

تحلیل سه بعدی جریان‌های نیرو محرک دیناموهیدرومغناطیسی با استفاده از گرادیان‌های فشار ثابت

مصطفی بهره‌مندی
سیدعلی میربزرگی

کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند
استادیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند

چکیده

جریان‌های نیرو محرک داخلی که در آنها نیروی محرک جریان در هر مقطع عرضی کانال، توزیع کاملاً یکنواختی دارد، در سرتاسر کانال، یک میدان سرعت توسعه یافته‌ای را ایجاد می‌کنند. حتی اگر نیروی محرک فقط بر بخش معینی از طول کانال اعمال شود، پروفیل‌های سرعت - مشابه جریان فشار محرک - همه جا سهمی‌گون هستند. لذا می‌توان نیروی محرک حجمی را ابتدا به طور مجازی حذف کرده و به جای آن از یک گرادیان فشار ثابت معادل در سراسر کانال استفاده نمود. در این صورت، اگرچه توزیع فشار واقعی با یک توزیع فشار خطی، معادل و جایگزین می‌شود اما پروفیل سرعت حاصله تغییری نخواهد کرد. مزیت چنین کاری این است که حل سه‌بعدی معادلات را می‌توان به حل دو بعدی (با معادله‌ی پواسون) برای مقطع عرضی کانال تبدیل نمود. به علاوه با این جایگزینی، می‌توان میدان‌های سرعت و فشار در شبکه‌ای از کانال‌های بهم متصل را به راحتی محاسبه نمود. از دیگر کاربردهای این ساده‌سازی، حل معادلات مومنتوم در جریان‌های داخلی MHD است، چراکه در جریان‌های MHD نیز، نیروی حجمی لورنتز به خصوص در کاربردهای میکرونی نظیر میکروپمپ‌ها می‌تواند با تقریب خوبی در سطح مقطع کانال، یکنواخت تلقی شود. مقایسه‌ی نتایج حاصل از این روش جدید حل، با نتایج حاصل از حل سه‌بعدی، نشان می‌دهد که روش حاضر می‌تواند به خوبی در حل میدان سرعت و فشار در شبکه‌های میکروسایالی بکار رود و هزینه‌های سنگین تحلیل‌های سه‌بعدی را کم نماید.

کلمات کلیدی: جریان دیناموهیدرومغناطیسی، جریان کاملاً توسعه یافته، جریان نیرومحرک داخلی، میکروپمپ MHD، نیروی لورنتز

3-D Analysis of Magnetohydrodynamic Force-Driven Flows Using Linear Pressure Gradients

M. Bahremani
S. A. Mirbozorgi

M.Sc., Department., Birjand University
Assistant Professor., Mechanical Engineering
Department, Birjand University

Abstract

Internal-force-driven flows in which the force acting on channel cross sections have a perfect uniform distribution create a fully-developed velocity field. Even if the driving force is inserted on a part of channel, the velocity profiles are parabolic. In this situation, firstly the driving force with non-uniform axial distribution can be removed temporarily and then one can use an equivalent pressure gradient alternatively throughout the channel. In this case, although the distribution of pressure gradient and the driving force change but the resulting velocity profiles remain unchanged. The main advantage of this replacement is that the solution of the equations in the 3-D geometries can be converted to a 2-D solution using Poisson equation in the channel cross section. After determining the velocity distribution in the cross section, one can inversely calculate the actual pressure distribution easily. This will be done by resuming the real axial force. One of the applications of this simplification is that the simulation of MHD channel flows can be carried out easily. Good agreement between the results of the new solution method and the results of the perfect solutions shows that the present method with enough accuracy can be used for prediction of velocity and pressure fields in microfluidic networks and can be reduced the heavy costs of 3-D analysis.

Keywords: Fully-developed flow, Lorentz force, Magnetohydrodynamic flow, MHD channel flow, MHD micropump

۱- مقدمه

در پژوهش حاضر معادلات حاکم بر جریان‌های دینامو هیدرومغناطیسی ابتدا معرفی و سپس تحلیل می‌شوند. روش تحلیل بر این میناست که با توجه به یکسان و کاملاً توسعه یافته بودن میدان سرعت در دو جریان فشار محرک و نیرو محرک، می‌توان از آنها بطور جایگزین در استخراج پروفیل‌های سرعت مجهول استفاده نمود. تنها شرط لازم این است که در جریان نیرو محرک، نیروی حجمی دارای توزیع یکنواخت در سطح مقطع کانال باشد؛ همانطور که گرادیان فشار در جریان فشار محرک چنین خاصیتی را داراست.

۲- جریان نیرومحرک کاملاً توسعه یافته

می‌دانیم در یک جریان فشار محرک داخلی (با گرادیان فشار ثابت معلوم $\Delta p/L$) میدان جریان در طول کانال توسعه یافته بوده و پروفیل سرعت، سهموی است. از طرف دیگر اگر به جای گرادیان فشار مذکور، یک نیروی حجمی یکنواختی مانند $F_1 (N/m^3)$ عامل حرکت سیال باشد، می‌توان نشان داد که باز میدان جریان حاصل، مشابه جریان فشار محرک بوده و علاوه بر توسعه یافته بودن جریان در طول کانال، پروفیل‌های سرعت نیز سهموی خواهد بود. بعلاوه اگر مقدار نیروی حجمی F_1 کاملاً برابر $\Delta p/L$ باشد، اندازه‌ی پروفیل‌های سهموی شکل، برابر نیز می‌باشند. به عبارتی اثر گرادیان فشار ثابت مشابه اثر نیروی حجمی فوق‌الذکر است، چراکه هم گرادیان فشار ثابت و هم نیروی حجمی یکنواخت، به عنوان جملات شرکت کننده در سمت نیرویی معادله‌ی ناویر-استوکس اثری یکسان داشته و می‌توانند جایگزین همدیگر باشند و میدان سرعت یکسانی تولیدکنند. برای بررسی بیشتر این موضوع می‌توان سه جریان معرفی شده در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ را با یکدیگر مقایسه نمود. فرض می‌شود که طول و عرض هر سه کانال یکسان هستند و در هر سه مورد، دبی یکسانی از کانال عبور می‌کند.

در هر سه جریان نشان داده شده در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ توزیع فشار رسم شده است و پروفیل‌های سرعت مربوط به هر سه جریان فوق‌الذکر به‌مراه توزیع مقداری نیروی حجمی نیز در شکل ۴ نشان داده شده است. در شکل ۱ عامل حرکت ذرات سیال، نیروی حجمی (مثلاً الکترومغناطیسی) F_1 می‌باشد در حالیکه فشار در دو سر کانال برابر لحاظ شده است ($p_1 = p_2$) تا نشان دهد که در این شکل، عامل حرکت فقط نیروی حجمی باشد. از طرف دیگر در شکل ۳ عامل حرکت فقط اعمال فشارهای نابرابر ($p_1 \neq p_2$) در دو سر کانال است و نیروی حجمی F_3 در این شکل، صفر در نظر گرفته شده است. در شکل ۲ نیروی حجمی فقط بر بخش معینی از کانال (بخش

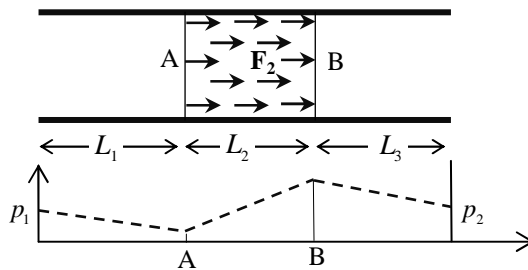
جریان دینامو هیدرومغناطیسی^۱ (MHD) یک جریان از سیال هادی الکتریکی با عاملیت حرکت ناشی از تداخل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است [۱]. این جریان برای اولین بار توسط ریچه در سال ۱۸۳۲ شناخته شد [۲]؛ اما مطالعات روی این نوع جریان از اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ آغاز گردیده و تاکنون ادامه دارد. هرچند در ابتدا از خواص این جریان برای تأمین نیروی رانش کشتی‌ها استفاده می‌گردید و در این زمینه توسعه می‌یافت [۳] و [۴]، اما خواص جریان MHD منجر به کاربرد آن در زمینه‌های متعددی شده است. امروزه با پیشرفت تکنولوژی، مواد الکترومغناطیس با خاصیت الکترومغناطیسی قوی مانند آلیاژ مغناطیسی نئودیمیم-آهن-بور توسعه یافته‌اند. علاوه بر آن، الکترودهای خاصی از جنس زیرکونیوم دی‌بوراید (ZrB_2) با دمای ذوب ($3000^\circ C$) و رسانش الکتریکی (S/m) 10^5 برای استفاده در کوره‌های الکتریکی وجود دارد. تکنولوژی‌های فوق، امکان به کارگیری میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی را روی مواد رسانای الکتریکی با دمای ذوب بالا، ممکن می‌سازد. همین موارد منجر به استفاده از خاصیت تحریک MHD در فرآیندهای متالورژیکی مانند ریخته‌گری الکترومغناطیسی و هم‌زن الکترومغناطیسی برای کنترل جریان فلز مذاب شده است [۵، ۶].

در دهه‌ی اخیر، جریان MHD حوزه‌ی میکروسیالی را نیز در بر گرفته است [۷]. امروزه تحقیقات در زمینه‌ی میکروسیال‌ها رشد فزاینده‌ای دارد و از آنجائیکه جریان MHD می‌تواند به عنوان محرک سیال در میکروکانال‌ها بکار رود، دسته‌ای از میکروپمپ‌ها تحت عنوان میکروپمپ‌های MHD توسعه پیدا کرده است [۸-۱۰]. میکروپمپ‌ها در کنار میکروکانال‌ها و میکرو-سوپاپ‌ها اجزای اصلی میکروسیالی‌ها را تشکیل می‌دهند. میکروپمپ‌های MHD از دسته میکروپمپ‌های غیرمکانیکی می‌باشند که در آنها عامل محرک جریان، نیروی الکترومغناطیسی لورنتز می‌باشد [۱۱].

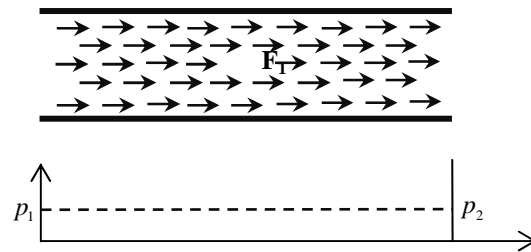
از آنجائی که در جریان‌های MHD درون کانال، جریان سیال تا حدود زیادی توسعه یافته بوده و نیروی حجمی لورنتز در آنها تقریباً یکنواخت است؛ از همین روی، با ساده‌سازی معادلات حاکم با فرض جریان کاملاً توسعه یافته و حذف مجازی نیروی حجمی و جایگزینی آن با یک گرادیان فشار ثابت در سراسر کانال، فرآیند حل میدان جریان، بسیار ساده‌تر بوده و نتایج حاصل می‌تواند قابل اعتماد باشد.

¹. Magnetohydrodynamic (MHD)

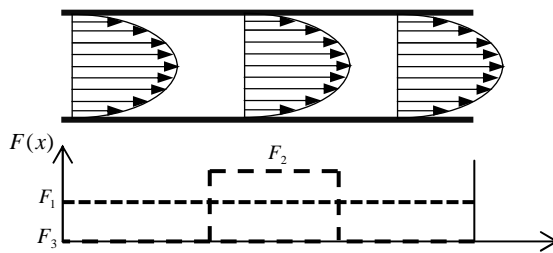
². Microvalve



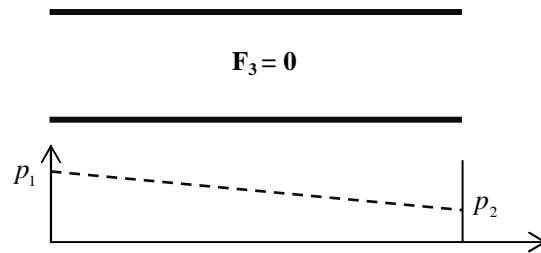
شکل ۲- طرحواره اعمال نیروی حجمی یکنواخت فقط بر بخش میانی کانال.



شکل ۱- طرحواره اعمال نیروی حجمی یکنواخت در سراسر کانال.



شکل ۴- طرحواره پروفیل‌های سرعت توسعه یافته در هر سه جریان به همراه توزیع مقدراری نیروهای حجمی.



شکل ۳- طرحواره اعمال گرادیان فشار در سراسر کانال در غیاب نیروی حجمی یکنواخت.

محدود به ناحیه‌ای کوچکتر نمود. به عنوان مثال مطابق شکل ۲ در دو بخش ابتدایی و پایانی، نیروی حجمی صفر شده است و در عوض، برای ثابت نگه داشتن دبی، مقدار نیروی حجمی وارد بر بخش میانی به اندازه‌ی $F_2 > F_1$ افزایش یافته است. این در حالی است که فشارهای $p_1 = p_2$ همچنان بدون تغییر مانده‌اند. اکنون جریان در دو بخش پایانی و ابتدایی در غیاب نیروی حجمی بایستی فقط تحت اثر گرادیان فشار القایی، ایجاد شده باشد. یعنی به منظور حفظ دبی ثابت، دو گرادیان فشار القایی مناسب در این دو منطقه حاکم می‌شود. مشاهده‌ی جالب و مهم اینست که پروفیل‌های سرعت در این دو منطقه با نمونه‌ی قبلی خودشان در شکل ۱ کاملاً یکسان هستند؛ به این معنا که جایگزینی نیروی حجمی با گرادیان فشار هیچ تغییری در شکل پروفیل سرعت‌ها نداشته است.

از این جالب‌تر، وضعیت جریان در منطقه‌ی میانی است. در این منطقه نیز با توجه به حاکمیت دو گرادیان فشار القایی جدید در نواحی ابتدایی و پایانی، یک گرادیان فشار القایی جدید حاکم می‌شود، بطوریکه جمع F_2 و این گرادیان فشار جدید همان مقدار ثابت S را داشته و لذا همان دبی قبلی تولید می‌شود. بنابراین پروفیل سرعت در منطقه میانی هم بدون تغییر باقی می‌ماند. مقدار گرادیان فشار القایی در منطقه‌ی میانی و نیز مقدار F_2 بستگی به طول نواحی ابتدایی و پایانی دارد بطوریکه با کوتاه‌تر شدن منطقه میانی، گرادیان فشار و F_2 در این منطقه بیشتر خواهند بود. در حالی که

میانی) اعمال شده است، حال آنکه مقاومت اصطکاکی ناشی از حضور دو بخش ابتدایی و انتهایی که اکنون فاقد نیروهای حجمی هستند باعث القای گرادیان فشارهای جدیدی در این بخش‌ها شده و نهایتاً در کل طول کانال یک گرادیان فشار با توزیع زیگزاگ ایجاد شده است.

معادله‌ی حاکم بر تک تک ذرات سیال جاری در هر سه کانال به صورت $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + F_x$ می‌باشد. به عبارت دیگر، ذرات سیال در جریان‌های مورد نظر می‌توانند تحت تأثیر دو عامل حرکت، یکی گرادیان فشار $-\frac{\partial p}{\partial x}$ و دیگری نیروی حجمی (مثلاً الکترومغناطیسی) ایجاد شوند. گرادیان فشار مورد بحث وارد بر هر ذره می‌تواند ناشی از اعمال فشارهای p_1 و p_2 در مرزهای ورودی و خروجی باشد و هم می‌تواند به صورت القایی به دلیل تغییر دینامیک جریان تحت اثر عواملی مانند اصطکاک و تغییر هندسه سطح مقطع جریان ایجاد گردد.

اگر مجموع دو جمله‌ی $-\frac{\partial p}{\partial x}$ و F_x در همه جای کانال ثابت و مقدار معلوم S را داشته باشد، می‌توان نشان داد که پروفیل توسعه یافته نهایی سرعت و نیز دبی عبوری، در نهایت به مقدار S وابسته است و سهم جداگانه هر یک از دو جمله‌ی فوق تأثیری بر پروفیل سرعت نهایی ندارد. برای نشان دادن این موضوع می‌توان مقدار نیروی حجمی وارد بر کانال شکل ۱ را

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{1}{L} \int_0^L F_2(x) dx$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L_1 \\ F_2 & L_1 < x < L_1 + L_2 \\ 0 & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1)$$

در این صورت معادله مومنتم حاکم در کانال سه بعدی مسئله به صورت ساده $0 = -\frac{\Delta p}{L} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$ است در حالیکه جمله‌ی مربوط به فشار بعنوان یک مقدار معلوم لحاظ می‌شود. واضح است که حل این معادله در مقایسه با شکل کلی معادله که به صورت $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + F_x$ بیان می‌گردد و در آن مشتق محوری فشار جزء مجهولات است، بسیار ساده‌تر می‌باشد.

از آنجائی که مقدار جمله‌ی اصطکاکی $\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$ برابر مقدار گرادیان فشار مجازی و معلوم $\Delta P/L$ می‌باشد که با رابطه‌ی (۱) محاسبه می‌شود، توزیع فشار واقعی را به راحتی می‌توان محاسبه نمود. به این صورت که با جایگزینی جمله‌ی دوم در رابطه‌ی $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + F_2(x)$ با مقدار معلوم $\Delta P/L$ و انتگرال‌گیری از آن، توزیع فشار در طول کانال به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$p(x) = -\frac{F_2 L_2}{L} x + \int_0^x F_2(x) dx + c \quad (2)$$

ثابت c با اعمال شرایط مرزی فشار در ورودی (p_1) یا خروجی (p_2)، تعیین می‌گردد. در حالتی که نیروی حجمی $F_2(x)$ به صورت تابع پله‌ای نشان داده شده در شکل ۲ بوده و $p_1 = p_2$ باشد، آنگاه رابطه‌ی (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{F_2 L_2}{L} x + p_1 & 0 < x < L_1 \\ -\frac{F_2}{L} (L_2 - L)x - F_2 L_1 + p_1 & L_1 < x < L_1 + L_2 \\ -\frac{F_2 L_2}{L} x + F_2 L_2 + p_1 & L_1 + L_2 < x < L \end{cases} \quad (3)$$

لازم به ذکر است چنانچه در کانال مورد بحث (شکل ۲) علاوه بر نیروی حجمی یکنواخت، گرادیان فشار خارجی دیگری به عنوان عامل رانش سیال حضور داشته باشد، گرادیان فشار معادل نیروی حجمی $F_2(x)$ به آن گرادیان فشار خارجی اضافه می‌گردد. به عبارت دیگر، مقدار گرادیان فشار خارجی $\Delta P_{exp}/L$ به سمت راست معادله (۱) اضافه می‌گردد.

گرادیان فشار در مناطق ابتدایی و پایانی با توجه به ثابت بودن دبی برابر S بوده، ثابت باقی می‌ماند. نکته آخر اینکه در وضعیت جدید شکل ۲ فشارهای مرزی p_1 و p_2 نتوانسته‌اند بر سراسر کانال، همان گرادیان فشار صفر شکل ۱ را تحمیل کنند و فقط گرادیان‌های فشار القایی را با خود تنظیم کرده‌اند. بنابراین تمام پروفیل‌های سرعت در هر دو جریان نشان داده شده در شکل‌های ۱ و ۲ یکسان بوده و در هر دو مورد، جریان کاملاً توسعه یافته است.

چنانچه در جریان شکل ۲، مقدار نیروی F_2 بخواهد کمتر اختیار شود و هنوز از کانال مورد بحث، همان دبی متناسب با S عبور نماید، یک طریق آن است که با حفظ شیب محوری توزیع فشار در منطقه‌ی ابتدایی، مقدار فشار p_1 متناسب با کاهش F_2 ، افزایش یابد. طریق دیگر آنست که مقدار p_2 با حفظ شیب محوری توزیع فشار در منطقه‌ی پایانی متناسب با کاهش F_2 ، کاهش یابد. لذا قابل تصور می‌باشد که وقتی F_2 به طور کامل حذف شود، یک توزیع فشار یکنواخت در سراسر کانال از p_1 تا p_2 درست مانند شکل ۳ برقرار گردد.

از نکات بیان شده‌ی فوق نتیجه می‌شود که می‌توان نیروی F_1 در سراسر کانال شکل ۱ یا F_2 در بخش میانی کانال شکل ۲ را بطور کلی و مجازی حذف نمود و در عوض پروفیل سرعت جریان مورد بحث با همان دبی را به کمک اعمال یک گرادیان فشار کلی که بر سراسر مجرا اعمال می‌شود، مطابق شکل ۳ تولید نمود.

در نهایت می‌توان گفت توسعه یافتگی یک جریان داخلی هیچ الزامی را روی شکل توزیع محوری فشار و نیروی حجمی در طول کانال ایجاد نمی‌کند و همانطور که در سه مثال فوق نشان داده شد، یک جریان توسعه‌یافته‌ی معین با پروفیل سرعت سهموی می‌تواند دارای توزیع نیروی حجمی و فشارهای محوری متفاوتی باشد.

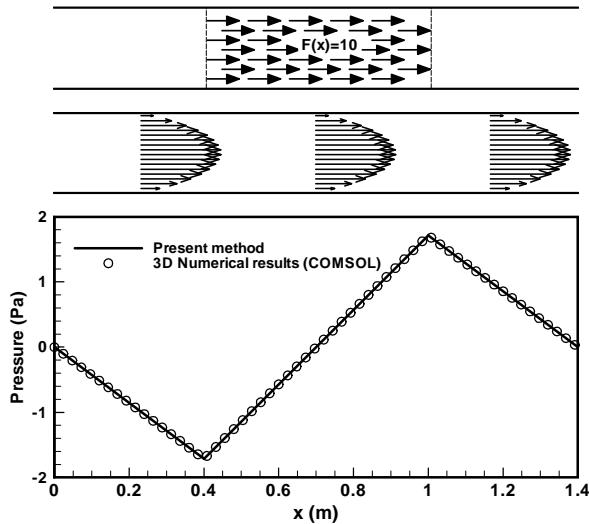
۳- معرفی روش حل

چنانچه در مسئله‌ای از نوع نیرو محرک، نیروی حجمی دارای توزیع یکنواخت در سطح مقطع کانال باشد، بجای حل سه‌بعدی معادلات حاکم در این مسأله، می‌توان در ابتدا نیروی حجمی را مجازاً با یک هد فشار هیدرواستاتیک خطی در سرتاسر کانال جایگزین نمود سپس با حل دوبعدی معادله‌ی مومنتم، پروفیل سرعت در سطح مقطع کانال را یافت و در انتها بطور معکوس توزیع فشار محوری واقعی را یافت. به عنوان مثال در شکل ۲ ابتدا گرادیان فشار هیدرواستاتیک معادل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

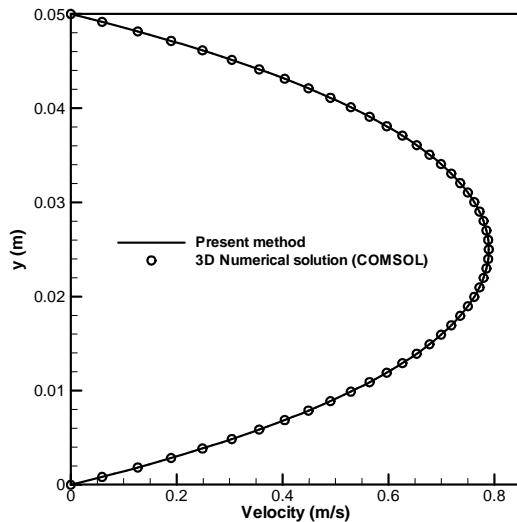
$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (4)$$

که بردار چگالی شار مغناطیسی و \vec{J} بردار چگالی جریان می‌باشد که از قانون اهم به صورت زیر، بدست می‌آید.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \sigma \vec{V} \times \vec{B} \quad (5)$$



شکل ۴- نتایج توزیع محوری فشار حاصل از حل عددی سه بعدی و حل دو بعدی به روش حاضر



شکل ۵- مقایسه پروفیل‌های سرعت کاملاً توسعه یافته در $z = 2.5 \text{ (cm)}$

که در آن \vec{E} بردار شدت میدان الکتریکی، σ رسانندگی الکتریکی سیال و \vec{V} بردار سرعت جریان سیال است. جهت نیروی \vec{F} از قانون دست راست تعیین می‌شود. جمله دوم سمت راست در رابطه (۵)، بیانگر جریان الکتریکی القایی معکوس بوده که بر اثر حرکت سیال در حوزه‌ی تأثیر هم زمان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بوجود می‌آید. در کاربرد جریان MHD در ابعاد میکرونی، مقدار جریان الکتریکی

۴- بررسی صحت روش حل

به منظور بررسی صحت روش حل معرفی شده، نتایج حاصل از حل عددی سه‌بعدی معادلات ناویر-استوکس در یک کانال سه‌بعدی با مقطع مربع به کمک نرم افزار COMSOL استخراج و با نتایج حاصل از حل به روش حاضر، مقایسه می‌گردد. مشخصات کانال و سایر مقادیر انتخابی در حل عددی مورد نظر در جدول ۱ آمده است. برای سهولت $F(x)$ برابر 10 N/m^3 اختیار شده و طبق رابطه (۱) مقدار $\Delta p / L$ برابر 4.285 N/m^3 محاسبه شده است.

جدول ۱- پارامترهای استفاده شده در حل عددی

واحد	مقدار	نوع متغیر
cm	۱۴۰	طول کل کانال L
cm^2	۵×۵	ابعاد مقطع عرضی کانال
cm	۴۰	طول ناحیه‌ی ابتدایی L_1
cm	۶۰	طول ناحیه‌ی میانی L_2

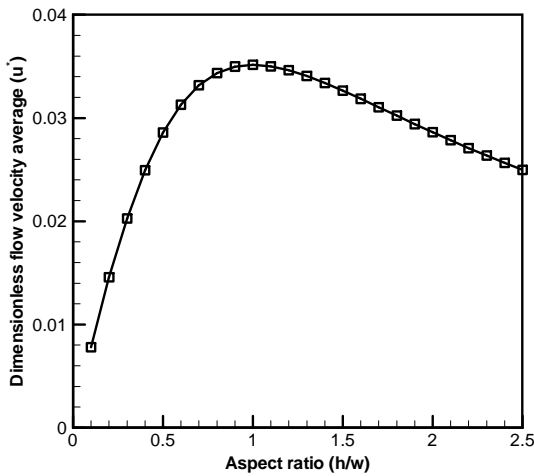
در حل عددی به روش حاضر، پس از بررسی استقلال نتایج از تعداد گره‌های شبکه برای مقطع مربعی کانال، از شبکه‌ای با تعداد 100×100 گره استفاده شده است و خطاهای حل معادلات تا مرتبه‌ی خطای ماشین (10^{-16}) کاهش یافته است.

به منظور مقایسه‌ی نتایج، در شکل ۵ توزیع فشار در طول کانال بدست آمده از هر دو روش حل ارائه شده است. مشاهده می‌شود که تغییرات فشار در هر سه ناحیه، کاملاً خطی بوده و روندی مشابه توزیع فشار نمادین نشان داده شده در شکل ۲ را دارد. حتی در حضور این توزیع فشار زیگزاگ، پروفیل‌های سرعت در هر سه منطقه کاملاً یکسان هستند. در شکل ۶ نیز برای مقایسه، پروفیل دوبعدی سرعت در عمق $z = 2.5 \text{ (cm)}$ رسم شده است. تطابق کامل پروفیل‌های سرعت در شکل ۶ و توزیع فشار در شکل ۵، بیانگر صحت روش ارائه شده در کار حاضر می‌باشد.

۵- جریان MHD درون کانال

در شکل ۷ طرحواره یک جریان MHD درون کانال نشان داده شده است. در این جریان، نیروی حجمی در بخش میانی کانال و در محدوده‌ی بین دو الکترود بطور الکترومغناطیسی بر سیال هادی الکتریسیته وارد می‌شود. این نیرو با اعمال یک میدان الکتریکی در عرض کانال و یک میدان مغناطیسی عمود بر آن (در راستای عمق)، که بوسیله‌ی آهنرباهای ثابت و یا الکتریکی ایجاد می‌شود، تولید می‌گردد. نیروی حجمی لورنتز \vec{F} با فرض پایا بودن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و ثابت بودن خواص مغناطیسی سیال با رابطه‌ی زیر بیان می‌گردد.

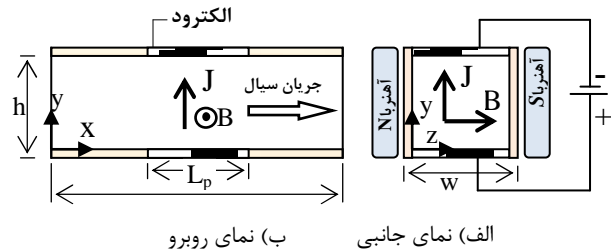
سرعت می‌گردد. این بدان معناست که در کانال با مقطع مربع بیشترین سرعت جریان سیال بوجود می‌آید. چنانچه افزایش نسبت منطری را با ثابت نگه داشتن ارتفاع کانال (h)، معادل کاهش عرض کانال (w) در نظر بگیریم، در صورت ثابت ماندن سایر مشخصه‌ها نظیر جریان الکتریکی I و چگالی شار مغناطیسی B ، نیروی لورنتز به واسطه‌ی افزایش چگالی جریان الکتریکی مطابق رابطه‌ی (۴) افزایش می‌یابد. از طرفی کاهش عرض کانال (w) منجر به افزایش اثر اصطکاکی دیواره‌های جانبی کانال می‌گردد. بنابراین اثر معکوس دو عامل نیروی لورنتز و اصطکاک دیواره‌ها در سرعت جریان سیال، منجر به بوجود آمدن یک نقطه‌ی ماکزیمم در نمودار سرعت جریان می‌شود.



شکل ۸- مقادیر سرعت متوسط جریان سیال به ازای مقادیر مختلف نسبت منطری مقطع کانال.

در ادامه، برای نشان دادن کاربرد روش ارائه شده در ساده نمودن تحلیل جریان در شبکه‌های میکروسیالی، جریان پایدار MHD (با جریان الکتریکی DC) درون یک کانال با مسیر بسته مطابق شکل ۹، در نظر گرفته شده است. بطوریکه مقطع مستطیلی کانال در بخش C بزرگتر از سه بخش A ، B و D است و عمق کانال در تمام بخش‌ها، برابر 1.3 (mm) می‌باشد. در این شکل نیروی حجمی لورنتز تنها در بخش A اعمال شده است. مقدار چگالی شار مغناطیسی، جریان الکتریکی و لزجت دینامیکی سیال به ترتیب دارای مقادیر 70 (mT)، 0.2 (A) و 1.1×10^{-3} (Pa.s) می‌باشد.

به طور کلی جریان در شکل ۹ به دلیل تغییر مسیر جریان و تغییر اندازه‌ی مقطع کانال، نمی‌تواند توسعه‌یافته باشد، اما با صرفنظر از تغییرات سرعت در گوشه‌ها، جریان در تمام بخش‌ها با تقریب خوبی می‌توان توسعه یافته فرض نمود. در حل به روش حاضر، با فرض توسعه یافته بودن جریان، بخش C با



شکل ۷- طرحواره میکروپمپ MHD: L : طول کانال، L_p : طول الکترود، h : عمق کانال و w : عرض کانال.

القایی، ناچیز بوده و قابل صرفنظر می‌باشد. از همین روی، با حذف این جمله در رابطه‌ی (۵) و فرض یکنواختی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، نیروی لورنتز یکنواخت به صورت $F_x = \sigma E_y B_z$ و یا بر حسب جریان الکتریکی I گذرنده از سیال به صورت IB/Lpw بیان می‌گردد. بنابراین می‌توان نیروی حجمی لورنتز را به طور مجازی حذف کرده و مطابق رابطه‌ی (۱) آن را معادل یک هد فشار هیدرواستاتیک در نظر گرفت. بنابراین؛

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{IB}{Lw} \quad (6)$$

از آنجائی که جریان کاملاً توسعه یافته فرض شده است، بنابراین مؤلفه‌های سرعت در راستای y و z ، صفر بوده و سرعت جریان محوری (u) در راستای کانال ثابت بوده و تنها در جهات y و z تغییر می‌کند $u = u(y, z)$. به این ترتیب تنها مؤلفه معادلات مومنوم در جهت x به صورت ساده شده زیر خواهد بود.

$$0 = \frac{IB}{Lw} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

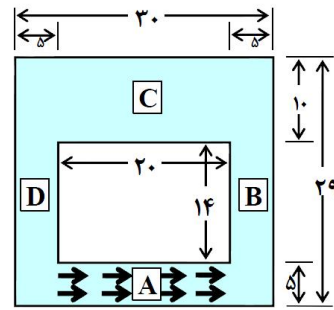
با استفاده از h و $IBh/\mu L$ به عنوان مراجعی برای طول و سرعت، معادله‌ی (۷) به شکل بی‌بعد شده‌ی زیر بیان می‌گردد.

$$0 = \alpha + \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (8)$$

که در آن، α نسبت منطری مقطع کانال بوده و به صورت h/w تعریف می‌شود. در نهایت با حل معادله‌ی (۷) یا (۸) در مقطع کانال، شکل پروفیل‌های سرعت بدست می‌آید.

در شکل ۸ مقادیر سرعت متوسط بدون بعد به ازای مقادیر مختلف نسبت منطری مقطع کانال در حضور ثابت بودن سایر پارامترهای جریان، نظیر جریان الکتریکی و میدان مغناطیسی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت منطری مقطع کانال، سرعت متوسط سیال نیز افزایش می‌یابد تا در مقدار نسبت منطری یک، به مقدار بیشینه خود می‌رسد و در مقادیر بزرگتر از یک، افزایش نسبت منطری منجر به کاهش

سه بعدی مومنوم حاکم بر مسئله بدست آمده است، نشان داده شده است. مشاهده می شود که نتایج حاصل از روش حاضر، تطابق خوبی با نتایج دقیق دارد. از آنجائیکه جریان در شکل ۹، اساساً به طور کامل، توسعه یافته نیست، اما فرض توسعه یافتگی که منجر به حل معادله حاکم به شکل رابطه (۷) می گردد، نتایج قابل قبولی را ارائه می دهد. اختلاف نتایج در مرز



شکل ۹- طرحواره جریان MHD درون یک مسیر بسته با ابعاد مشخصه بر حسب میلی متر

طول معادلی از کانال که سطح مقطعی برابر با اندازه سطح مقطع بخش های A، B و D دارد، جایگزین می شود به طوری که افت فشار ناشی از این طول، با افت فشار بخش C برابر باشد. این طول معادل به صورت

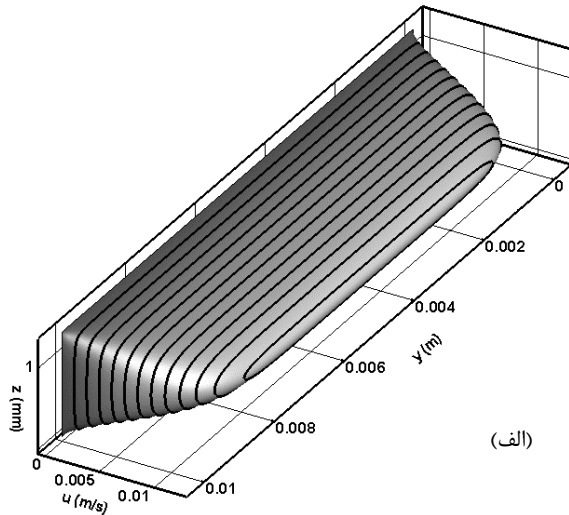
$$L_e = \frac{f Re}{(f Re)_C} \left(\frac{(D_h)_C}{D_h} \right)^4 L_C$$

مقادیر $f Re$ و $(f Re)_C$ با توجه به نسبت منطری مقاطع آنها به ترتیب برابر ۱۸ و ۲۰ می باشد [۱۲].

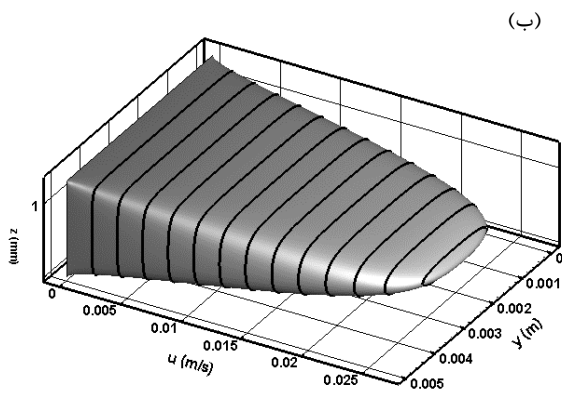
توزیع سرعت توسعه یافته در مقطع عرضی کانال با حل عددی معادله (۷) به روش حجم محدود، بدست می آید. برای یک شبکه یکنواخت 80×240 زمان رسیدن به یک حل همگرا شده با یک کامپیوتر شخصی با پردازنده (Intel® Core™) ۵ ثانیه می باشد. قابل ذکر است که اگر قرار بر حل سه بعدی جریان در کانال مورد بحث باشد، این حل بایستی در تعداد N_x مقطع در طول کانال تکرار شود که در آن N_x تعداد نسبتاً زیادی می باشد. لذا مدت زمان حل به بیش از N_x برابر افزایش خواهد یافت و یکی از مزایای مهم روش حل حاضر، کاهش چشم گیر این زمان حل می باشد.

در شکل ۱۰ پروفیل های سرعت توسعه یافته نمایش داده شده است. مشاهده می شود با توجه به اینکه عرض مقطع C دو برابر عرض در مقاطع A، B و D می باشد و عمق کانال در همه جا یکسان است، حداکثر مقدار پروفیل سرعت در مقطع C حدود نصف حداکثر نظیرش در دیگر مقاطع می باشد. به علاوه هرچه خطوط هم تراز مقادیر سرعت (u) به مرکز سطح مقطع نزدیک تر می شوند، به یک منحنی بیضوی شبیه تر می گردند در حالیکه این خطوط هم تراز در مجاورت دیواره ها، مستطیل شکل هستند.

در شکل ۱۱ توزیع فشار در طول خط میانی کانال رسم شده است. در این شکل برای مقایسه، توزیع فشار ارائه شده توسط افانی و چیوربولی [۱۳] که از حل عددی معادلات

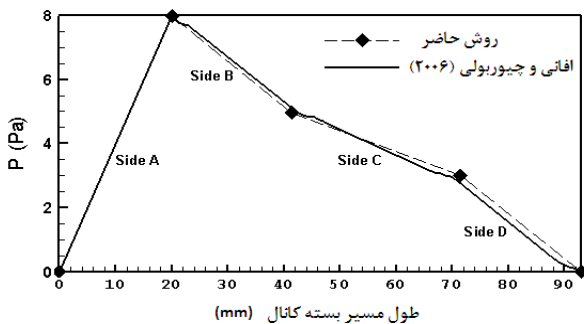


(الف)



(ب)

شکل ۱۰- پروفیل های سرعت؛ (الف) مربوط به بخش C (ب) مربوط به بخش های A، B و D



شکل ۱۱- توزیع فشار در طول خط میانی جریان MHD در کانال بسته

- [8] Lemoff, A.V., Lee, A.P. "An AC magnetohydrodynamic micropump, Sensors and Actuators B, Vol. 63, pp. 178-185, 2000.
- [9] Nguyen, B., Kassegne, S.K. "High-current density DC magnetohydrodynamics micropump with bubble isolation and release system", *Microfluid Nanofluid*, Vol. 5, pp. 383-393, 2008.
- [10] Lim, S., Choi, B. "A study on the MHD (Magnetohydrodynamic) micropump", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, pp. 739-749, 2009.
- [11] Ashraf, M.W., Tayyaba, S., Afzulpurkar, N. "Micro Electro Mechanical Systems (MEMS) based microfluidic devices for Biomedical applications", *Int. J. Mol. Sci.*, Vol. 12, pp. 3648-3704, 2011.
- [12] Shah, R.K., London, A.L., "Laminar flow forced convection in ducts, supplement 1 to advances in heat transfer", Academic Press, New York, 1978.
- [13] Affanni, A., Chiorboli, G. "Numerical modelling and experimental study of an AC Magnetohydrodynamic (MHD) micropump", *Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Sorrento, Italy, 2006.

مشترک بخش‌های مختلف، به دلیل انحراف جریان واقعی از حالت توسعه‌یافتگی اتفاق می‌افتد.

۶- نتیجه‌گیری

روش حل ارائه شده در این مقاله برای جریان‌های نیرو محرک که در آن نیروی محرک جریان در هر مقطع عرضی کانال، یکنواخت باشد، معادلات مومنتوم حاکم را از سه بعد به دو بعد کاهش می‌دهد، کما اینکه معادلات دوبعدی به دست آمده از این روش از نوع معادله‌ی پواسون است، چراکه جمله‌ی گرادیان فشار در معادله‌ی مومنتوم، مقدار معلومی لحاظ می‌گردد و در این صورت معادله‌ی مومنتوم جریان توسعه‌یافته به معادله‌ی پواسون برای مقطع عرضی کانال جریان تبدیل می‌گردد که شکل این معادله در مقایسه با معادله‌ی مومنتومی که در آن جمله‌ی گرادیان فشار، مجهول می‌باشد بسیار ساده‌تر است. از طرفی، این معادله تنها در مقطع عرضی کانال حل می‌گردد که در این صورت در حل عددی، نیاز به شبکه‌بندی سه‌بعدی نیز وجود ندارد. این روش در تمام جریان‌های نیرو محرک محوری با هر توزیع دلخواه محوری نیرو، کار آمد بوده و توزیع میدانی هر دو میدان سرعت و فشار براحتی قابل حصول است. کارآمد بودن این روش در حل جریان شبکه‌های بهم متصل میکروکانال‌ها که جریان در آنها بر پایه‌ی تحریک MHD صورت می‌گیرد، بیشتر آشکار می‌گردد.

مراجع

- [1] Cramer, K.R. and Pai S., "Magnetofluid dynamics for engineers and applied physicists", McGraw-Hill Book, 1973.
- [2] Jang, J., Lee S.S. "Theoretical and experimental study of MHD (Magnetohydrodynamic) micropump", *Sensors and Actuators A*, Vol. 80, pp. 84-89, 2000.
- [3] Friauf, J.M., "Electromagnetic ship propulsion", *ASME J.*, pp. 139-142, 1961.
- [4] Peng, Y., Sha, C., Zhou, K., Yang, A., Peng, A. "Superconducting MHD helical Channel experimental ship "HEMS-1", *Proceedings of the fifteenth International offshore and polar engineering conference*, Seoul, Korea, 2005.
- [5] Asai, S. "Metallurgical aspects of electromagnetic processing of materials, *Liquid Metal Magneto-Hydrodynamics*", Kluwer Academic Publishers, Boston, M. A., pp. 391-400, 1988.
- [6] Asai, S. "Birth and recent activities of electromagnetic processing of materials", *ISIJ International*, Vol. 29, Issue 12, pp. 981-992, 1989.
- [7] Qian, S., Bau, H.H. "Magneto-hydrodynamics based microfluidics", *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, pp. 10-21, 2009.