrations of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 32, No.5, pp. 571-578, 1960.

[5] Koizumi M., FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 28, No.1-2, pp. 1-4, 1997.

[6] Fukui Y. and Yamanaka N., Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure. *JSME International Journal, Ser. I, Solid Mechanics*, Vol. 35, No.4, pp. 379-385, 1992.

[7] Zhifei S., Taotao Z. and Hongjun X., Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders. *Journal of the Composite Structures*, Vol. 79, pp. 140-147, 2007.

[8] Ghannad M. and Zamani-Nejad M., Complete elastic solution of pressurized thick cylindrical shells made of heterogeneous functionally graded materials. *Mechanika*, Vol. 18, No.6, pp. 640-649, 2012.

[9] Ghannad M. and Zamani-Nejad M., Elastic analysis of heterogeneous thick cylinders subjected to internal or external pressure using shear deformation theory. *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 9, No.6, pp. 117-136, 2012.

[10] Ghannad M. and Gharooni H., Displacements and stresses in pressurized thick FGM cylinders with varying properties of power function based on HSDT. *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 4, No.3, pp. 237-251, 2012.

[11] Ghannad M., Rahimi G.H. and Zamani-Nejad M., Determination of displacements and stresses in pressurized thick cylindrical shells with variable thickness using perturbation technique. *Mechanika*, Vol. 18, No.1, pp. 14-21, 2012.

[12] Ghannad M., Rahimi G.H. and Zamani-Nejad M., Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, No.1, pp. 338-396, 2013.

[13] Sanders J.L., Nonlinear theories for thin shells. *Journal of Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 21, No.1, pp. 21-36, 1963.

[14] Hughes T.J.R. and Liu W.K., Nonlinear finite element analysis of shells, Part I: Three-dimensional shells. *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 26, No.3, pp. 331-362, 1981.

[15] Tung H.V. and Bich D.H., Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No.9, pp. 1195-1204, 2011.

[16] Arefi M., Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder, *Acta Mechanica* , Vol. 224, No.11, pp. 2771-2783, 2013.

[17] Arefi M., Nonlinear electromechanical analysis of a functionally graded square plate integrated with smart layers resting on Winkler-Pasternak foundation, *Smart Structures and Systems*, Vol. 16, No.1, pp. 195-211, 2015.

[۱۸] عسگری م.، خان‌محمدی ع. و پارسا م.، تحلیل رفتار پلاستیک چرخه‌ای استوانه‌ی جدار ضخیم با مواد هدفمند براساس مدل سخت‌شوندگی سینماتیکی غیرخطی. *مجله‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، دوره ۴۸، ش. ۲، ص‌ص ۲۰۱-۲۰۸، ۱۳۹۷.

[19] Gharooni H. and Ghannad M., Nonlinear analysis of radially functionally graded hyperelastic cylindrical shells with axially-varying thickness and non-uniform pressure loads based on perturbation theory. *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 50, No.2, pp. 324-340, 2019.

[20] Gharooni H. and Ghannad M., Nonlinear analytical solution of nearly incompressible hyperelastic cylinder with variable thickness under non-uniform pressure by perturbation technique, *Journal of Computational Applied Mechanics*, Vol. 50, No.2, pp. 395-412, 2019.

[21] Hashemi S. and Jafari A.A., Nonlinear Free and Forced Vibrations of In-Plane Bi-Directional Functionally Graded Rectangular Plate with Temperature-Dependent Properties, *Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 20, No.8, pp. 2050097-2050129, 2020.