نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۱، جلد ۵۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحه ۱۴۵-۱۵۲ – پژوهشی کامل – DOI: 10.22034/jmeut.2022.49808.3041

تشخیص وجود ترک در تیر یکسرگیردار با استفاده از روش حسگری فشرده(CS)

رحیم نظری بیگدیلو کارشناسی ارشد، گروه علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، rahimnazari1369@gmail.com

صفر ایراندوست پاکچین* دانشیار، گروه علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، s.irandoust@tabrizu.ac.ir

چکیده

یکی از اولین مشخصات سازه آسیب دیده، تغییر در سختی موضعی سازه و در نتیجه تغییر فرکانس‌های زمانی آن می‌باشد. در سال‌های اخیر حسگری فشرده (CS) در حوزه‌ی فرکانس به موفقیت‌های قابل توجهی در مقایسه با روش نمونه‌برداری نایکوئیست دست پیدا کرده است. حسگری فشرده، بر این مبنا استوار است که بیشتر سیگنال‌های زمانی وقتی در یک مبنای مناسب (مانند: مبنای موجک، فوریه و ...) نمایش داده می‌شوند پهنای باند فرکانسی آنها بالا هست و درنتیجه می‌توان در هنگام نمونه‌برداری از برخی بخش‌های طیف فرکانسی سیگنال صرف‌نظر کرد. در نتیجه می‌توان تعداد نمونه‌ها را در مقایسه با نرخ نایکوئیست به طور چشم‌گیری کاهش داد. در این تحقیق برای نخستین بار با بکارگیری الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP)، و الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT)، به تشخیص وجود ترک در یک تیر یکسر گیردار، با کمترین نرخ نمونه‌برداری از سیگنال آن پرداخته شده است که از الگوریتم‌های شناخته شده در حسگری فشرده هستند. نتایج عددی حاصل از این الگوریتم‌ها برتری الگوریتم (OMP) در مقایسه با الگوریتم(IHT) برای تشخیص وجود ترک در تیر یکسر گیردار نشان می‌دهد. نتایج حاصل از این روش حاکی از آن است هنگامی که نسبت سیگنال به نویز گاوسی (SNR) کم است، روش پیشنهادی عملکرد بهتری دارد.

واژه‌های کلیدی: تیر یکسرگیردار، ترک‌دار، حسگری فشرده، نمونه‌برداری نایکوئیست، سیگنال پراکنده، بازیابی محمل سیگنال.

Detecting the Presence of Crack in a Beam with Compressive Sensing (CS)

R. Nazari-Bigdilou Faculty of Mathematical Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran

S. Irandoust-Pakchin Faculty of Mathematical Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract

One of the first characteristics of a damaged structure is a change in the local stiffness of the structure and the consequent change in its natural frequencies. In recent years, Compressive Sensing (CS) has achieved remarkable success compared to the Nyquist sampling rate. Compressive Sensing is based on the fact that most natural signals are sparse when displayed on a suitable basis (such as wavelet, Fourier, etc.), so that when sampling signals, sampling of unnecessary parts of the signal can be omitted. As a result, it significantly reduced the number of samples compared to the Nyquist rate. In this research, for the first time, an Orthogonal Matching Pursuit algorithm (OMP) and an Iterative Hard-threshold algorithm (IHT) to detect the presence of cracks in a beam with the lowest signal sampling rate (SNR) are used. The results of this method indicate that when the Gaussian signal-to-noise ratio (SNR) is low, the proposed method performs better.

Keywords: Beam, Cracked, Compressive Sensing, Nyquist sampling, Sparse signal, Recovery of signal's support.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، به منظور شناسایی محل و عمق ترک در یک تیر، مطالعات تجربی مختلفی انجام شده است و چندین روش توسط بسیاری از نویسندگان در سال‌های اخیر ارائه شده است [۱-۸]. تیرها بخش مهم و ضروری یک سازه در زمینه‌های مختلف از جمله، مهندسی سازه، مکانیک و سازه‌های فضانوردی هستند. محققان متعددی اثرات عیب بر روی رفتار ارتعاشی تیر ترک دار را مورد بررسی قرار داده‌اند. دوبلینگ خلاصه‌ای از تحقیقات انجام شده در زمینه شناسایی ترک در سازه‌ها بر اساس آنالیز ارتعاشی را ارائه کرده است[۹]. آدامز و پیِ ارتعاش طولی تیر ترک دار را مورد بررسی قرار دادند[۱۰]. آنها به منظور این تحلیل، ترک را به صورت یک فنر بدون جرم و با طول بی‌نهایت کوچک که دو جزء تقسیم شده تیر در محل ترک را به هم مرتبط می‌سازد، مدل کردند. اوستاچوویچز و کراوسوزیک [۱۱] به بررسی اثر ترک بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر یکسرگیردار با دو ترک پرداختند. آنها با استفاده از مکانیک شکست سفتی معادل ترک در محل ترک را به دست آوردند و با استفاده از معادله فرکانسی تیر، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار را محاسبه کردند. دوکا[۱۲] برای تشخیص ترک در تیرهای دارای دو ترک باز در امتداد تیر تحقیقی انجام داد و نشان داد که وجود ترک باعث تغییر در فرکانس‌های طبیعی تیر می‌شود که می‌توان از آن به عنوان یک مشخصه در تشخیص ترک استفاده کرد. سینها و فریسول [۱۳] با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی به بررسی رفتار ارتعاشی و ترک‌یابی در تیر ترک‌دار پرداخته‌اند. در تحقیق صورت گرفته توسط امینه مقصودی و همکاران[۱۴]، به تشخیص آسیب چند ترک تیرهای چندگانه توسط یک شاخص آسیب مبتنی بر شاخص انعطاف‌پذیری محلی پرداختند. در جدیدترین تحقیق توسط خاتیرا و همکاران [۱۵] با عنوان روش شناسایی ترک در ساختارهای شبه-تیر با استفاده از تغییر در فرکانس‌های اندازه‌گیری شده آزمایشی و بهینه سازی ازدحام ذرات، به شناسایی ترک با تکنیک تغییر در انعطاف‌پذیری موضعی نزدیک ترک پرداخته شده است. در تحقیق توسط دکتر موسی رضائی و دکتر رضا حسن نژاد [۱۶] رویکردی جدید برای تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر با ترک تنفسی بر اساس روش تراز مکانیکی انرژی صورت

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: s.irandoust@tabrizu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۰/۱۰/۱۷
تاریخ پذیرش: ۰۱/۰۵/۳۱

گرفته شده است. ایده‌ی حسگری فشرده برای بازیابی سیگنال‌های با پهنای باند فرکانسی بالا با کمترین نرخ نمونه‌برداری، اولین باردر مرجع [۱۷] مطرح شد. در سال‌های اخیر شاهد فعالیت‌های تحقیقاتی گسترده‌ای در مبحث جذاب حسگری فشرده، سنجش فشرده یا نمونه برداری فشرده بوده‌ایم. حوزه سنجش فشرده نام خود را از این فرضیه می‌گیرد که جمع آوری و فشرده‌سازی داده‌ها را می‌توان به طور هم زمان انجام داد. این کار امکان پذیر است زیرا بسیاری از سیگنال‌های موجود در دنیای واقعی با پهنای باند فرکانسی بالا و تنک هستند.

در این تحقیق برای نخستین بار با بکارگیری الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی[1] و نیز الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت[2] که هر کدام از الگوریتم‌های شناخته شده در حسگری فشرده هستند، به تشخیص وجود ترک در تیر یکسرگیردار پرداخته شده است. نتایج روش (OMP) و روش آستانه گذاری سخت (IHT) را در تشخیص وجود ترک را باهم مقایسه شده و نشان داده شده است که الگوریتم (OMP) در مقایسه با الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT) برای تشخیص وجود ترک در حضور نسبت سیگنال[3] به نویز پایین و با نویز گاوسی[4] متفاوت با نرم[5] l^2 و نرم l^∞ از دقت و سرعت بالایی برخوردار است.

ساختار تحقیق به شرح زیر است:

در بخش دوم معرفی حسگری فشرده آورده شده است و در بخش سوم نیز به شناسایی فرکانس‌های زمانی در تیر یکسرگیردار با استفاده از روش حسگری فشرده مطرح شده است. بخش چهارم نیز به شرط توقف الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP) در حضور و بدون حضور نویز پرداخته شده است. بخش پنجم به الگوریتم تکراری آستانه گذاری سخت (IHT) اختصاص یافته است و در بخش‌های ششم و هفتم، به ترتیب به نتایج عددی و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

۲- معرفی و روابط ریاضی روش حسگری فشرده

بازسازی سیگنال‌های با پهنای باند فرکانسی بالا و آغشته به نویز گوسی با حداقل تعداد اندازه‌گیری‌های خطی یکی از مسائل مهم در پردازش سیگنال است. از آنجا که اکثر سیگنال‌ها در هنگام نمایش بر حسب یک تبدیل مناسب (موجک‌ها، فوریه ...) دارای نمایش با پهنای باند فرکانسی بالا هستند. به عبارتی وقتی سیگنالی را برحسب یک تبدیل مناسب (موجک‌ها، فوریه و...) نوشته می‌شود، بیشتر ضرایب این تبدیل صفر و یا نزدیک به صفر هستند. بنابراین از این ضرایب هنگام نمونه‌برداری از سیگنال صرف‌نظر می‌شود. به طور خاص مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$y = \psi x + \varepsilon \qquad (۱)$$

که در آن $y \in \mathbb{R}^m$ سیگنال مشاهده شده و $\psi \in \mathbb{R}^{m\times N}$ ماتریس حسگری و $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ خطای اندازه‌گیری شده یا به اصطلاح نویز است. نرخ سیگنال به نویز (SNR) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SNR = 20\times \log(\frac{signal}{noise}) \qquad (۲)$$

که برای سادگی در نماد گذاری از n استفاده گردید. یعنی n= SNR= ε .
فرض کنید $\psi = (\psi_1\ \psi_2 \cdots \psi_N)$ که ψ_i نمادi -امین ستون ماتریسψ است و همچنین فرض کنید که ستون‌های ماتریسψ نرمال شده هستند یعنی:

$$\forall t = 1\ 2 \cdots N \qquad \|\psi_t\|_2 = 1. \qquad (۳)$$

هدف بازسازی بردار نامعلوم (سیگنال)$x \in \mathbb{R}^N$ بر اساسψ وy است. حالتی که بیشترین توجه را به خود جلب کرده و یک چالش محسوب می‌شود، زمانی است که بعد سیگنال یعنیN خیلی بزرگتر از تعداد اندازه‌گیری‌ها یعنی m باشد ($m \ll N$). تنک‌ترین جواب ممکن برای دستگاه معادلات خطی فرومعین با استفاده از مینیم‌سازی نرمl^0 برای بردار x حاصل می‌شود. ولی این مسئله‌ی دارای بیشمار جواب می‌باشد که به آن NP - سخت می‌گویند که به راحتی این دستگاه معادلات فرومعین قابل حل نمی‌باشد.

یک روش جایگزین با پیچیدگی محاسباتی کمتر برای دستگاه فوق، استفاده از کمینه‌سازی با نرم l^1 برای بردارx می‌باشد که به صورت زیر است:

$$\hat{x} = arg\,min\|x\|_{l^1} \quad s.t. \qquad \psi x = y \qquad (۴)$$

که در آن$\|x\|_{l^1} = \sum_{i=1}^{N}|x_i|$. با اعمال شرط اضافه با نام خاصیت ایزومتری محدود[6] روی ماتریس ψ دستگاه معادلات l^0 و l^1 معادل‌اند. مسئله کمینه سازی با نرم l^1 یک مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب است و بنابراین از لحاظ پیچیدگی محاسباتی ساده است. در این حالت تعداد نمونه‌ها m با فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$m \approx O(k\,ln(N/k)) \qquad (۵)$$

تکیه‌گاه بردار[7] $x = (x_1\, x_2 \cdots x_N)$ به صورت $supp(x) = \{t: x_t \neq 0\}$ تعریف می‌شود و گوییم بردارx، k- تنک[8] است هرگاه رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\mathrm{card}(\mathrm{supp(x)}) = |\mathrm{supp(x)}| \leq \mathrm{k} \qquad (۶)$$

در معادله‌ی (۵) مقدارk تعداد مولفه‌های غیرصفر بردار x می‌باشد که پراکندگی(تنکی) این بردار را نشان می‌دهد. در حوزه‌ی پردازش سیگنال به طور گسترده از خاصیت جفت عدم همبستگی[9] استفاده می‌شود. جفت عدم همبستگی (MIP) به صورت معادله‌ی (۶) در زیر تعریف می‌شود.

$$\mu = \max_{i\neq j}|< \psi_i\ \psi_j >| \qquad (۷)$$

هدف (MIP) به حداقل رساندن مقدار μاست. خواص دیگری که در حسگری فشرده مورد استفاده قرار می‌گیرند، خاصیت ایزومتری محدود و خاصیت شرط بازسازی دقیق[10] است. بررسی شرط (MIP) برای ماتریس داده شده‌یψ بسیار دشوار است. به عبارتی دیگر، شرط (MIP) از هر دو شرط (RIP) و (ERC) قوی‌تر است. شرط (MIP)، شرایط (RIP) و (ERC) را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن برقرار نیست. در این تحقیق تمرکز روی (MIP) خواهد بود. زیرا شرایط را به طور

[1] Orthogonal Matching Pursuit
[2] Iterative Hard Thresholding
[3] Signal to Noise Ratio
[4] Gaussian noise
[5] Norm

[6] Restricted Isometry Property
[7] Support
[8] K- sparse
[9] Mutual Incoherence Property
[10] Exact Recovery Condition

مستقیم بررسی می‌کند و نتایجی که به دست می‌آیند تحت (ERC) است.

در این تحقیق الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP) را برای بازسازی تکیه‌گاه سیگنال x که k تنک می‌باشد، براساس مدل مسئله‌ی (۱) به کار گرفته شده است. همچنین نتایج حاصل از این الگوریتم (OMP) را با الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT) در حضور کران‌های نویز گاوسی متفاوت مورد آزمایش قرار گرفته است. با انتخاب ماتریس تصادفی به عنوان ماتریس حسگری، روش (CS) ممکن است در بازسازی سیگنال‌های دیگر نیز بصورت یک روش کاملا کارا عمل کند. یک مثال از بازسازی سیگنال با استفاده از کمینه سازی با نرم l^1 با روش حسگری فشرده (CS) در حوزه‌ی زمان را سیگنال $y(t) = \sin(\pi t) - 0.5\sin(4\pi t)$ در نظر بگیرید. برای این مورد محدوده فرکانسی $\Omega_N = [0\ \ 2.5]Hz$ و $k = 2$ و نیز تغییرات فرکانسی $\Delta f = 0.1Hz$ با $N = 26$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از کوچکترین کران به دست آمده فرمول (۴) مقدار $m = 7$ قرار گرفته است. همچنین ماتریس $\psi \in \mathbb{R}^{m\times N}$ را با ساختار

$$\psi_{j\,i} = sin(\omega_i t_j) \quad \omega_i = (2\pi f_i) \qquad rad/s$$
$$f_i = [0\ \ 0.1\ \ 0.2\ \dots\ 2.4\ \ 2.5]Hz$$

در نظر گرفته شده است. در شکل (۱) به بازسازی سیگنال نشان داده شده با دو مورد نمونه‌برداری تصادفی از سیگنال پرداخته شده است. در این شکل روش نمونه‌برداری تصادفی اولی در شکل۱ (a) با ۷ (m=7) نقطه‌ی سیاه تصادفی روی سیگنال اصلی و نیز در قسمت (c) روش نمونه‌برداری تصادفی دومی با تعداد نقاط برابر روش اولی نمایش داده شده است. به ترتیب نتایج بازسازی از هر دو روش تصادفی اولی و دومی در شکل ۱ قسمت‌های (b) و (d) رسم شده است. حال برای مقایسه روش نمونه‌برداری قدیمی(نایکوئیست) و روش حسگری فشرده بازیابی سیگنال دیگری با فرمول فرکانسی (۷) زیر در حوزه‌ی زمان با هر دو روش یعنی روش قدیمی و حسگری فشرده انجام شده است.

$$y(t) = sin\left(\frac{3}{10}2\pi t\right) + 0.5\,sin\left(\frac{17}{10}2\pi t\right). \tag{۸}$$

با اعمال روش حسگری فشرده، دامنه‌ی فرکانسی را در محدوده‌ی $\Omega_n = [0\ \ 2.5]Hz$ و $k = 2$ با تغییرات فرکانسی $\Delta f = 0.1Hz$ و همچنین با $N = 26$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از کوچکترین کران به دست آمده از معادله (۴) مقدار m=7 انتخاب می‌شود. ماتریس $\psi = \mathbb{R}^{m\times N}$ را با ساختار

$$\psi_{j\,i} = sin(\omega_i t_j) \quad \omega_i = (2\pi f_i) \qquad rad/s$$
$$f_i = [0\ \ 0.1\ \ 0.2\ \dots\ 2.4\ \ 2.5]Hz$$

فرض شده است. شکل۲ (a) سیگنال و نمونه‌برداری تصادفی را نشان می‌دهد. بازسازی فرکانسی با استفاده از مینیمم‌سازی با نرم l^1 نیز در شکل۲ (b) ترسیم شده است. می‌توان مشاهده کرد که بازیابی نسبتا دقیقی از سیگنال را تنها با تعداد ۱۰ نمونه‌برداری صورت گرفته است. ولی زمانی که از روش قدیمی برای بازسازی سیگنال استفاده شده است حتی با تعداد ۲۰ نمونه‌برداری ، سیگنال بازیابی شده دارای خطای قابل ملاحظه‌ای است (شکل۲ (c) خطوط با رنگ قرمز). دقت بازیابی با نرم l^1 با تعداد ۱۰ نمونه‌برداری معادل با بازسازی تبدیل فوریه سریع[1] با تعداد ۵۰ نمونه در نظر گرفته شده است.

۳- شناسایی فرکانس‌های زمانی در تیر کسرگیردار با استفاده از روش حسگری فشرده

تیر یکسرگیردار دارای یک انتهای ثابت و یک انتهای آزاد است. انتهای ثابت بدون هیچ گونه انحنا و با شیب صفر در زمان ارتعاش تیر در نظر گرفته شده است. در این بخش کاربرد روش حسگری فشرده در بازسازی سیگنال‌های زمانی حاصل از جمع آوری داده‌های ارتعاشی در یک مکان تیر مطرح شده است. جواب‌های β_q در معادله‌ی (۷) به صورت

$$\beta_q = [1.875\ \ 4.694\ \ 7.855\ \dots]$$

هستند. پاسخ به ارتعاش در مکان عیب $\bar{x}$ طبق شکل ۳ به صورت زیر آورده شده است،

$$\begin{aligned} y(\bar{x},t) &= \sum_{q=1}^{\infty}(A_q\cos(\omega_q t) + B_q\sin(\omega_q t)W_q(\bar{x}) \\ &= \sum_{q=1}^{\infty}\left(\overline{A_q}(\bar{x})\cos(\omega_q t) + \left(\overline{B_q}(\bar{x})\sin(\omega_q t)\right)\right) \end{aligned} \tag{۹}$$

که در فرمول (۸) مولفه‌ی $\bar{x}$ مکان ترک در تیر، t زمان و y سیگنال اندازه‌گیری شده هستند. همچنین،

$$W_q(x) = \left[\sin(\beta_q x)\sinh(\beta_q x)\right] - \alpha_q\left[\cos(\beta_q x) - \cosh(\beta_q x)\right]$$
$$\cos(\beta_q x)\cdot\cosh(\beta_q x) = -1$$
$$\alpha_q = \frac{\sin(B_q L)\ + \sinh(\beta_q L)}{\cos(\beta_q L) - \cosh(\beta_q L)}$$

و

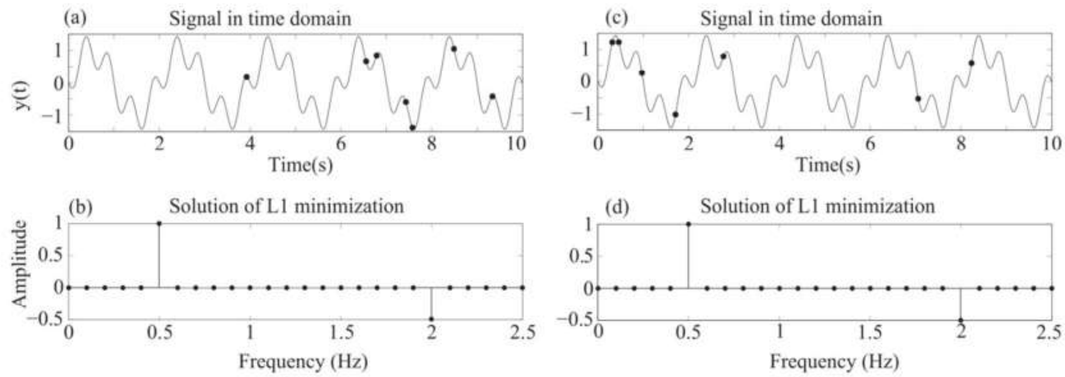
$$\overline{A_q}(\bar{x}) = A_q W_q(\bar{x})$$
$$\overline{B_q}(\bar{x}) = B_q W_q(\bar{x})$$

در نظر گرفته شده است. فرکانس زمانی ω_q در $\omega_q = \beta_q^2\sqrt{EI/\rho A}$ صدق می‌کند.

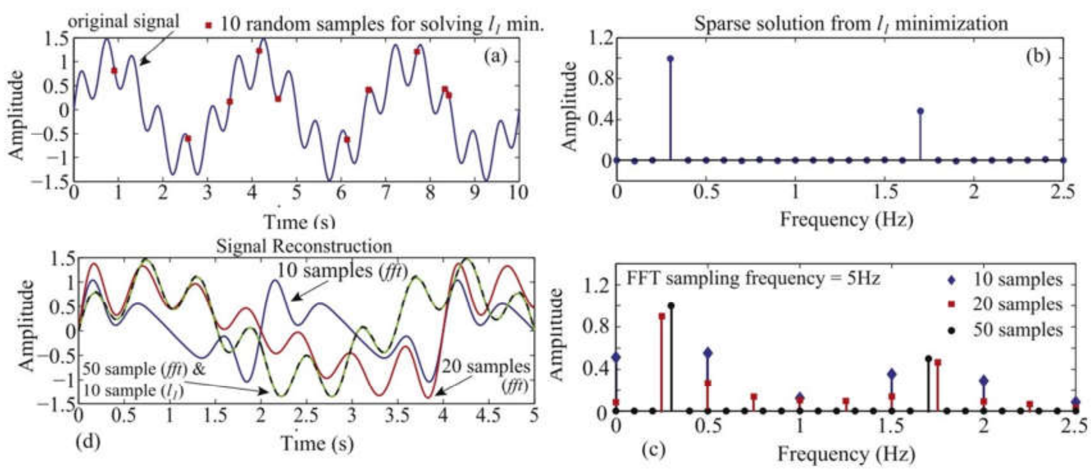
ساختار معادله‌ی (۸) برای مسئله‌ی کمینه سازی بر اساس مدل بازسازی فرکانسی با روش حسگری فشرده مناسب است. مشخصات تیر یکسرگیردار در نظر گرفته شده دارای خواص $L = 1$ و $\rho A = 1$ و نیز $EI = 1$ فرض شده‌اند. زیرا این خواص باید در مدل‌بندی مسئله کمینه سازی با نرم l^1 یعنی در معادله (۲) صادق باشند. همچنین با این خواص طبق رابطه‌ی $\omega_q = \beta_q^2\sqrt{EI/\rho A}$ فقط اثر تغییرات در فرکانس‌های زمانی تیر مورد سنجش قرار گرفته و ویژگی ساختاری خود تیر مورد سنجش قرار نمی‌گیرد. فرکانس‌های زمانی ω_q برابر $[3.52\ \ 22.03\ \ 61.7\ \dots]$ برحسب $\frac{rad}{s}$ در نظر گرفته شده است. ارتعاش آزاد تیر با مدل‌بندی گسسته‌سازی شامل $N_{e_l} = 500$ داده می‌باشد. در شکل۳ مدل اولیه‌ی تیر با $y(x,0) = 0.6W_1(x) + 0.4W_2(x)$ در نظر گرفته شده است که شبیه‌سازی برای نمونه ترکیبی از دو شکل مودی اولیه تیر است.

[1] Fast Fourier Transform

نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۱، جلد ۵۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحه ۱۴۵-۱۵۲ – پژوهشی کامل – رحیم نظری بیگدیلو و صفر ایراندوست پاکچین

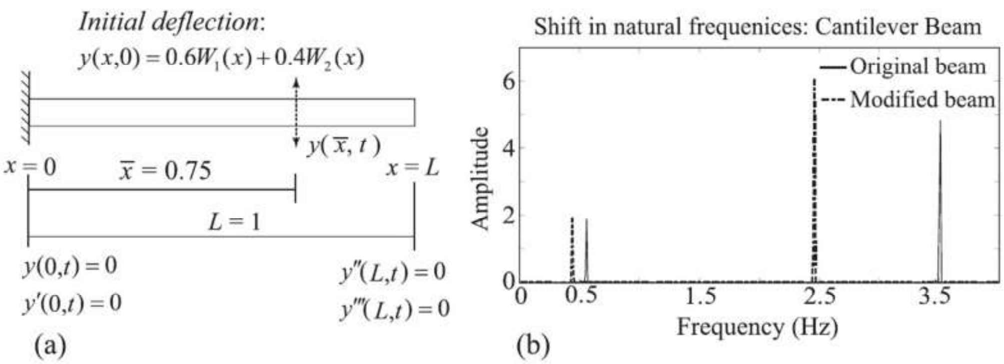


شکل۱- (a) روش نمونه‌برداری تصادفی اولی با ۷ (m=7) نقطه‌ی تصادفی روی سیگنال اصلی، (b) بازسازی سیگنال با استفاده از کمینه سازی با نرم l^1 با روش تصادفی اولی، (c) روش نمونه‌برداری تصادفی دومی با ۷ (m=7) نقطه‌ی تصادفی روی سیگنال اصلی، (d) بازسازی سیگنال با استفاده از کمینه سازی با نرم l^1 با روش تصادفی دومی.



شکل ۲- (a) سیگنال و نمونه‌برداری تصادفی، (b) جواب تنک با استفاده از بهینه‌سازی با نرم l^1، (c) تبدیل فوریه سریع(FFT) سیگنال با تعداد نمونه‌برداری ۱۰،۲۰ و۵۰ از سیگنال و با رنگ‌های متفاوت برای تعداد نمونه‌برداری‌های مختلف، (d)سیگنال بازیابی شده با روش FFT برای تعداد ن نمونه‌برداری‌ها ۱۰ با رنگ آبی، ۲۰ با رنگ قرمز و با ۵۰ با رنگ سیاه.

حضور عیب در تیر از $EI = 1$ تا 0.1 در قسمت $0.4L \le x \le 0.5L$ معرفی شده است. پاسخ ارتعاشی تیر در حوزه‌ی زمان برای قبل و بعد از اندازه‌گیری در موقعیت عیب $\bar{x} = \frac{3}{4}L$ با نمونه‌برداری تصادفی صورت گرفته شده است. مسئله‌ی کمینه‌سازی با نرم l^1 با مقادیر $\omega_r = 4Hz = 8\pi\ \frac{rad}{s}$ و $\Delta\omega = 0.01Hz = 0.02\pi\ \frac{rad}{s}$ اعمال شده است. نتیجه برای $N = 401$ مشخص شد. ولی در اینجا با تعداد ۱۵ نمونه‌برداری (m=15) اندازه‌گیری تصادفی بکار برده شده است که این مقدار با مقدار m=15 پیشنهاد شده توسط معادله‌ی (۴) بر مبنای $k = 4$ برای بازسازی دو سیگنال زمانی قابل مقایسه است. موفقیت بازسازی سیگنال مذکور توسط روش حسگری فشرده به وضوح در شکل ۳(b) قابل مشاهده است. کاهش مقدار EI ناشی از حضور عیب در تیر، منجر به کاهش فرکانس‌های زمانی از $\omega_1 = 0.56Hz$ ، $\omega_2 = 3.51Hz$ به ترتیب برابر$0.44Hz$ و $2.44Hz$ می‌باشند. در بیشتر موارد مرتبط با سیگنال، حضور نویز غیر قابل اجتناب است. بنابراین در ادامه مسئله‌ی بازسازی فرکانس‌های زمانی را در حضور نویز گاوسی بررسی شده است. برای این کار از الگوریتم های پایه های متعامد تعقیبی (OMP) و الگوریتم تکراری آستانه گذاری سخت (IHT) بهره گرفته شده است. در ادامه به معرفی هر دو الگوریتم مذکور پرداخته شده است.



شکل۳- (a) مدل تیر یکسرگیردار با حضور عیب در تیر (b) تغییر در فرکانس‌های زمانی ناشی از وجود عیب در تیر، نمونه‌برداری با استفاده از روش CS به تعداد ۱۵ نمونه.

۴- شرط توقف و مراحل الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP) در حضور و بدون حضور نویز گاوسی

در این بخش به جزئیات الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP) پرداخته شده است. (OMP) یک الگوریتم تکراری است که در هر مرحله با اخذ ستونی از ماتریس ψ که بیشترین همبستگی[1] را با سایر ستون‌ها دارد، اجرا می‌شود و این ستون به مجموعه ستون‌های انتخاب شده اضافه می‌شود. این الگوریتم با تصویر کردن سیگنال مشاهده شده‌ی y روی زیرفضای خطی تولید شده توسط ستون‌هایی که تاکنون انتخاب شده بوده‌اند به روز می‌شود و الگوریتم به همین ترتیب تکرار می‌شود. در مقایسه با سایر روش‌ها، برتری الگوریتم (OMP) در سادگی محاسبات و سرعت بالای آن است. در سال‌های اخیر این الگوریتم برای بازسازی سیگنال و تقریب آن مورد استفاده قرار گرفته است. شرط $\mu < \frac{1}{2k-1}$ یک شرط مناسب برای بازسازی محمل k- تنک سیگنال x است. شرط فوق نتیجه‌ی درستی برای بازسازی محمل k- تنک سیگنال x است. در این تحقیق نیز حالت کلی الگوریتم (OMP) را برای زمانی که نویز گاوسی حضور دارد، در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه در هر مرحله از الگوریتم (OMP)، ستون‌های متعامد یکه از ماتریس ψ انتخاب می‌شوند لذا هیچ یک از ستون‌های انتخابی، دو بار انتخاب نمی‌شوند و مجموعه ستون‌های انتخابی در هر مرحله بزرگتر می‌شود. یکی از ویژگی‌های کلیدی و مهم الگوریتم تکراری (OMP)، شرط توقف آن است. در این تحقیق به طور خاص شرط توقف این الگوریتم را بر روی کران‌های نویز گاوسی قرار داده شده است. همچنین نشان داده شده که این الگوریتم کل داده‌های سیگنال اولیه را بازسازی می‌کند. نتایج تحت شرایط (MIP) و $\mu < \frac{1}{2k-1}$ و نیز با یک شرطی که روی حداقل بزرگی مولفه‌های غیرصفر سیگنال x گذاشته می‌شود نشان می‌دهد که می‌توان تکیه‌گاه سیگنال x را به طور دقیق با الگوریتم (OMP) برای مواردی که به نویز گاوسی کراندار آغشته هستند را با احتمال خیلی زیادی بازیابی کرد. در بسیاری از موارد بیشترتمرکز روی شناسایی مولفه‌های بزرگ سیگنال x می‌باشد که این یک هدف غیرممکن برای بازیابی دقیق تمام تکیه‌گاه سیگنال x است. علاوه بر این با تصحیح شرط توقف این الگوریتم، این تضمین را می‌دهد که مولفه‌های صفر انتخاب نشوند. در ادامه‌ی این بخش مراحل این الگوریتم آورده شده است.

فرض کنیم که ستون‌های ماتریس ψ نرمال شده باشند. یعنی داشته باشیم:

$$\forall t = 1\ 2 \cdots N \quad \|\psi_t\|_2 = 1.$$

به ازای هر زیر مجموعه‌ی$\{1\ 2\ \dots\ N\}$ ، $S \subseteq$ ، $\psi(S)$ را یک زیر ماتریسی از ψ که شامل ستون‌های ψ_tها به طوری که $t \in S$ باشد در نظر گرفته می‌شود. همچنین در این تحقیق ستون‌های ماتریس ψ را به عنوان متغیر فرض شده‌اند. از این رو، نماد ψ_t را هم برای ستون tام ماتریس ψ و هم برای t-امین متغیر مدل در نظر گرفته می‌شود. بر طبق قرار داد ψ_t را یک متغیر درست انتخاب شده گوییم هرگاه x_t متناظر با آن مخالف صفر باشد. از نماد $\psi(S)$ برای هر دو منظور، یعنی هم برای نشان دادن زیرمجموعه‌ای از ستون‌های ماتریس ψ که دارای اندیس‌هایی در مجموعه‌ی S هستند و نیز زیر ماتریس متناظر با ماتریس ψ، استفاده می‌شود. مراحل الگوریتم (OMP) به شرح زیر است:

گام اول: ابتدا مقدار باقی‌مانده را برابر سیگنال مشاهده شده یعنی $R_0 = y$ قرار داده می‌شود و مجموعه‌ی نخست از متغیرهای انتخابی را برابر $\hat{\Psi} = \emptyset$ و مقدار شمارنده را نیز برابر $t = 1$ در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم: متغیر λ_t را با حل کردن مسئله‌ی ماکزیمم‌سازی بصورت $\lambda_t = arg \max_{j=1,\dots,N} |< R_{t-1}, \psi_t >|$ یافته و متغیر $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$ را به مجموعه متغیرهای انتخاب شده اضافه کرده و مجموعه‌ی $\hat{\Psi} = [\hat{\Psi}_{t-1}, \Psi_{\lambda_t}]$ به روز رسانی می‌شود.

گام سوم: فضای خطی تولید شده توسط عناصر $\Psi(\Lambda_t)$ یعنی $P_t = \hat{\Psi}(\Lambda_t) = \left(\hat{\Psi}(\Lambda_t)^T \hat{\Psi}(\Lambda_t)\right)^{-1} \hat{\Psi}(\Lambda_t)^T$ را تشکیل داده و مقدار باقی‌مانده‌ی $R_t = (I - P_t)y$ به روز رسانی می‌شود.

گام چهارم: اگر شرط توقف حاصل شد الگوریتم متوقف می‌شود. اما در غیر این صورت با قرار دادن شمارنده $t = t + 1$ به گام دوم باز می‌گردد.

مراحل این الگوریتم را در شکل ۴ آورده شده است.

الگوریتم (OMP) یک الگوریتم مرحله‌ایی رو به جلو است که

[1] Coherence

ویژگی کلیدی این الگوریتم در شرط توقف آن است. این شرط توقف را روی ساختار نویز قرار می‌دهیم که در اینجا نویز گاوسی در نظر گرفته شده است. در موارد نویزی، شرط توقف به طور طبیعی برابر $R_t = 0$ است. ولی در این تحقیق برای شرط توقف الگوریتم و با توجه به ساختار نویزهای متفاوت، شرایط متفاوتی مورد آزمایش قرار داده شده که بازیابی بهتری از سیگنال‌های با پهنای باند فرکانسی بالا و آغشته به نویز گاوسی با حداقل تعداد نمونه‌برداری از سیگنال، انجام شده است.

به طور ویژه دو نوع از نویزهای کراندار مورد بررسی قرار گرفته است. یکی نویزهای گوسی کراندار با نرم l^2 است. برای مثال $\|\varepsilon\|_2 \le b_2$ که در آن $b_2 > 0$ مقدار ثابتی است. دیگری نویزهایی گوسی کراندار با نرم l^∞ به طوری که $\|\psi^T \varepsilon\|_\infty \le b_\infty$ که در آن نیز $b_\infty > 0$ مقدار ثابتی است.

قضیه ۱: فرض کنید $\|\varepsilon\|_2 \le b_2$ و $\mu < \frac{1}{2k-1}$ باشد، هرگاه ضرایب غیرصفر x_i ها در شرط $|x_i| \ge \frac{2b_2}{1-(2k-1)\mu}$ صدق کنند در این صورت الگوریتم (OMP) باشرط توقف $\|R_t\|_2 \le b_2$، زیرمجموعه‌ی درستی از متغیرهای $\psi(T)$ را انتخاب می‌کند و بازیابی بهتری از سیگنال را انجام می‌دهد[۱۸].

قضیه ۲: فرض کنید $\|\psi^T \varepsilon\|_\infty \le b_\infty$ و $\mu < \frac{1}{2k-1}$ باشد. علاوه بر این فرض کنید که تمام ضرایب غیرصفر x_i ها در شرط زیر صدق کند $|x_i| \ge \frac{2b_\infty}{1-(2k-1)\mu}\left(1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-(k-1)\mu}}\right)$.

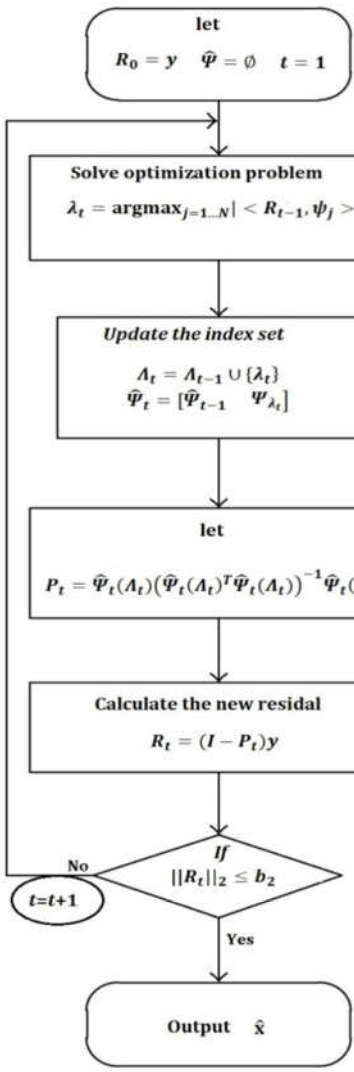
آنگاه الگوریتم (OMP) با شرط توقف $\|\psi^T \varepsilon\|_\infty \le b_\infty$، زیرمجموعه‌ی درستی از $\psi(T)$ را انتخاب می‌کند [۱۸].

کاربردهای عملی قضیه‌های ۱ و ۲ را با استفاده از داده‌های تجربی بدست آمده از تیر یکسرگیردار سالم و ترک خورده مورد آزمایش قرار داده شده و در بخش نتایج عددی نیز نتایج حاصل از بازسازی این سیگنال‌ها را با کران‌های نویزی متفاوت مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این الگوریتم با الگوریتم تکراری آستانه گذاری سخت (IHT) مورد سنجش قرار خواهد گرفت.

در بخش بعدی تحقیق به معرفی الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT) پرداخته شده است.

۵- الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT)

الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT) برای اولین بار توسط بلومنساث و دیویس در رابطه با مسئله‌ی بازسازی تنک معرفی شد. [۱۹]. بررسی‌ها و تحلیل‌های اولیه از لحاظ تئوری موفقیت این الگوریتم را تضمین می‌کردند [۲۰].



شکل ۴- فلوچارت الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP)

ساختار این الگوریتم بدین صورت است که، به جای سیستم مستطیلی $\psi x = y$ سیستم مربعی $\psi^T \psi x = \psi^T y$ را حل کند. روش کلاسیک تکراری پیشنهاد می‌داد که دنباله‌ی (x^n) را برای حل این مسئله به صورت تکراری $x^{n+1} = (I - \psi^T \psi)x^n + \psi^T y$ در نظر بگیرد. از طرفی چون فرض تنکی بردار x نیز مورد انتظار بود، هر یک از گام‌های تکرار وابسته به یک عملگر غیر خطی آستانه‌گذاری سخت $H_k(x)$ بود. این عملگر غیر خطی تعداد k مولفه از بردار x را که از لحاظ بزرگی (قدر مطلق) دارای اهمیت هستند را نگه می‌دارد و بقیه را برابر صفر قرار می‌دهد. بنابراین در این الگوریتم داده‌های ورودی عبارت‌اند از، ماتریس حسگری ψ ، بردار اندازه‌گیری y و کران تنکی k. پردازش روی بردار x^0 k-تنک صورت می‌گیرد که به طور خاص با $x^0 = 0$ آغاز می‌شود. الگوریتم به صورت معادله‌ی (۹) در زیر آغاز می‌شود و تا زمان رسیدن به شرط توقف $t = \bar{t}$ ادامه پیدا می‌کند و در نهایت خروجی آن برداری به شکل k -تنک، $\hat{x}$ خواهد بود.

$$x^{t+1} = H_k(x^t + \psi^T(y - \psi x^t)) \qquad (۱۰)$$

مراحل الگوریتم (IHT) را نیز در شکل۵ آورده شده است.

در این تحقیق با توجه به [۲۱] عملگر غیرخطی آستانه‌گذاری سخت H_k را به صورت معادله‌ی(۱۰) در نظر گرفته شده است که این عملگر در مقایسه با سایر عملگرها بهتر عمل می‌کند.

$$H_\theta(x) = \begin{cases} x & if \ \ |x| \ge \theta \\ 0 & if \ \ |x| < \theta \end{cases} \qquad (۱۱)$$

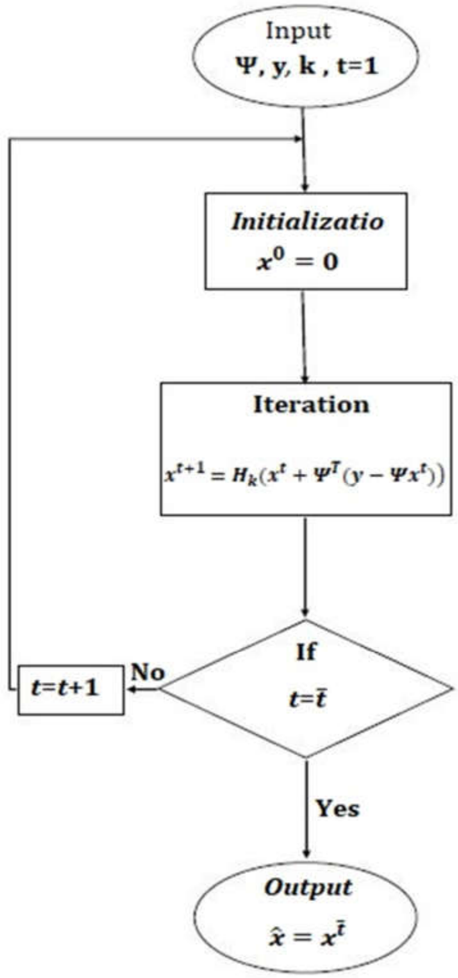
مقدار آستانه‌گذاری $\theta = \alpha e^{-k\beta}$ در نظر گرفته شده که در آن α و β مقادیر ثابت هستند و در این تحقیق مقادیر $\alpha = max(y)$ و $\beta = s.min(y)$، $0 < s < 1$ فرض شده است. بنابراین الگوریتم تکراری معادله‌ی (۹) به صورت معادله‌ی (۱۱) خواهد بود.

$$x^{t+1} = H_\theta(x^t + \psi^T(y - \psi x^t)) \qquad (۱۲)$$

در عمل باید الگوریتم بعد از تعداد متناهی تکرار متوقف شود. شرط توقف را به صورت، $\|y - \psi x^{t+1}\|_2 < \varepsilon$ در نظر گرفته شده که در آن $\varepsilon = \|e\|_2$ مقدار نویز گاوسی وارد شده به مسئله است.

۶- نتایج عددی

در این بخش به مقایسه نتایج به دست آمده از هر دو الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP)، و الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT)، در حضور کران های نویز گاوسی پرداخته شده است. همان طوری که در بخش۳ تحقیق نشان داده شد، مقدار فرکانس‌های زمانی در تیر یکسرگیردار ترک‌خورده کاهش پیدا می‌کند. بنابراین به منظور تشخیص ترک در تیر یکسرگیردار، تاثیر حضور کران‌های نویزی متفاوت را در جدول ۱ در زیر نشان داده شده است. همان گونه که در این جدول مشاهده می‌کنید، فرکانس‌های زمانی ($\boldsymbol{\omega_1}$ و$\boldsymbol{\omega_2}$) در تیر یکسرگیردار در حضور نسبت سیگنال به نویزگاوسی که با نماد n نمایش داده شده است. ستون‌های فرکانس‌های مذکور به منظور مقایسه سریع با رنگ‌های سبز و آبی و برحسب درصد (٪) مشخص شده است که با مقایسه ستون‌های همرنگ نتایج به دست آمده بهتر قابل مقایسه می‌باشند. برای مثال اگر مقدار نسبت سیگنال به نویز گوسی ٪۲۰ انتخاب شود مشاهده می‌شود که کاهش فرکانس زمانی اول (ω_1) با الگوریتم (IHT) برحسب درصد کاهش برابر ٪۳۳ بوده در حالی که این مقدار با الگوریتم (OMP) برابر ٪۱۱ بوده است. برای مقایسه بیشتر اگر مقدار نسبت سیگنال به نویز گوسی را همان ٪۲۰ انتخاب شود مشاهده می‌شود که کاهش فرکانس زمانی دوم (ω_2) با الگوریتم (IHT) برحسب درصد کاهشی برابر ٪۳۸ بوده در حالی که این مقدار با الگوریتم (OMP) برابر ٪۱۸ بوده است. هم چنین تعداد نمونه از سیگنال را با نماد m نمایان شده است که این مقدار توسط معادله‌ی (۴) حاصل می‌شود. با مقایسه‌ی ستون‌های کاهش فرکانس‌های زمانی ($\boldsymbol{\omega_1}$ و$\boldsymbol{\omega_2}$) برای هر یک از الگوریتم‌های (OMP) و (IHT) مشخص شد که الگوریتم (OMP)کمتر تحت تاثیر نویز گوسی قرار می‌گیرد و در نتیجه این الگوریتم از دقت بالاتری نسبت به الگوریتم (IHT) برای بازیابی سیگنال برخوردار است.



شکل ۵- فلوچارت الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT)

۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق برای نخستین بار با بکارگیری الگوریتم پایه‌های متعامد تعقیبی (OMP)، و الگوریتم تکراری آستانه‌گذاری سخت (IHT)، به تشخیص وجود ترک در یک تیر یکسر گیردار، با کمترین نرخ نمونه‌برداری از سیگنال آن پرداخته شده است که از الگوریتم‌های شناخته شده در حسگری فشرده هستند. نتایج عددی حاصل از این تحقیق نشان داد که الگوریتم (OMP) در مقایسه با الگوریتم (IHT) کمترین تاثیرپذیری از لحاظ حضور نسبت سیگنال به نویز گوسی را دارد که به عنوان مانع در تشخیص درست برای وجود عیب در تیر یکسرگیردار محسوب می‌شود.

جدول ۱-مقایسه نتایج روش‌های OMP و IHT در حضور نسبت سیگنال به نویز گوسی (n) و تعداد نمونه‌برداری (m).

فرکانس‌های زمانی (ω_1 و ω_2) برحسب هرتز (Hz)

		IHT				OMP			
n	m	ω_1	کاهش (ω_1)	ω_2	کاهش(ω_2)	ω_1	کاهش (ω_1)	ω_2	کاهش (ω_2)
٪۰	۱۵	۰٫۵۶	٪۰	۳٫۵۱	٪۰	۰٫۵۶	٪۰	۳٫۵۱	٪۰
٪۰٫۱	۱۸	۰٫۵۴	٪۲	۳٫۴۲	٪۹	۰٫۵۴	٪۲	۳٫۴۲	٪۱
٪۰٫۵	۲۱	۰٫۴۳	٪۱۳	۳٫۳۳	٪۱۸	۰٫۴۳	٪۵	۳٫۳۳	٪۳
٪۱۰	۲۶	۰٫۳۱	٪۲۵	۳٫۲۶	٪۲۵	۰٫۳۱	٪۸	۳٫۲۶	٪۶
٪۲۰	۳۰	۰٫۲۳	٪۳۳	۳٫۱۳	٪۳۸	۰٫۲۳	٪۱۱	۳٫۱۳	٪۱۸

۸- مرجع

[1] Gillich. G. R, et al, Localization of transversal cracks in sandwich beams and evaluation of their severity, *Shock and Vibration*, Article 607125. 2014.

[2] Khatir. S, et al, Multiple damage detection in composite beams using particle swarm optimization and genetic algorithm*, Mechanika*, 23 (4) pp. 514-521, 2017.

[3] Zhou. Y. L, et al, Output-based structural damage detection by using correlation analysis together with transmissibility, *Materials*, 10 (8), p. 866, 2017.

[4] Zhou. Y. L, M. Abdel Wahab, Cosine based and extended transmissibility damage indicators for structural damage detection*, Eng. Struct*., 141, pp. 175-183, 2017.

[5] Zhou. Y. L, et al, Structural damage detection using transmissibility together with hierarchical clustering analysis and similarity measure, *Struct. Health Monit*, 2016.

[6] Gillich. G. R, et al, Free vibration of a perfectly clamped-free beam with stepwise eccentric distributed masses, *Shock and Vibration*, Article 2086274, 2016.

[7] Zhou. Y. L, N. Maia, M. Abdel Wahab, Damage detection using transmissibility compressed by principal component analysis enhanced with distance measure, *J. Vib. Control*, 2016.

[8] Zhou. Y. L, M. Abdel Wahab, Rapid early damage detection using transmissibility with distance measure analysis under unknown excitation in long-term health monitoring*, Journal Vibroeng*, 18 (7), pp. 4491-4499, 2016.

[9] Dobeling. S. W, C. R. Farrar and M. B. Prime, *A* summary review of vibration-based damage identification methods, *Shock and Vibration Digest*, Vol. 30, pp. 91-105, 1998.

[10] Cawly. A. R. D, Pye. P. C. J. and Stone, B. J, Techniques for Nondestructively Assessing the Integrity, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol.20 No. 2, pp. 93-100, 1978.

[11] Ostachowicz, W. M, Krawczuk. M, Analysis of the Cracks on the Natural Frequencies of a cantilever Beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 150, No. 2, pp. 191-201, 1991.

[12] Carneiro. S. H. S. and D. J. Inman, Continuous Model for the Transverse Vibration of Cracked Timoshenko Beams, *Transactions of the ASME*, Vol. 124, 310-320, 2002.

[13] Sinha. J. K, Friswell. M. I. and Edwards. S, Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data, *Journal of Sound and vibration*, Vol. 251, No. 1, pp. 13-38, 2002.

[14] Maghsoodi. A, Ghadami. v, Mirdamadi. H. R , Multiple-crack damage detection in multi-step beams by a novel local flexibility-based damage index, *Journal of Sound and Vibration* Volume 332, Issue 2, pp 294-305, 2013.

[15] Khatira. S, Dekemelea. v, Loccufiera. M , Khatirb. T, Wahab. v, Crack identification method in beam-like structures using changes in experimentally measured frequencies and Particle Swarm Optimization, *Comptes Rendus Mécanique* Volume 346, Issue 2, pp 110-120, 2018.

[16] Rezaee. M and Hassannejad. R, A new approach to free vibration analysis of a beam with a breathing crack based on mechanical energy balance method, *Acta Mechanica Solida Sinica,*vol 24, Issue 2, pp 185-194, 2011.

[17] Donoho. D. L, Compressed sensing, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, 2006.

[18] Tony . T. C. and Wang. L, Orthogonal Matching Pursuit for Sparse Signal Recovery with Noise, *IEEE Transactions on information theory,* vol. 57, No. 7, 2011.

[19] Blumensath. T, and Davies. M. E, Thresholding for Sparse approximations, *J. Fourier Anal. Appl*, 14, pp. 629-654, 2008.

[20] Foucart. S, Sparse Recovery Algorithms: Sufficient conditions in terms of restricted isometry constants, Preprint.

[21] Tavakoli. A, Pourmohammad. A, An Efficient Iterative Thresholding Method for Compressed Sensing, *International Journal of Computer Theory and Engineering* Vol. 4, No. 2, April 2012.